УДК 517.98

DOI: 10.21779/2542-0321-2024-39-1-44–59

А.А. Нурмагомедов

Об ограниченности в $C[-1,1]$ средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках

Дагестанский государственный аграрный университет имени М.М. Джамбулатова; Россия, 367032, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 180; alimn@mail.ru

Аннотация. Для произвольной непрерывной на отрезке $[-1,1]$ функции построены средние типа Валле-Пуссена относительно дискретных сумм Фурье по системе многочленов, образующих ортонормированную систему на неравномерных сетках с весом. Исследованы их аппроксимативные свойства в пространстве непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций.

Доказано, что средние Валле-Пуссена как семейство линейных операторов в пространстве непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций при определенных ограничениях, связывающих степень многочленов с числом узлов, равномерно ограничены. Более того, показано, что при этих же ограничениях средние Валле-Пуссена осуществляют наилучшего порядка полиномиальное приближение непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, асимптотическая формула, суммы Фурье, средние Валле-Пуссена.

1. Введение

Пусть $T_N = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ – дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа точек отрезка $[-1,1]: -1 = t_0 < t_1 < .... < t_{N-1} < t_N = 1$. Через

$$\hat{q}_{k,N}(t) = \hat{q}_{k,N}(t; T_N),\ k = 0, 1, ..., N-1 \tag{1.1}$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке T_N в следующем смысле:

$$(\hat{q}_{n,N}, \hat{q}_{m,N}) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{q}_{n,N}(t_j)\hat{q}_{m,N}(t_j)\Delta t_j = \delta_{nm},\ \ 0 \le n, m \le N-1, \tag{1.2}$$

где $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, ..., N-1$.

Пусть

$$\delta_N = \max_{0 \le j \le N-1} \Delta t_j, \tag{1.3}$$

κ_1– наименьшая константа в неравенстве типа В.А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$ ([1–3]):

$$\int_{-1}^{1} | p_n'(t) | \, dt \le \kappa_1 n^2 \int_{-1}^{1} | p_n(t) | \, dt,$$

$\hat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)$ – ортонормированный многочлен Якоби, $\hat{P}_n(t)$ – ортонормированный многочлен Лежандра, $C[-1,1]$ – пространство непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций $f(t)$ с нормой $\|f\| = \|f\|_{C[-1,1]} = \max_{-1\le t\le 1} |f(t)|$, $\mathfrak{R}_n$ – пространство алгебраических многочленов степени не выше n, а $E_n(f) = \min_{l_n \in \mathfrak{R}_n} \|f - l_n\|_{C[-1,1]}$ – наилучшее приближение функции $f(t)$ алгебраическими многочленами степени не выше n.

Через $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f,t)$ обозначим частную сумму n-го порядка ряда функции $f(t)$ по системе (1.1)

$$S_{n,N}(f) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_{k,N} \hat{q}_{k,N}(t), \tag{1.4}$$

где

$$\hat{f}_{k,N} = \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) \hat{q}_{k,N}(t_j) \Delta t_j,$$

а через

$$V_{m,n,N}(f) = V_{m,n,N}(f,t) = \frac{1}{n+1}\left[S_{m,N}(f) + S_{m+1,N}(f) + \ldots + S_{m+n,N}(f)\right], \tag{1.5}$$

где $m+n \le N-1$, обозначим средние Валле-Пуссена для сумм $S_{n,\,N}(f)$.

Заметим, что задача приближения функции из того или иного класса возникает во многих теоретических и прикладных исследованиях. При этом она в основном решается с помощью рядов Фурье по выбранной ортонормированной системе (см., например, [4]–[6]).

В работе [7] исследован вопрос сходимости частных сумм Фурье $S_{n,N}(f)$ порядка $n \le N-1$ к функции $f \in C[-1,1]$. Доказано, что при $n = O\left(\delta_N^{-1/5}\right)$ норма оператора $S_{n,N}(f)$ в пространстве $C[-1,1]$ имеет порядок $n^{1/2}$.

В работе [8] при тех же условиях получена оценка отклонения сумм $S_{n,N}(f)$ от функции $f(t)$, которая зависит от n и положения точки $t \in [-1,1]$ относительно концов отрезка.

Аналогичные исследования были проведены также в работах [9]–[10].

Стремление обеспечить как можно лучшее приближение заданной функции влечет выбор того или иного аппарата приближения. С этой целью часто вместо частной суммы Фурье по выбранной ортонормированной системе в качестве аппарата приближения используются средние Валле-Пуссена по этой же ортонормированной системе (см., например, [12]–[15]).

В статье также анализируются аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена по многочленам, образующих ортонормированную систему на произвольных сетках отрезка [–1, 1]. В частности, доказано, что при $0 < b < 1$, $0 < a \le \left(\frac{1-b}{4\kappa_1}\right)^{1/4}$, $0 < \mu \le \frac{n}{m} \le \nu$, $n \le \lambda \delta_N^{-1/6}$, $\lambda > 0$ норма оператора $V_{n,m,N}(f)$, которая обозначена через

$$\left\|V_{n,m,N}\right\| = \max_{-1\le x\le 1} \sup_{\|f\|\le 1} \left|V_{n,m,N}(f,x)\right|,$$

равномерно ограничена в пространстве $C[-1,1]$.

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Результаты, полученные ранее в работе [15], существенно используются в приводимых далее исследованиях.

Теорема 2.1. Пусть $0<b<1, 0<a\le\left(\frac{1-b}{4\kappa_1}\right)^{1/4}$ и $1\le n\le a\delta_N^{1/2}$. Тогда имеет место асимптотическая формула

$$\hat{q}_{n,N}(t)=\hat{P}_n(t)+\upsilon_{n,N}(t), \tag{2.1}$$

для остаточного члена $\upsilon_{n,N}(t)$ которой справедлива оценка

$$\left|\upsilon_{n,N}(t)\right|\le c(a,b)\delta_N^{1/2}n^{3/2}\left[\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right]^{-1/2}. \tag{2.2}$$

Теорема 2.2. Пусть $0<b<1, 0<a\le\left(\frac{1-b}{4\kappa_1}\right)^{1/4}$, $1\le n\le a\delta_N^{1/2}, -1\le t\le 1$. Тогда существует постоянная $c(a,b)>0$ такая, что

$$\left|\hat{q}_{n,N}(t)\right|\le c(a,b)\left(\delta_N^{1/2}n^{3/2}+1\right)\left[\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right]^{-1/2}. \tag{2.3}$$

Далее будем пользоваться также следующим утверждением ([14], лемма 1).

Лемма 2.1. Пусть функция $f(t)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a_1,b_1]$, а $\{t_j\}_{j=0}^m$ – сетка такая, что $a_1<t_0<t_1<...<t_m<b_1$. Пусть $\Delta t_j=t_{j+1}-t_j$, $\Delta^*=\max_j \Delta t_j$ и $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$. Тогда:

1) если $f(t)$ монотонно возрастает на $[a_2,b_2]$, то

$$\sum_{a_2\le t_j\le b_2} f(t_j)\Delta t_j\le\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx+f(b_2)\Delta^*; \tag{2.4}$$

2) если $f(t)$ монотонно убывает на $[a_2,b_2]$, то

$$\sum_{a_2\le t_j\le b_2} f(t_j)\Delta t_j\le\int_{a_2}^{b_2} f(x)dx+f(a_2)\Delta^*. \tag{2.5}$$

3. Некоторые свойства многочленов Якоби

Здесь мы приведем некоторые сведения о многочленах Якоби ([4]–[6]). Определим многочлены Якоби $P_n^{\alpha,\beta}(t)$ $(n=0,1,2,...)$ с помощью формулы Родрига:

$$P_n^{\alpha,\beta}(t)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{1}{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta}\frac{d^n}{dt^n}\left\{(1-t)^\alpha(1+t)^\beta\left(1-t^2\right)^n\right\},$$

где $\alpha,\beta-$ произвольные действительные числа. Если $\alpha,\beta>-1$, то, как известно, многочлены Якоби образуют ортогональную систему с весом $h(t)=(1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, т. е.

$$\int_{-1}^{1} h(t)P_n^{\alpha,\beta}(t)P_m^{\alpha,\beta}(t)dt=h_n^{\alpha,\beta}\delta_{nm},$$

где $h_n^{\alpha,\beta}=\dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$, и, следовательно, $h_n^{\alpha,\beta}=O\left(n^{-1}\right)$, $n=1,2,\ldots$.

Ниже мы воспользуемся также следующими свойствами многочленов Якоби:

а) весовая оценка:

$$\sqrt{n}\left|P_n^{\alpha,\beta}(t)\right|\le c(\alpha,\beta)\left(\sqrt{1-t}+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha-\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1+t}+\frac{1}{n}\right)^{-\beta-\frac{1}{2}}\quad(-1\le t\le 1);\qquad(3.1)$$

б) равенства [11] $(x\ne t)$:

$$K_k^{\alpha,\beta}(x,t)=\sum_{i=0}^{k}\left\{h_i^{\alpha,\beta}\right\}^{-1}P_i^{\alpha,\beta}(x)P_i^{\alpha,\beta}(t)=-\frac{k(1-x)(1+t)}{2^{\alpha+\beta+1}(x-t)}P_k^{\alpha+1,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta+1}(t)+$$

$$+H_k^1\frac{P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta}(t)}{x-t}+H_k^2\frac{P_k^{\alpha,\beta}(x)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)}{x-t}+H_k^3\frac{P_k^{\alpha,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta}(t)}{x-t}+H_k^4\frac{P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)}{x-t}-$$

$$-\frac{(k+1)P_{k+2}^{\alpha,\beta}(x)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)-kP_k^{\alpha,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta}(t)}{2^{\alpha+\beta+1}(x-t)}+\delta_k\frac{(1-x)(1+t)}{x-t}P_k^{\alpha+1,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta+1}(t),\qquad(3.2)$$

где $H_k^l=O(1),\ l=1,2,3,4,\ \delta_k=O(1),\ k\to\infty;$

в)

$$\frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)}\sum_{k=m}^{m+n}kP_k^{\alpha+1,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta+1}(t)=\sum_{i=1}^{6}f_i(t),\qquad(3.3)$$

где

$$f_1(t)=\frac{(1-x)(1-t)(1+t)}{2(x-t)^2}\Big[(n+m+\alpha+\beta+2)P_{m+n}^{\alpha+1,\beta+1}(t)P_{m+n}^{\alpha+1,\beta}(x)-$$
$$-(m+\alpha+\beta+1)P_m^{\alpha+1,\beta+1}(t)P_m^{\alpha+1,\beta}(x)\Big],$$

$$f_2(t)=\frac{(1-x)^2(1+t)}{2(x-t)^2}\Big[(m+\alpha+\beta+1)P_m^{\alpha+2,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta+1}(t)-$$
$$-(m+n+\alpha+\beta+2)P_{m+n}^{\alpha+2,\beta}(x)P_{m+n}^{\alpha,\beta+1}(t)\Big],$$

$$f_3(t)=\frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)^2}\left[\frac{m+n+\alpha+\beta+2}{2(m+n)+\alpha+\beta+3}P_{m+n}^{\alpha+1,\beta}(x)P_{m+n}^{\alpha,\beta+1}(t)-\right.$$
$$\left.-\frac{m+\alpha+\beta+1}{2m+\alpha+\beta+1}P_m^{\alpha+1,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta+1}(t)\right],$$

$$f_4(t)=-\frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)^2}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{(\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+2)}{(2k+\alpha+\beta+3)(2k+\alpha+\beta+1)}P_k^{\alpha+1,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta+1}(t),$$

$$f_5(t)=\frac{(\alpha+\beta+2)(1-x)(1+t)}{2(x-t)}\sum_{k=m}^{m+n}P_k^{\alpha+1,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta+1}(t),$$

$$f_6(t)=\frac{(1-x)(1+t)}{(x-t)^2}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{2k+\alpha+\beta+1}\Big[(\alpha+1)\beta P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(x)P_k^{\alpha,\beta+1}(t)-$$
$$-\alpha(\beta+1)\beta P_k^{\alpha+1,\beta}(x)P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(t)\Big]\ .$$

Как известно, одним из частных случаев многочленов Якоби при $\alpha=\beta=0$ являются многочлены Лежандра $P_n(t)=P_n^{0,0}(t)$, образующие ортонормированную систему с весом $h(t)\equiv 1$ на отрезке $[-1,1]$:

$$\frac{2n+2}{2}\int_{-1}^{1}P_n(t)P_m(t)dt=\delta_{nm}.$$

Для них, в частности, неравенство (3.1) имеет вид:

$$\sqrt{n}\left|P_n(t)\right|\le c\left[\sqrt{1-t^2}+\frac{1}{n}\right]^{-1/2}. \tag{3.4}$$

4. **Оценка средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье по многочленам $\hat{q}_{n,N}(t)$**

Основным результатом исследования является следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть $0<b<1,\, 0<a\le\left(\frac{1-b}{4\kappa_1}\right)^{1/4}$ и $0<\mu\le\frac{n}{m}\le\nu$. Тогда нормы средних Валле-Пуссена $V_{m,n,N}(t)$ при условии $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$ $(\lambda>0)$ равномерно ограничены в пространстве $C[-1,1]$.

Доказательство. Пусть

$$F_k(t,t_j)=\sum_{i=0}^{k}\hat{q}_{i,N}(t)\hat{q}_{i,N}(t_j). \tag{4.1}$$

Тогда в силу (1.4) и (1.5) имеем

$$V_{m,n,N}(f,t)=\sum_{j=0}^{N-1}f(t_j)\frac{1}{n+1}\sum_{k=m}^{m+n}F_k(t,t_j)\Delta t_j.$$

Отсюда получим равенство

$$\left\|V_{m,n,N}(t)\right\|=\sup_{|f|\le 1}\left|V_{m,n,N}(f,t)\right|=\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_k(t,t_j)\right|\Delta t_j. \tag{4.2}$$

Оценим $V_{m,n,N}(t)$ для $0\le t\le 1$. Для этого, по аналогии с работами [11–14], рассмотрим два случая: 1) $0\le t\le 1-4n^{-2}$; 2) $1-4n^{-2}\le t\le 1$.

Чтобы оценить $V_{m,n,N}(t)$ при $0\le t\le 1-4n^{-2}$, преобразуем сумму в правой части равенства (4.2) и для краткости обозначим соответственно слагаемые:

$$V_{m,n,N}(t)\le\frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_k(t,t_j)\right|\Delta t_j+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_k(t,t_j)\right|\Delta t_j+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{x_1\le t_j\le x_2}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_k(t,t_j)\right|\Delta t_j+\frac{1}{n+1}\sum_{x_1\le t_j<1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_k(t,t_j)\right|\Delta t_j=A_1+A_2+A_3+A_4, \tag{4.3}$$

где $x_1=t-\frac{\sqrt{1-t^2}}{n},\ x_2=t+\frac{\sqrt{1-t^2}}{n}$.

Рассмотрим A_1. В силу (2.1) и (4.1) мы получаем

$$A_1 \le \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\hat{P}_i(t)\hat{P}_i(t_j)\right|\Delta t_j + \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\hat{P}_i(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\hat{P}_i(t_j)\upsilon_{i,N}(t)\right|\Delta t_j + \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\upsilon_{i,N}(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j =$$

$$= A_{11}+A_{12}+A_{13}+A_{14}. \qquad (4.4)$$

Оценим A_{11}. Воспользовавшись равенством (3.2) при $\alpha=\beta=0$, мы получаем $(t\ne t_j)$

$$A_{11} \le \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\frac{k(1-t)(1+t_j)}{2(t-t_j)}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^1\left|\frac{P_{k+1}(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j + \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^2\left|\frac{P_k(x)P_{k+1}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^3\left|\frac{P_k(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j + \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^4\left|\frac{P_{k+1}(t)P_{k+1}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{2(n+1)}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\left|\frac{(k+1)P_{k+2}(t)P_{k+1}(t_j)-kP_k(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\delta_k\left|\frac{(1-t)(1+t_j)}{t-t_j}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)\right|\Delta t_j = \sum_{l=0}^{6}A_{11}^{(l)}. \qquad (4.5)$$

Рассмотрим $A_{11}^{(0)}$. Очевидно, что если $-1\le t_j\le -1/2$ и $0\le t\le 1-4n^{-2}$, то $t-t_j\ge 1/2$. Тогда в силу (3.1) при $\alpha=\beta=0$ мы получаем

$$A_{11}^{(0)} \le \frac{c}{n+1}(1-t)^{1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\left[k^{-1/2}\sum_{-1\le t_j\le -1+4k^{-2}}\Delta t_j + \sum_{-1+4k\le t_j\le -1/2}(1+t_j)^{1/4}\Delta t_j\right] \le$$

$$\le \frac{c}{n+1}\sum_{k=m}^{m+n}\left[k^{-5/2}+1\right] \le c. \qquad (4.6)$$

Теперь оценим $A_{11}^{(1)}$. В силу (3.4), учитывая то, что $H_k^{(1)}=O(1)$ и $m\le k\le m+n$, мы находим

$$A_{11}^{(1)} \le \frac{c}{n+1}(1-t)^{-1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\left(\sqrt{1+t_j}+\frac{1}{k}\right)^{-1/2}\Delta t_j \le$$

$$\le \frac{c}{n+1}(1-t)^{-1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\left[k^{-1/2}\sum_{-1\le t_j\le -1+4k^{-2}}\Delta t_j + \frac{1}{k}\sum_{-1+4k^{-2}\le t_j\le -1/2}(1+t_j)^{-1/4}\Delta t_j\right] \le$$

$$\le \frac{c}{n+1}(1-t)^{-1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\left[k^{-5/2}+k^{-1/2}\right] \le \frac{c(1-t)^{-1/4}}{n+1}m^{-1/2}(n+1) \le c(\mu,\nu). \qquad (4.7)$$

Аналогично можно доказать, что

$$A_{11}^{(l)} \le c(\mu,\nu),\ l = 2, 3, 4, 5. \tag{4.8}$$

В силу неравенства (3.4) и соотношения $\delta_k = O(1)$ имеем

$$A_{11}^{(6)} = \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\delta_k\left|\frac{(1-t)(1+t_j)}{t-t_j}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)\right|\Delta t_j \le$$

$$\le \frac{c}{n+1}(1-t)^{1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}(1+t_j)\left(\sqrt{1+t_j}+\frac{1}{k}\right)^{-3/2}\Delta t_j \le$$

$$\le \frac{c}{n+1}(1-t)^{1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\left[k^{-5/2}+k^{-1}+1\right] \le c. \tag{4.9}$$

Сопоставляя (4.5)–(4.9), получим

$$A_{11} \le c(\mu,\nu). \tag{4.10}$$

Теперь рассмотрим A_{12}. В силу (2.2), (2.5) и (3.4) при $n \le \lambda\delta_N^{-1/6}$ $0 \le i \le k,\ m \le k \le m+n$) имеем

$$A_{12} = \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\hat{P}_i(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j \le$$

$$\le \frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N^{1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}i^{3/2}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\left(\sqrt{1-t_j^2}+\frac{1}{i}\right)^{-1/2}\Delta t_j \le$$

$$\le \frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N^{1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left[i^2\sum_{-1\le t_j\le -1+4i^{-2}}\Delta t_j + i^{3/2}\sum_{-1+4i^{-2}\le t_j\le -1/2}(1+t_j)^{-1/4}\Delta t_j\right] \le$$

$$\le \frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N^{1/2}\left[(m+n)+(m+n)^{5/2}+(m+n)^{3}\delta_N\right](n+1) \le$$

$$\le c(a,b,\mu,\nu)\delta_N^{1/2}n^3 \le c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \tag{4.11}$$

Очевидно, что такую же оценку допускает и A_{13}:

$$A_{13} \le c(a,b,\mu,\nu)\delta_N^{1/2}n^3 \le c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \tag{4.12}$$

Теперь оценим A_{14}. В силу (2.2) и (2.5) при $n \le \lambda\delta_N^{-1/6}$ получим ($0 \le i \le k$, $m \le k \le m+n$)

$$A_{14} = \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\upsilon_{i,N}(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j \le$$

$$\le \frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left[i^{.5/2}\sum_{-1\le t_j\le -1+4i^{-2}}\Delta t_j + i^3\sum_{-1+4i^{-2}\le t_j\le -1/2}(1+t_j)^{-1/4}\Delta t_j\right] \le$$

$$\le \frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left[i^{3/2}+i^3\int_{-1+4i^{-2}}^{-1/2}(1+\xi)d\xi+\delta_N i^{7/2}\right] \le$$

$$\leq \frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N\left[(m+n)^{5/2}+(m+n)^4+(m+n)^{9/2}\delta_N\right](n+1)\leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu)n^{-3/2}. \quad (4.13)$$

Сопоставляя (4.4) и (4.10)–(4.13) при $n \leq \lambda\delta_N^{-1/6}$, имеем

$$A_1 \leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \quad (4.14)$$

Перейдем к оценке A_2. В силу (2.1) и (4.1) получим

$$A_2 \leq \sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_{k,N}(t,t_j)\right|\Delta t_j \leq \frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\hat{P}_i(t)\hat{P}_i(t_j)\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\hat{P}_i(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\hat{P}_i(t_j)\upsilon_{i,N}(t)\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\upsilon_{i,N}(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j \leq A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}. \quad (4.15)$$

Вначале оценим A_{22}. В силу (2.2), (2.4), (3.4) при $0\leq i\leq k, m\leq k\leq m+n$ и $n\leq\lambda\delta_N^{-1/6}$ имеем

$$A_{22}\leq\frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N^{1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}i^{3/2}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}(1-t_j)^{-1/2}\Delta t_j\leq$$

$$\leq\frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N^{1/2}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}i^{3/2}\left[\int_{-1/2}^{x_1}(1-\xi)^{-1/4}d\xi+\delta_N\left(1-t+\frac{\sqrt{1-t^2}}{n}\right)^{-1/4}\right]\leq$$

$$\leq\frac{c(a,b,\lambda)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\delta_N^{1/2}(m+n)^{5/2}(n+1)\leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \quad (4.16)$$

Очевидно, что

$$A_{23}\leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu), \quad (4.17)$$

$$A_{24}\leq\frac{c(a,b)}{n+1}\delta_N(1-t)^{-1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}i^3\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}(1-t_j)^{-1/4}\Delta t_j\leq$$

$$\leq\frac{c(a,b,\lambda)}{n+1}\delta_N(1-t)^{-1/4}(m+n)^4(n+1)\leq c(a,b,\lambda,\mu,\nu)n^{-3/2}. \quad (4.18)$$

Теперь оценим A_{21}. С учётом равенства (3.2) при $\alpha=\beta=0$ получим (при $t\neq t_j$)

$$A_{21}\leq\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\frac{k(1-t)(1+t_j)}{2(t-t_j)}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)\Delta t_j\right|+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^1\left|\frac{P_{k+1}(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^2\left|\frac{P_k(x)P_{k+1}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^3\left|\frac{P_k(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\leq t_j\leq x_1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^4\left|\frac{P_{k+1}(t)P_{k+1}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{2(n+1)}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\sum_{k=m}^{m+n}\left|\frac{(k+1)P_{k+2}(t)P_{k+1}(t_j)-kP_k(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\sum_{k=m}^{m+n}\delta_k\left|\frac{(1-t)(1+t_j)}{t-t_j}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)\right|\Delta t_j=\sum_{l=0}^{6}A_{21}^{(l)}. \quad (4.19)$$

Так как в силу (2.4), (3.4) при $-1/2\le t_j\le x_1$, $\mu\le\frac{m}{n}\le\nu$, $m\le k\le m+n$, $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$ выполняются неравенства

$$\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\left|\frac{P_k(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j\le ck^{-1}(1-t)^{-1/4}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j}\Delta t_j\le$$

$$\le ck^{-1}(1-t)^{-1/4}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{5/4}}\le ck^{-1}(1-t)^{-1/4}\left[\int_{-1/2}^{x_1}\frac{d\zeta}{(t-\zeta)^{5/4}}+\delta_N n^{5/2}\right]\le$$

$$\le c(\lambda)k^{-1}(1-t)^{-1/4}(1-t)^{-1/8}n^{1/4}\le c(\lambda,\mu,\nu),$$

то получим

$$A_{22}^{(3)}\le c(\lambda,\mu,\nu). \quad (4.20)$$

Аналогично доказываются и следующие оценки

$$A_{22}^{(l)}\le c(\lambda,\mu,\nu),\quad l=1,2,4,5. \quad (4.21)$$

Для $A_{22}^{(6)}$ посредством аналогичных рассуждений с учетом соотношения $\delta_k=O(1)$ также находим

$$A_{22}^{(6)}\le\frac{c}{n+1}(1-t)^{-1/4}\sum_{k=m}^{m+n}k^{-1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j}\Delta t_j\le$$

$$\le\frac{c}{n+1}\frac{1}{m}\left[(1-t)^{-1/8}n^{1/4}+\delta_N n^{5/2}\right](n+1)\le c(\lambda,\mu,\nu). \quad (4.22)$$

Перейдем к оценке A_{21}. Воспользовавшись (3.2) при $\alpha=\beta=0$, получим

$$\frac{(1-t)(1+t_j)}{t-t_j}\sum_{k=m}^{m+n}kP_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)=\sum_{j=1}^{5}f_j(t,t_j), \quad (4.23)$$

где

$$f_1(t,t_j)=\frac{(1-t)(1+t_j)(1-t_j)}{2(t-t_j)^2}\left[(n+m+2)P_{m+n}^{1,1}(t_j)P_{m+n}^{1,0}(t)-(m+1)P_m^{1,1}(t_j)P_m^{1,0}(t)\right], \quad (4.24)$$

$$f_2(t,t_j)=\frac{(1-t)^2(1+t_j)}{2(t-t_j)^2}\left[(m+1)P_m^{2,0}(t)P_m^{0,1}(t_j)-(m+n+2)P_{m+n}^{2,0}(t)P_{m+n}^{0,1}(t_j)\right], \quad (4.25)$$

$$f_3(t,t_j)=\frac{(1-t)(1+t_j)}{(t-t_j)^2}\left[\frac{m+n+2}{2(m+n)+3}P_{m+n}^{1,0}(t)P_{m+n}^{0,1}(t_j)-\frac{m+1}{2m+1}P_m^{1,0}(t)P_m^{0,1}(t_j)\right], \quad (4.26)$$

$$f_4(t,t_j)=-\frac{(1-t)(1+t_j)}{(t-t_j)^2}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{2k+2}{(2k+3)(2k+1)}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j), \quad (4.27)$$

$$f_5(t,t_j)=\frac{(1-t)(1+t_j)}{t-t_j}\sum_{k=m}^{m+n}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)\,. \qquad (4.28)$$

Для этих значений в силу (3.1) при $m=O(n),\, t_j<t$, $-1/2\le t_j\le x_1,\, 0\le t\le 1-4n^{-2}$ соответственно получим оценки:

$$\left|f_1(t,t_j)\right|\le c\frac{(1-t)^{1/4}(1-t_j)^{1/4}}{(t-t_j)^2}\le\frac{c}{(t-t_j)^2}(1-t)^{1/2}+\frac{c}{(t-t_j)^{7/4}}\,,$$

$$\left|f_2(t,t_j)\right|\le c\frac{(1-t)^{3/4}(1-t_j)^{-1/4}}{(t-t_j)^2}\,,$$

$$\left|f_3(t,t_j)\right|\le c\frac{(1-t)^{1/4}(1-t_j)^{-1/4}}{(m+n)(t-t_j)^2}\le\frac{c}{(m+n)(t-t_j)^2}\,,$$

$$\left|f_4(t,t_j)\right|\le c\frac{(1-t)^{1/4}(1-t_j)^{-1/4}}{(t-t_j)^2}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{(2k+1)k}\le\frac{c(n+1)}{m^2(t-t_j)^2}\le\frac{c(\mu,\nu)}{m(t-t_j)^2}\,,$$

$$\left|f_5(t,t_j)\right|\le c\frac{(1-t)^{1/4}(1-t_j)^{-1/4}}{t-t_j}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\le\frac{c(n+1)}{m(t-t_j)}\le\frac{c(\mu,\nu)}{t-t_j}\,.$$

Отсюда в силу (2.5) при $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$ имеем

$$\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\left|f_1(t,t_j)\right|\Delta t_j\le$$

$$\le\frac{c}{n+1}(1-t)^{1/2}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^2}+\frac{c}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^{7/4}}\le$$

$$\le\frac{c}{n+1}(1-t)^{1/2}\left[\int_{-1/2}^{x_1}\frac{d\xi}{(t-\xi)^2}+\delta_N n^4\right]+\frac{c}{n+1}(1-t)^{1/4}\left[\int_{-1/2}^{x_1}\frac{d\xi}{(t-\xi)^{7/4}}+\delta_N n^{7/2}\right]\le$$

$$\le\frac{c(\lambda)}{n+1}(1-t)^{1/2}(1-t)^{-1/2}n+\frac{c(\lambda)}{n+1}(1-t)^{1/4}(1-t)^{-3/8}n^{3/4}\le c(\lambda)\,, \qquad (4.29)$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\left|f_2(t,t_j)\right|\Delta t_j\le\frac{c}{n+1}(1-t)^{1/2}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^2}\le c(\lambda)\,, \qquad (4.30)$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\left|f_3(t,t_j)\right|\Delta t_j\le\frac{c}{(n+1)(m+n)}(1-t)^{1/2}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^2}\le c(\lambda,\mu,\nu)n^{-1}\,, \qquad (4.31)$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\left|f_4(t,t_j)\right|\Delta t_j\le\frac{c(\mu,\nu)}{(n+1)m}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{\Delta t_j}{(t-t_j)^2}\le c(\lambda,\mu,\nu)n^{-1}\,, \qquad (4.32)$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\left|f_5(t,t_j)\right|\Delta t_j\le\frac{c(\mu,\nu)}{(n+1)}\sum_{-1/2\le t_j\le x_1}\frac{\Delta t_j}{t-t_j}\le\frac{c(\mu,\nu)}{n+1}\left[\ln(n+1)+\delta_N n^2\right]\le c(\lambda,\mu,\nu)\,. \qquad (4.33)$$

Сопоставив (4.23)–(4.33), получим

$$A_{21}\le c(\lambda,\mu,\nu)\,.$$

Отсюда и из (4.15)–(4.18) имеем

$$A_2 \le c(\lambda,\mu,\nu). \tag{4.34}$$

Теперь оценим A_3. В силу (2.2) при $n \le \lambda\delta_N^{-1/6}$ получим

$$A_3 = \frac{1}{n+1}\sum_{x_1 \le t_j \le x_2}\left|\sum_{k=m}^{m+n} F_{k,N}(t,t_j)\right|\Delta t_j \le \frac{c(a,b,\lambda)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\sum_{x_1\le t_j\le x_2}(1-t_j)^{-1/4}\Delta t_j \le$$

$$\le c(a,b,\lambda)m(1-t)^{-1/4}\sum_{x_1\le t_j\le x_2}(1-t_j)^{-1/4}\Delta t_j \le c(a,b,\lambda,\mu,\nu)m(1-t)^{-1/4}(1-x_2)^{-1/4}(x_2-x_1) \le$$

$$\le c(a,b,\lambda,\mu,\nu)n(1-t)^{-1/4}\left(1-t-\frac{\sqrt{1-t^2}}{n}\right)^{-1/4}\frac{\sqrt{1-t^2}}{n} \le$$

$$\le c(a,b,\lambda,\mu,\nu)(1-t)^{1/4}\left(1-t-\frac{\sqrt{1-t^2}}{n}\right)^{-1/4} \le c(a,b,\lambda,\mu,\nu)\left(1-\frac{1}{n}\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\right)^{-1/4} \le (a,b,\lambda,\mu,\nu). \tag{4.35}$$

Перейдем к оценке A_4. В силу (2.1) и (4.1) имеем

$$A_4 = \frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_k(t,t_j)\right|\Delta t_j \le \frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\hat P_i(t)\hat P_i(t_j)\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\hat P_i(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j + \frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\hat P_i(t_j)\upsilon_{i,N}(t)\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|\upsilon_{i,N}(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j = A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}. \tag{4.36}$$

Воспользовавшись (2.2), (2.4) и (3.4), находим

$$\sum_{x_2\le t_j<1}\left|\hat P_i(t)\upsilon_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N^{1/2}i^{3/2}(1-t)^{-1/4}\left[\sum_{x_2\le t_j\le 1-4i^{-2}}(1-t_j)^{-1/4}\Delta t_j + i^{1/2}\sum_{1-4i^{-2}\le t_j<1}\Delta t_j\right] \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N^{1/2}i^{3/2}(1-t)^{-1/4}\left[\int_{x_2}^{1-4i^{-2}}(1-\xi)^{-1/4}d\xi + \delta_N i^{1/2} + i^{-3/2}\right] \le$$

$$\le c(a,b)\delta_N^{1/2}(1-t)^{-1/4}\left[i^{3/2}+\delta_N i^2 + 1\right].$$

Отсюда, учитывая $0 \le i \le k$, а $m \le k \le m+n$, при $n \le \lambda\delta_N^{-1/6}$ получим

$$A_{42} \le \frac{c(a,b)}{n+1}\delta_N^{1/2}(1-t)^{-1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left[i^{3/2}+\delta_N i^2+1\right] \le$$

$$\le \frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\left[\delta_N^{1/2}(m+n)^{5/2}+\delta_N^{3/2}(m+n)^3+\delta_N^{1/2}(m+n)\right](n+1) \le c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \tag{4.37}$$

Посредством аналогичных рассуждений можно также показать, что

$$A_{43} \le c(a,b,\lambda,\mu,\nu), \tag{4.38}$$

$$A_{44} \le \frac{c(a,b)}{n+1}\delta_N(1-t)^{-1/4}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left[i^3+\delta_N i^{7/2}+i^{3/2}\right] \le$$

$$\le \frac{c(a,b)}{n+1}(1-t)^{-1/4}\left[\delta_N(m+n)^4+\delta_N^2(m+n)^{9/2}+\delta_N(m+n)^{5/2}\right](n+1) \le c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \quad (4.39)$$

Теперь перейдем к оценке A_{41}. С учетом равенства (3.2) при $\alpha=\beta=0$ имеем

$$A_{41} = \frac{1}{n+1}\sum_{x_2 \le t_j < 1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\hat{P}_i(t)\hat{P}_i(t_j)\right|\Delta t_j \le$$

$$\le \frac{1}{n+1}\sum_{x_2 \le t_j < 1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}\frac{k(1-t)(1+t_j)}{2(t-t_j)}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)\Delta t_j\right| +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{x_2 \le t_j < 1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^1\left|\frac{P_{k+1}(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j + \frac{1}{n+1}\sum_{x_2 \le t_j < 1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^2\left|\frac{P_k(x)P_{k+1}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{x_2 \le t_j < 1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^3\left|\frac{P_k(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j + \frac{1}{n+1}\sum_{x_2 \le t_j < 1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^4\left|\frac{P_{k+1}(t)P_{k+1}(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{2(n+1)}\sum_{x_2 \le t_j < 1}\sum_{k=m}^{m+n}\left|\frac{(k+1)P_{k+2}(t)P_{k+1}(t_j)-kP_k(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j +$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{x_2 \le t_j < 1}\sum_{k=m}^{m+n}\delta_k\left|\frac{(1-t)(1+t_j)}{t-t_j}P_k^{1,0}(t)P_k^{0,1}(t_j)\right|\Delta t_j = \sum_{l=0}^{6}A_{21}^{(l)}. \quad (4.40)$$

В силу (2.4), (3.4) при $-1/2 \le t_j \le x_1$, $\mu \le \frac{m}{n} \le \nu$, $m \le k \le m+n$, $n \le \lambda\delta_N^{-1/6}$ находим

$$\sum_{x_2 \le t_j < 1}\left|\frac{P_{k+1}(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j \le \frac{c}{k}(1-t)^{-1/4} \times$$

$$\times\left[\sum_{x_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}}\frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t}\Delta t_j + \sum_{\frac{1+t}{2} \le t_j \le 1-4k^{-2}}\frac{(1-t_j)^{-1/4}}{t_j-t}\Delta t_j + k^{1/2}\sum_{1-4k^{-2} \le t_j < 1}\frac{\Delta t_j}{t_j-t}\right] \le$$

$$\le \frac{c}{k}(1-t)^{-1/4}\left[\sum_{x_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}}\frac{\Delta t_j}{(t_j-t)^{5/4}} + \sum_{\frac{1+t}{2} \le t_j \le 1-4k^{-2}}\frac{\Delta t_j}{(1-t_j)^{5/4}} + n^2k^{-1/2}\sum_{1-4k^{-2} \le t_j < 1}\Delta t_j\right] \le$$

$$\le \frac{c}{k}(1-t)^{-1/4} \times$$

$$\times\left[\sum_{x_2 \le t_j \le \frac{1+t}{2}}\frac{\Delta t_j}{(t_{j+1}-t)^{5/4}}\left(\frac{\Delta t_j}{t_j-t}+1\right)^{5/4} + \sum_{\frac{1+t}{2} \le t_j \le 1-4k^{-2}}\frac{\Delta t_j}{(1-t_j)^{5/4}} + n^{1/2}\right] \le$$

$$\le \frac{c(\mu,\nu)}{n}(1-t)^{-1/4}\left[\int_{x_2}^{\frac{1+t}{2}}\frac{d\xi}{(\xi-t)^{5/4}}+\int_{\frac{1+t}{2}}^{1-4k^{-2}}\frac{d\xi}{(1-\xi)^{5/4}}+\delta_N n^{5/2}+n^{1/2}\right]\le c(\lambda,\mu,\nu).$$

Отсюда с учетом соотношения $H_k^1=O(1)$ получим

$$A_{41}^{(1)}=\frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\sum_{k=m}^{m+n}H_k^1\left|\frac{P_{k+1}(t)P_k(t_j)}{t-t_j}\right|\Delta t_j\le c(\lambda,\mu,\nu). \tag{4.41}$$

По аналогии можно показать, что имеют место оценки

$$A_{41}^{(l)}\le c(\lambda,\mu,\nu),\quad l=2,4,5,6. \tag{4.42}$$

Теперь займемся оценкой $A_{41}^{(0)}$. Воспользовавшись (3.3) при $\alpha=\beta=0$ и равенствами (4.23)–(4.26), покажем, что

$$A_{41}^{(0)}\le c(\lambda,\mu,\nu). \tag{4.43}$$

Для этого, по аналогии с работами [12]–[14], введем обозначения. Пусть

$$\theta=\arccos t,\ \varphi=\arccos\tau,\ \varphi_0=\arccos\left(1-4n^{-2}\right),\ x^*=t\cos\frac{1}{n}+\sqrt{1-t^2}\sin\frac{1}{n}=\cos\left(\varphi-\frac{1}{n}\right).$$

Тогда в силу (4.24), (2.5) и (3.4) при $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$ находим

$$\frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\left|f_1(t,t_j)\right|\Delta t_j\le$$

$$\le\frac{c}{n+1}(1-t)^{1/4}\left[\sum_{x_2\le t_j\le 1-4n^{-2}}\frac{(1-t_j)^{1/4}}{(t_j-t)^2}\Delta t_j+(m+n)^{3/2}\sum_{1-4n^{-2}\le t_j<1}\frac{1-t_j}{(t_j-t)^2}\Delta t_j\right]\le$$

$$\le\frac{c(\mu,\nu)}{n+1}(1-t)^{1/4}\left[\sum_{x_2\le t_j\le 1-4n^{-2}}\frac{(1-t_j)^{1/4}}{(t_j-t)^2}\Delta t_j+n^{3/2}\left(\frac{n}{\sqrt{1-t^2}}\right)^2\sum_{1-4n^{-2}\le t_j<1}(1-t_j)\Delta t_j\right]\le$$

$$\le\frac{c(\mu,\nu)}{n+1}(1-t)^{1/4}\left[\int_{x_2}^{1-4n^{-2}}\frac{(1-\tau)^{1/4}d\tau}{(\tau-t)^2}+\delta_N n^4\right]+c(\mu,\nu)n^{5/2}(1-t^2)^{-3/4}\left[\int_{1-4n^{-2}}^{1}(1-\xi)d\xi+\delta_N n^{-2}\right]\le$$

$$\le\frac{c(\lambda,\mu,\nu)}{n+1}(1-t^2)^{1/4}\int_{x^*}^{1}\frac{(1-\tau^2)^{1/4}}{(\tau-t)^2}d\tau+c(\lambda,\mu,\nu)n^{-3/2}(1-t^2)^{-3/4}\le$$

$$\le\frac{c(\lambda,\mu,\nu)}{n+1}\sin^{\frac{1}{2}}\varphi\int_0^{\varphi-1/n}\frac{\sin^{\frac{3}{2}}\theta}{(\cos\theta-\cos\varphi)^2}d\theta\le\frac{c(\lambda,\mu,\nu)}{n+1}\varphi^{\frac{1}{2}}\int_0^{\varphi-1/n}\frac{\theta^{\frac{3}{2}}}{(\theta^2-\varphi^2)^2}d\theta\le$$

$$\le\frac{c(\lambda,\mu,\nu)}{n+1}\int_0^{\varphi-1/n}\frac{d\theta}{(\theta-\varphi)^2}\le c(\lambda,\mu,\nu). \tag{4.44}$$

В силу (3.4) и (4.25) для $x_2\le t_j<1$ при $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$ также получим

$$\frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\left|f_2(t,t_j)\right|\Delta t_j\le$$

$$\le \frac{c(\mu,\nu)}{n+1}(1-t)^{3/4}n^{1/2}\sum_{x_2\le t_j\le 1}\frac{\Delta t_j}{(t_j-t)^2}\le c(\mu,\nu)(1-t)^{3/4}(n+1)^{-1/2}\left[\int_{x_2}^{1}\frac{d\tau}{(\tau-t)^2}+\delta_N n^4\right]\le$$

$$\le \frac{c(\lambda,\mu,\nu)}{\sqrt{n+1}}(1-t^2)^{1/4}\int_{x^*}^{1}\frac{1}{(\tau-t)^2}d\tau\le \frac{c(\lambda,\mu,\nu)}{\sqrt{n+1}}\sin^{\frac{3}{2}}\varphi\int_0^{\varphi-1/n}\frac{\sin\theta}{(\cos\theta-\cos\varphi)^2}d\theta\le$$

$$\le \frac{c(\lambda,\mu,\nu)}{\sqrt{n+1}}\varphi^{1/2}\int_0^{\varphi-1/n}\frac{d\theta}{(\theta-\varphi)^2}\le c(\lambda,\mu,\nu)\varphi^{1/2}n^{1/2}\le$$

$$c(\lambda,\mu,\nu)(1-t^2)^{1/4}(1-t^2)^{-1/4}\le c(\lambda,\mu,\nu). \qquad (4.45)$$

Посредством аналогичных рассуждений можно показать, что

$$\frac{1}{n+1}\sum_{x_2\le t_j<1}\left|f_i(t,t_j)\right|\Delta t_j \le c(\lambda),\quad i=3,4.$$

Отсюда и из (4.44), (4.45) следует оценка (4.43). Теперь, сопоставляя (4.3), (4.14), (4.32), (4.33) и (4.43), получим

$$V_{n,m,N}(t)\le c(a,b,\lambda,\mu,\nu), \qquad (4.46)$$

$0\le t\le 1-4n^{-2}$, $\mu\le \frac{n}{m}\le\nu$, $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$.

Пусть теперь $1-4n^{-2}\le t\le 1$. В этом случае сумму из (4.2) представим по следующей схеме:

$$V_{n,m,N}(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{N-1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_{k,N}(t,t_j)\right|\Delta t_j\le \frac{1}{n+1}\sum_{-1\le t_j\le -1/2}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_{k,N}(t,t_j)\right|\Delta t_j+$$

$$+\frac{1}{n+1}\sum_{-1/2\le t_j\le 1-8n^{-2}}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_{k,N}(t,t_j)\right|\Delta t_j+\frac{1}{n+1}\sum_{1-8n^{-2}\le t_j<1}\left|\sum_{k=m}^{m+n}F_{k,N}(t,t_j)\right|\Delta t_j=$$

$$=B_1+B_2+B_3. \qquad (4.47)$$

Суммы B_1 и B_2 оцениваются совершенно аналогично тому, как это было сделано для A_1, A_2 и A_3. А именно, при $m\le k\le m+n$, $\mu\le\frac{n}{m}\le\nu$, $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$ мы получим

$$B_1\le c(a,b,\lambda,\mu,\nu),\quad B_2\le c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \qquad (4.48)$$

Что касается B_3, то, воспользовавшись оценкой (2.3) при $m\le k\le m+n$, $\mu\le\frac{n}{m}\le\nu$, $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$, находим

$$B_3\le\frac{1}{n+1}\sum_{1-8n^{-2}\le t_j<1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\left|q_{i,N}(t)q_{i,N}(t_j)\right|\Delta t_j\le\frac{c(a,b,\lambda)}{n+1}\sum_{1-8n^{-2}\le t_j<1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}(i+1)\Delta t_j\le$$

$$\le\frac{c(a,b,\lambda)}{n+1}(n+m)^2(n+1)\le c(a,b,\lambda,\mu,\nu). \qquad (4.49)$$

Из (4.47)–(4.49) получаем

$$V_{n,m,N}(t)\le c(a,b,\lambda,\mu,\nu), \qquad (4.50)$$

$1-4n^{-2}\le t\le 1$, $\mu\le\frac{n}{m}\le\nu$, $n\le\lambda\delta_N^{-1/6}$.

Следовательно, сопоставляя (4.46) и (4.50) убеждаемся в справедливости теоремы в случае, когда $0 \le t \le 1$.

Посредством вполне аналогичных рассуждений можно показать, что такая же оценка имеет место и для случая, когда $-1 \le t \le 0$.

Теорема 4.1. доказана.

Следующее утверждение непосредственно следует из доказанной теоремы.

Следствие 4.1. Пусть функция $f \in C[-1,1]$, а $E_n(f)$ – наилучшее равномерное приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n. Тогда в условиях теоремы 4.1. имеет место оценка

$$\left\| f - V_{m,n,N}(f) \right\| \le c(a,b,\lambda,\mu,\nu) E_n(f).$$

Литература

1. *Даугавет И.К., Рафальсон С.З.* О некоторых неравенствах для алгебраических многочленов // Вестник Ленинградского университета. 1974. № 19. – С. 18–24.
2. *Конягин С.В.* О неравенстве В.А. Маркова для многочленов в метрике L // Труды Математического института АН СССР. 1980. № 145. – С. 117–125.
3. *Симонов И.Е.* Точное неравенство типа братьев Марковых в пространствах L_p, L_1 на отрезке // Труды Института. матем. и механ. УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. – С. 282–290.
4. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
5. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.
6. *Шарапудинов И.И.* Многочлены, ортогональные на сетках. Теория и приложения. – Махачкала: ДГПУ, 1997. – 274 с.
7. *Нурмагомедов А.А.* Многочлены, ортогональные на неравномерных сетках // Изв. Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2011. Т. 11, вып. 3, ч. 2. – С. 29–42.
8. *Нурмагомедов А.А.* Приближение функций частными суммами ряда Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках // Изв. вузов. Математика. 2020. № 4. – С. 64–73. DOI: https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-4-64-73.
9. *Нурмагомедов А.А., Расулов Н.К.* Двусторонняя оценка функции Лебега сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Вестник СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия. 2018. Т. 5 (63), вып. 3. – С. 417–431.
10. *Нурмагомедов А.А.* Аппроксимативные свойства дискретных сумм Фурье по многочленам, ортогональным на неравномерных сетках // Владикавк. математический журнал. 2020. Т. 22, вып. 2. – С. 44–47.
11. *Шарапудинов И.И., Вагабов И.А.* О сходимости средних Валле-Пуссена для сумм Фурье–Якоби // Матем. заметки. 1996. Т. 60, вып. 4. – С. 569–586.
12. *Шарапудинов И.И.* Об ограниченности в C[-1,1] средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Чебышева // Матем. сб. 1996. Т. 187, № 1. – С. 143–160.
13. *Шарапудинов И.И.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена частичных сумм смешанного ряда по полиномам Лежандра // Матем. заметки. 2008. Т. 84, № 84. – С. 452–471.
14. *Коркмасов Ф.М.* Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Якоби // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. – С. 334–355.

15. *Нурмагомедов А.А.* Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2008. Т. 8, вып. 1. – С. 25–31.

Поступила в редакцию 20 февраля 2024 г.
Принята 3 марта 2024 г.

UDC 517.98

DOI: 10.21779/2542-0321-2024-39-1-44–59

On the Boundedness in $C[-1,1]$ of the de la Vallee–Poussin Averages for Discrete Fourier Sums by Polynomials Orthogonal on Non-Uniform Grids

A.A. Nurmagomedov

Dagestan State Agrarian University named after M.M. Dzhambulatova; Russia, 367032, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 180; alimn@mail.ru

Abstract. For arbitrary continuous function on the segment $[-1,1]$ is constructed Valle-Poussin type averages for discrete sums by Fourier on system polynomials forming an orthonormals system on non-uniform grids with weight. Their approximation properties in the space of continuous functions on the segment $[-1,1]$ are investigated.

It is proved that the Vallee-Poussin averages as a family of linear operators in the space of continuous functions on the segment $[-1,1]$ under certain constraints relating the degree of polynomials to the number of nodes are uniformly bounded. Moreover, it is shown that under the same constraints the Vallee-Poussin averages perform the best order polynomial approximation of continuous functions on the segment $[-1,1]$.

Keywords: polynomial, orthogonal system, grid, asymptotic formula, Fourier sums, Vallee-Poussin averages.

Received 20 February, 2024
Accepted 3 March, 2024