УДК 517.962.26, 517.982.43, 519.21, 519.72

DOI: 10.21779/2542-0321-2024-39-1-37–43

Н.А. Андриянов, А.Е. Кондратенко, В.Н. Соболев, Я.А. Ульянцев

О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением в двумерном случае

МГУ им. М.В. Ломоносова; Россия, 119991, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1; nikita.andriianov@math.msu.ru, ae_cond@mech.math.msu.su, sobolev_vn@mail.ru, iaroslav.uliantcev@math.msu.ru

Аннотация. В статье показано, что дробная часть свертки произвольной случайной величины, принимающей значения в Z^2, с дискретной равномерно распределенной на множестве $Z_N \times Z_N$ распределена равномерно на том же множестве. Далее аналогичное утверждение рассматривается для случая произвольной случайной величины со значениями в R^2 и абсолютно непрерывной равномерной на квадрате $[0;1]^2$.

Ключевые слова: свертка, дробная часть, равномерное распределение, максимальная энтропия, независимость.

Введение

Изучение поведения сверток случайных величин относится к фундаментальным задачам теории вероятностей, продолжающим сохранять свою актуальность на протяжении столетий. Значение закона больших чисел и центральной предельной теоремы [1; 2; 3] настолько велико, что их влияние ощущается далеко за пределами не только теории вероятностей, но и всей математики.

Помимо классических нормировок сумм, рассматриваются и их дробные части.

Обзор вопросов сходимости дробных частей сверток к равномерной случайной величине дан в [4]; о последних известных результатах рассказывалось на IV Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий», VIII Международной конференции по стохастическим методам (МКСМ–8) [5; 6] и XV Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» [7].

Помимо сходимости, интересен вопрос наследования свойства равномерности [8]. Так, в [9] было рассказано об информационном свойстве свертки, в [10] – сделано обобщение на неканонические случаи, при этом унифицировано и обобщено понятие дробной части.

В статье представлены результаты, касающиеся информационного свойства свертки с равномерным распределением в двумерном случае, о которых было рассказано на V Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий».

1. Обобщение понятия дробной части на многомерный случай

Определим понятие дробной части в многомерном случае.

Определение 1.

Дробной частью целочисленного вектора $(a_1, \ldots, a_n)$ при натуральных $N_1, \ldots, N_n$ назовем вектор дробных частей его компонент $(\{a_1\}_{N1}, \ldots, \{a_n\}_{Nn})$, используя обозначение $\{a_1, \ldots, a_n\}_{N1, \ldots, Nn}$.

Определение 2.

Дробной частью действительного вектора (a_1, …, a_n) назовем вектор дробных частей его компонент ({a_1}, …, {a_n}), используя обозначение {a_1, …, a_n}.

2. Дискретный случай

Выведем формулу свертки для случайных величин, принимающих значения в Z_N={0, …, N-1}, где N – натуральное число больше 1. Для любого m из Z_N верны следующие преобразования:

$$\mathrm{P}(\{\xi_1+\xi_2\}_N=m)=\mathrm{P}(\{\xi_1+\xi_2\}_N=m,\Omega)=\mathrm{P}\left(\{\xi_1+\xi_2\}_N=m,\bigcup_{k=0,\dots,N-1}(\xi_2=k)\right)$$

$$=\mathrm{P}\left(\bigcup_{k=0,\dots,N-1}(\{\xi_1+\xi_2\}_N=m,\xi_2=k)\right)$$

$$=\sum_{k=0,\dots,N-1}\mathrm{P}(\{\xi_1+\xi_2\}_N=m,\xi_2=k)$$

$$=\sum_{k=0,\dots,N-1}\mathrm{P}(\{\xi_1+k\}_N=m,\xi_2=k)$$

$$=\sum_{k=0,\dots,N-1}\mathrm{P}(\xi_1=\{m-k\}_N,\xi_2=k)$$

$$=\sum_{k=0,\dots,N-1}\mathrm{P}(\xi_1=\{m-k\}_N)\mathrm{P}(\xi_2=k).$$

Заметим, что из принятия k всех значений из Z_N следует для любого m из Z_N принятие{m-k}$_N$ также всех значений из Z_N. Верно и обратное. То есть, другими словами, существует взаимное однозначное соответствие между Z_N и {m-Z_N}$_N$ для любого m из Z_N. Поясним сказанное следующей таблицей при N = 4.

		0	1	2	3	m
	0	0	1	2	3	
	1	3	0	1	2	
	2	2	3	0	1	
N-1	3	1	2	3	0	
	k	{m-k}$_N$	{m-k}$_N$	{m-k}$_N$	{m-k}$_N$	

Полученная формула обобщается аналогичными преобразованиями на случай двумерных случайных величин из $Z_N \times Z_N$. Так, для любого вектора (m_1, m_2) из $Z_N \times Z_N$

$$P\left(\{\xi_1+\xi_2\}_{N,N}=(m_1,m_2)\right)=$$

$$=\sum_{k_1,\ k_2=0,\ \dots,\ N-1}P\big(\xi_1=\{m_1-k_1,m_2-k_2\}_{N,N}\big)P\big(\xi_2=(k_1,k_2)\big).$$

При этом для любых m_1 и m_2 из Z_N вектор (m_1-k_1, m_2-k_2) также принимает все значения из $Z_N \times Z_N$ при принятии вектором (k_1, k_2) всех значений из $Z_N \times Z_N$.

Теорема 1.

Пусть целочисленная двумерная случайная величина ξ и равномерная на множестве $\{0,1,\dots,N-1\}^2$ случайная величина η независимы.

Тогда случайная величина $\{\xi+\eta\}_{N,N}$ имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределенных на множестве $\{0,1, ..., N-1\}^2$.

Доказательство.

Так как $\{\xi+\eta\}_{N,N}=\{\{\xi\}_{N,N}+\eta\}_{N,N}$, без ограничения общности можно считать ξ принимающей значения только на множестве $Z_N\times Z_N$, что позволяет применить формулу свертки в полученном выше виде: для любого (m_1, m_2) из $Z_N\times Z_N$

$$\mathrm{P}\left(\{\xi+\eta\}_{N,N}=(m_1,m_2)\right)=$$

$$=\sum_{k_1,\ k_2=0,\ ...,\ N-1}\mathrm{P}\left(\xi=\{m_1-k_1,m_2-k_2\}_{N,N}\right)\mathrm{P}\left(\eta=(k_1,k_2)\right)=$$

$$=\sum_{k_1,k_2=0,\ ...,N-1}\mathrm{P}\left(\xi=\{m_1-k_1,m_2-k_2\}_{N,N}\right)\frac{1}{N^2}=$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{k_1,k_2=0,\ ...,\ N-1}\mathrm{P}\left(\xi=\{m_1-k_1,m_2-k_2\}_{N,N}\right)=$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{n_1,\ n_2=0,\ ...,\ N-1}\mathrm{P}\left(\xi=(n_1,n_2)\right)=\frac{1}{N^2}1=\frac{1}{N^2}.$$

Таким образом, $\{\xi+\eta\}_{N,N}$ равномерно распределена и имеет максимальную энтропию, равную $2\log_2 N$, среди всех случайных величин, распределенных на множестве $\{0,1, ..., N-1\}^2$. Что и требовалось доказать.

3. Абсолютно непрерывный случай

Теорема 2.

Пусть произвольная двумерная случайная величина ξ и равномерно распределенная на квадрате $[0;1]^2$ случайная величина η независимы.

Тогда случайная величина $\{\xi+\eta\}$ имеет максимальную энтропию среди всех абсолютно непрерывных случайных величин, распределенных на квадрате $[0;1]^2$.

Доказательство.

Дробная часть суммы не изменяется при замене всех слагаемых на их дробные части. Поэтому без ограничения общности можно считать, что ξ принимает значения на $[0;1]^2$, т. е. $F_\xi(1,1) = 1$, а $F_\xi(0,1) = 0$ и $F_\xi(1,0) = 0$. Воспользуемся формулой свертки для функции распределения и проведем следующие преобразования:

$$F_{\xi+\eta}(x,y)=\int_{R^2}F_\xi(x-t_1,y-t_2)p_\eta(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2=$$

$$=\int_{[0,1]^2}F_\xi(x-t_1,y-t_2)dt_1\,dt_2=\int_{x-1}^{x}\int_{y-1}^{y}F_\xi(u,v)\,du\,dv.$$

Тогда:

$$p_{\xi+\eta}(x,y)=\frac{\partial^2F_{\xi+\eta}(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{\partial(\int_{y-1}^{y}F_\xi(x,v)\,dv-\int_{y-1}^{y}F_\xi(x-1,v)\,dv)}{\partial y}=$$

$$=F_\xi(x,y)-F_\xi(x-1,y)-F_\xi(x,y-1)+F_\xi(x-1,y-1)=$$

$$=\mathrm{P}(\xi\in(x-1,y-1]\times(x,y]).$$

Учитывая тот факт, что ξ принимает значения исключительно на $[0;1]^2$, получаем представление

$$p_{\xi+\eta}(x,y)=\begin{cases} 0, & (x,y)\in R^2\backslash[0,2]^2;\\ F_\xi(x,y), & (x,y)\in[0,1]^2;\\ F_\xi(1,y)-F_\xi(x-1,y), & x\in(1,2], y\in[0,1];\\ F_\xi(x,1)-F_\xi(x,y-1), & x\in[0,1], y\in(1,2];\\ F_\xi(1,1)-F_\xi(1,y-1)- & \\ -F_\xi(x-1,1)+F_\xi(x-1,y-1), & (x,y)\in(1,2]^2. \end{cases}$$

Следовательно, дробная часть плотности свертки может быть записана как

$$\{p_{\xi+\eta}(x,y)\}=\begin{cases} 0, & (x,y)\in R^2\backslash[0,1]^2;\\ p_{\xi+\eta}(x,y)+p_{\xi+\eta}(x+1,y)+ & \\ +p_{\xi+\eta}(x,y+1)+p_{\xi+\eta}(x+1,y+1), & (x,y)\in[0,1]^2. \end{cases}$$

Проведем преобразования для $(x,y)\in[0,1]^2$

$$\{p_{\xi+\eta}(x,y)\}=F_\xi(x,y)+\left(F_\xi(1,y)-F_\xi(x,y)\right)+\left(F_\xi(x,1)-F_\xi(x,y)\right)+\left(F_\xi(1,1)-F_\xi(1,y)-F_\xi(x,1)+F_\xi(x,y)\right)=F_\xi(1,1)=1.$$

Таким образом, $\{\xi+\eta\}$ равномерно распределена и имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределенных на $[0;1]^2$. Что и требовалось доказать.

4. Замечание о наследуемости независимости компонент

Заметим, что рассматриваемые выше случайные величины в силу равномерного распределения имеют независимые компоненты. То есть независимость наследуется дробной частью свертки в следующем смысле.

Теорема 3.

Пусть целочисленная двумерная случайная величина ξ и равномерная на множестве $\{0,1, ..., N-1\}^2$ случайная величина η независимы.

Тогда случайная величина $\{\xi+\eta\}_{N,N}$ имеет независимые компоненты, равномерно распределенные на множестве $\{0,1, ..., N-1\}$.

Теорема 4.

Пусть произвольная двумерная случайная величина ξ и равномерно распределенная на квадрате $[0;1]^2$ случайная величина η независимы.

Тогда случайная величина $\{\xi+\eta\}$ имеет независимые компоненты, равномерно распределенные на отрезке [0;1].

Доказательство.

Нетрудно увидеть, что теорема 4 является прямым следствием теоремы 2, поскольку компоненты равномерной на квадрате $[0;1]^2$ (на множестве $Z_N\times Z_N$) случайной величины независимы и равномерно распределены на отрезке [0;1] (на множестве Z_N).

Заключение

В определениях 1, 2 введены понятия дробной части векторов. В теоремах 1, 2 доказаны информационное свойство и наследуемость равномерности дробной частью свертки в случае равномерности на $Z_N\times Z_N$ (на $[0;1]\times[0;1]$) одного из слагаемых. В теоремах 3, 4 доказано наследование независимости: в двумерном случае наследование дробной частью свертки равномерности слагаемого влечет наследование независимости компонент, которым обладает равномерное слагаемое.

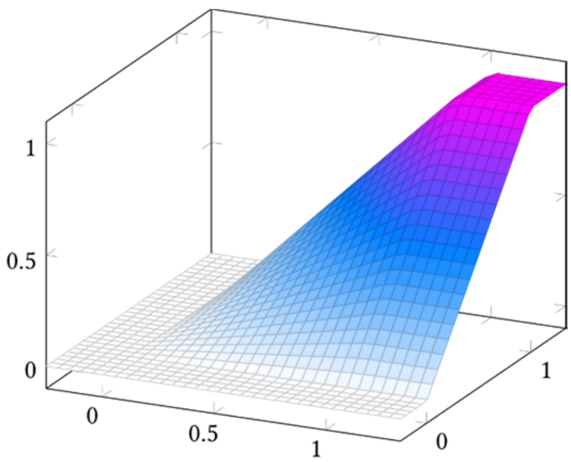
Приложения

Проиллюстрируем часть полученных результатов пояснениями.

	m_2								
2(N-1)	6	1	2	3	4	3	2	1	
	5	2	4	6	8	6	4	2	
	4	3	6	9	12	9	6	3	
N-1	3	4	8	12	16	12	8	4	
	2	3	6	9	12	9	6	3	
	1	2	4	6	8	6	4	2	
0	0	1	2	3	4	3	2	1	
	$1/(N^2)^2$	0	1	2	3	4	5	6	m_1
		0			N-1			2(N-1)	

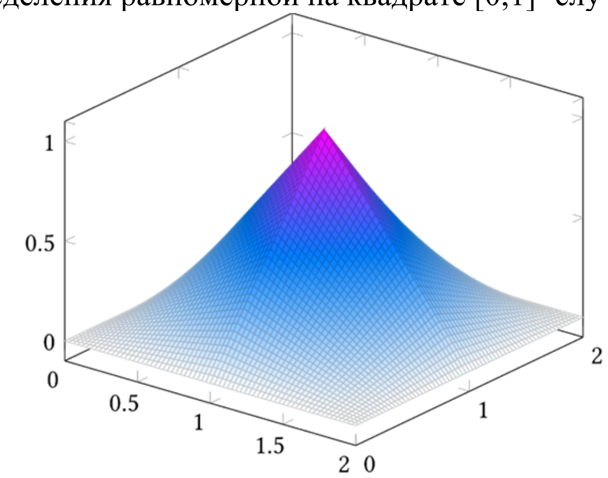
$$P\big(\xi_1+\xi_2=(m1,m2)\big)=\frac{N-|m_1-N|+1}{N^2}\cdot\frac{N-|m_2-N|+1}{N^2}.$$

Распределение свертки равномерных на $Z_N \times Z_N$ случайных величин N = 4.



$$F(x,y)=\min(1,\max(0,x))\cdot\min(1,\max(0,y)).$$

Функция распределения равномерной на квадрате $[0;1]^2$ случайной величины.



$$p(x,y)=\max(0,1-|x-1|)\cdot\max(0,1-|y-1|).$$

Плотность свертки равномерных на квадрате $[0;1]^2$ случайных величин.

Литература

1. *Золотарев В.М.* Идеальные метрики в проблеме аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применение. 1977. Т. 68, вып. 3. – С. 449–465.

2. *Сенатов В.В.* Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 350 с.

3. *Ширяев А.Н.* Вероятность: в 2 кн. – М.: МЦМНО, 2017. – 967 с.

4. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н., Чернышова Д.А.* О максимизации энтропии дробной части сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин в некоторых частных случаях // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. 2023. Т. 38, вып. 2. – С. 32–38.

5. *Кондратенко А.Е., Кондратенко Н.А., Соболев В.Н., Чернышова Д.А.* О сходимости дробной части сверток пуассоновских случайных величин // Теория вероятностей и ее применение. 2023. Т. 68, вып. 4. – С. 846–847.

6. *Chernyshova D.A., Condratenko A.E., Condratenko N.A., Sobolev V.N.* On convergence of the fractional part of convolutions of Poisson random variables // Theory of Probability and its Applications. 2023. Vol. 68 (4). – P. 685.

7. *Зорин А.В., Кондратенко А.Е., Кондратенко Н.А., Мироненко А.В., Соболев В.Н., Чернышова Д.А., Шабанов Д.А.* О сходимости дробной части сверток одинаково распределенных целочисленных случайных величин // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики: материалы XV Международной конференции (г. Махачкала, 13–15 сентября 2023 г.). – Махачкала: Издательство ДГУ, 2023. – С. 77–79.

8. *Lih-Yuan Deng E.* Olusegun George Generation of uniform variates from several nearly uniformly distributed variables // Communications in statistics. Simulation and computation. 1990. Vol. 19 (1). – P. 145–154.

9. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1. Естественные науки. 2022. Т. 37, вып. 1. С. 7–11.

10. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* Обобщение и унификация понятий остатка отделения и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2022. № 1. – С. 45–52.

Поступила в редакцию 3 марта 2024 г.

Принята 17 марта 2024 г.

UDC 517.962.26, 517.982.43, 519.21, 519.72

DOI: 10.21779/2542-0321-2024-39-1-37–43

On the Entropy Maximization in Convolution With Uniform Distribution in the Two-Dimensional Case

N.A. Andriianov, A.E. Condratenko, V.N. Sobolev, Y.A. Yliantsev

Lomonosov Moscow State University; Russia, 119991, Moscow, GSP-1, Leninskiye Gory, 1; nikita.andriianov@math.msu.ru, ae_cond@mech.math.msu.su, sobolev_vn@mail.ru, iaroslav.uliantcev@math.msu.ru

Abstract. The work shows that the fractional part of a convolution of any random variable that takes values in Z^2 with a discrete uniform distributed on $Z_N \times Z_N$ is uniformly distributed on the same set. Further more a similar statement is considered for the case of an arbitrary random variable that takes values in R^2 and absolutely continuous uniform on the square $[0;1]^2$.

Keywords: convolution, fractional part, uniform distribution, maximum entropy, independence.

Received 3 March, 2024

Accepted 17 March, 2024