УДК 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2024-39-1-22–29

Р.И. Кадиев[1, 2], З.И. Шахбанова[1]

Существование и единственность решения задачи Коши для дифференциальных уравнений Ито дробного порядка

[1] Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а;

[2] Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45; kadiev_r@mail.ru

Аннотация. В статье рассмотрена система нелинейных дифференциальных уравнений Ито на полуоси с производной дробного порядка в смысле Жюмари. Доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для этой системы. Основные ограничения на нелинейности уравнения – это обобщенные условия Липшица. Обобщаются некоторые известные результаты для систем нелинейных дифференциальных уравнений и уравнений Ито дробного порядка.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Ито дробного порядка, обобщенные условия Липшица, дробная производная.

Введение

Многие явления в механике жидкости, вязкоупругости, химии, физике, финансах и в других науках можно описать моделями с помощью математических инструментов из теории дробного исчисления. Дифференциальные уравнения дробного порядка применяются во многих современных областях теоретической физики, механики и прикладной математики. Дробное дифференциальное исчисление является основным инструментом для описания систем, которые обладают памятью и нелокальностью. Поэтому дифференциальные модели дробного порядка и стали популярными в приложениях. Некоторые из них можно найти, например, в работах [1–3].

В последние годы стохастические возмущения дифференциальных уравнений привлекают все более пристальное внимание исследователей, так как, они успешно применяются в различных областях науки и техники. Стохастические возмущения дифференциальных уравнений дробного порядка определяют новый класс стохастических уравнений – дифференциальных уравнений Ито дробного порядка.

В литературе дробные случайные процессы делят на дробные по времени (с использованием нескольких временных масштабов) и дробные по шуму (дробные дифференциалы винеровских процессов), а также как дробные и по времени, и по шуму. Насколько нам известно, исследователями рассматривались только модели, или дробные по времени, или дробные по шуму. Мы же рассматриваем дифференциальные уравнения Ито дробного порядка и по времени, и по шуму.

Предварительные сведения. В рамках статьи следующие константы остаются фиксированными:

- $n \in N$ – размерность фазового пространства уравнения, т. е. размер вектора решения уравнения;
- $m \in N$;

- i – индекс, удовлетворяющий условиям $1 \le i \le m$;
- $m_i \in N$;
- j – индекс, удовлетворяющий условиям $1 \le j \le m_i$;
- $0 < \alpha < 1$, $0 < \alpha_i < 1$, $0 < \alpha_{ij} < 1$.

В данной статье используются следующие обозначения:

$-$ $(\Omega, \mathfrak{I}, (\mathfrak{I}_t)_{t \ge 0}, P)$– стохастический базис;

$-$ k^n– линейное пространство n-мерных $\mathfrak{I}_0$ -измеримых случайных величин;

$-$ B_i– независимые стандартные винеровские процессы;

$-$ B– винеровский процесс;

$-$ E – символ математического ожидания;

$-$ $|.|$ – норма в R^n;

$-$ $\|x\|_t = \sup\limits_{0 \le \nu \le t} |x(\nu)|$;

$-$ D^n – линейное пространство n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0,\ +\infty[$ с почти наверно (п. н.) непрерывными траекториями;

$-$ $D^n{}_T$ – линейное нормированное пространство n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов x на $[0,\ T]$ с п. н. непрерывными траекториями с мой$\|x\|_{D^n\ \ T} = \left(\sup\limits_{0 \le \nu \le T} |x(\nu)|^2\right)^{(1/2)}$;

$-$ L_q^n – линейное пространство n-мерных прогрессивно измеримых случайных процессов на $[0,\ +\infty[$ с п. н. локально суммируемыми траекториями со степенью q при $1 \le q < +\infty$ и локально ограниченными в существенном траекториями при $q = +\infty$.

Производные дробного порядка Римана–Лиувилля, Капуто, Жюмари определяются формулами

$$({}^{RL}D_{0t}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds,$$

$$({}^{C}D_{0t}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s) ds,$$

$$({}^{J}D_{0t}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} [f(s) - f(0)] ds$$

соответственно, а интегрирование дробного порядка Римана–Лиувилля задается равенством

$$(I^{\alpha} f)(t) = \int_0^t f(s)(ds)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds,$$

где $\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} s^{\nu-1} e^{-s} ds$ – гамма-функция.

Вопросам обобщения операции дифференцирования и интегрирования с целых порядков на дробные и их приложениям посвящена монография [4]. Производная Жюмари определена в работе [5]. Из результатов, изложенных в монографии [4], также следует:

$$(I^{\alpha}({}^{RL}D^{\alpha}_{0t}f))(t)=f(t)-\frac{f(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1};\ \ (I^{\alpha}({}^{C}D^{\alpha}_{0t}f))(t)=f(t)-f(0);\ \ (I^{\alpha}({}^{J}D^{\alpha}_{0t}f))(t)=f(t)-f(0).$$

В связи с тем, что траектория решений уравнений Ито нигде не дифференцируемая, удобно рассматривать дифференциальные уравнения дробного порядка с производной Жюмари. Пусть процесс описывается следующим дифференциальным уравнением дробного порядка

$$({}^{J}D^{\alpha}_{0t}x)(t)=f(t,\ x(t)\ )\quad (t\geq 0),$$

где $x(t)$ – неизвестный n-мерный вектор, f – n-мерная функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори. Стохастические возмущения этого уравнения определяют уравнения вида

$$({}^{J}D^{\alpha}_{0t}x)(t)=f(t,\ x(t)\ )\ +\ g(t,\ x(t))\dot{B}(t)\quad (t\geq 0), \tag{1}$$

где $x(t)$ – неизвестный n-мерный случайный процесс, $\dot{B}(t)=\dfrac{dB(t)}{dt}$, $f,\ g$ – n-мерные случайные функции, прогрессивно измеримые по первым двум переменным и непрерывные по третьей.

Под решением уравнения (1) мы понимаем случайный процесс x из пространства D^n, п. н. удовлетворяющий интегральному уравнению

$$x(t)-x(0)=(1/\Gamma(\alpha))\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s,\ x(s))ds+(1/\Gamma(\alpha))\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}g(s,\ x(s))dB(s)\ \ (t\geq 0).$$

Отметим, что в предыдущем уравнении первый интеграл понимается в смысле Лебега, а второй – в смысле Ито.

По аналогии с интегрированием дробного порядка Римана–Лиувилля определим интегрирование дробного порядка Ито по винеровскому процессу $B(t)$ следующей формулой

$$\int_0^t f(s)(dB(s))^{\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}f(s)dB(s).$$

Тогда для уравнения (1) удобно использовать следующую запись

$$dx(t)=f(t,\ x(t)\ )(dt)^{\alpha}\ +\ g(t,\ x(t))(dB(t))^{\alpha}\quad (t\geq 0).$$

Отметим, что в [6] также было предложено использовать дробную производную Жюмари, введенную в [5], и классический белый шум для моделирования детерминированной и стохастической частей процессов с несколькими временными масштабами соответственно.

Задача исследования. Изучается вопрос существования и единственности решения дифференциального уравнения Ито дробного порядка вида

$$dx(t)=\sum_{i=1}^{m}\left[f_i(t,\ x(t))(dt)^{\alpha_i}+\sum_{j=1}^{m_i}g_{ij}(t,\ x(t))(dB_j(t))^{\alpha_{ij}}\right]\ (t\geq 0), \tag{2}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$x(0)=x_0\in k^n\,. \tag{3}$$

В уравнении (2) $x(t)$ – неизвестный n-мерный случайный процесс на$[0,\ +\infty]$, $f_i(\omega,\ t,\ x), g_{ij}(\omega,\ t,\ x)$ – n-мерные случайные функции, прогрессивно измеримые по первым двум переменным и непрерывные по третьей переменной и

$f_i(\omega,\ ..,\ x) \in L_{q_i}$, $q_i > 1/\alpha_i$, $g_{ij}(\omega,\ ..,\ x) \in L_{q_{ij}}$, $q_{ij} > 1/\sqrt{2\alpha_{ij}}$.

Задача (2), (3) называется задачей Коши для дифференциального уравнения Ито дробного порядка. Под решением задачи (2), (3) мы понимаем случайный процесс x из пространства D^n, п. н. удовлетворяющий интегральному уравнению

$$x(t) - x_0 = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s,\ x(s))ds + \sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})}\int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1} g_{ij}(s,\ x(s))dB_j(s)\right]\ (t \ge 0). \quad (4)$$

В уравнении (4) первый интеграл является интегралом Лебега, а второй – интегралом Ито.

Определение. Если существуют измеримые функции $\Psi_i(t)$, $\Psi_{ij}(t)$ $t \in [0,\ T]$, такие, что функции $\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1}\Psi_i(s)ds$, $\int_0^t (T-s)^{2(\alpha_{ij}-1)}(\Psi_{ij}(s))^2 ds$ непрерывны и не убывают на отрезке $[0,\ T]$, а также для любых $x, y \in R^n$ выполняются неравенства

$$\left|f_i(t,\ x) - f_i(t,\ y)\right| \le \Psi_i(t)\left|x-y\right|, \left|g_{ij}(t,\ x) - g_{ij}(t,\ y)\right| \le \Psi_{ij}(t)\left|x-y\right|, t \in [0,\ T], \quad (5)$$

то будем говорить, что функции f_i, g_{ij} удовлетворяют обобщенным условиям Липшица на отрезке $[0,\ T]$.

Основной результат. В этом пункте будет рассмотрен вопрос существования и единственности решения для задачи (2), (3). В известных нам работах для доказательства существования и единственности решения задачи (2), (3) используется условие Липшица с постоянным коэффициентом Липшица [6]–[8]. В работе [9] изучен вопрос существования и единственности решения задачи Коши для стохастических функционально-дифференциальных уравнений целого порядка с использованием понятия «функционального контрактора», являющегося обобщением условия Липщица. Мы будем пользоваться идеями этой статьи.

В предыдущем пункте было отмечено, что задача (2), (3) эквивалентна уравнению (4). В дальнейшем вместо существования и единственности решения уравнения (4) будем изучать вопрос существования и единственности решения более общего уравнения

$$x(t) = \kappa(t) + \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} f_i(s, x(s))ds + \sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})}\int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1} g_{ij}(s, x(s))dB_j(s)\right]\ (t \ge 0), \quad (6)$$

где κ – некоторый случайный процесс из пространства D^n.

Наряду с уравнением (6) рассмотрим уравнение

$$x(t) = \kappa^T(t) +$$
$$\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t (t-s)^{\alpha_i-1} f_i(s,\ x(s))ds + \sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})}\int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij}-1} g_{ij}(s,\ x(s))dB_j(s)\right]\ (t \in [0,\ T]), \quad (7)$$

где $\kappa^T(t)$ – случайный процесс, совпадающий со случайным процессом $\kappa(t)$ на отрезке $[0,\ T]$.

Заметим, что если случайный процесс $x(t)$ $(t \ge 0)$ есть решение уравнения (6), то $x(t)$ $(t \in [0,\ T])$ удовлетворяет уравнению (7). Верно и обратное, т. е. если случайный процесс $x(t)$, $t \in [0,\ T]$ есть решение уравнения (7), то он удовлетворяет уравнению (6) на отрезке $[0,\ T]$.

Следовательно, если уравнение (7) однозначно разрешимо при любом

$T \in [0,\ +\infty]$, то уравнение (6) тоже имеет единственное решение. Поэтому, чтобы установить факт однозначной разрешимости уравнения (6), достаточно рассмотреть вопрос об однозначной разрешимости уравнения (7).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть функции $f_i,\ g_{ij}$ удовлетворяют обобщенным условиям Липшица на отрезке$[0,\ T]$. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобятся две леммы. Сначала докажем их.

Обозначим:

$$G(t) = (m + \sum_{i=1}^{m} m_i) \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} \Psi_i(s) ds \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})} \int_0^t (t-s)^{2(\alpha_{ij}-1)} (\Psi_{ij}(s)^2 ds \right] \qquad (t \in [0,\ T]);$$

$$\mu(t) = (m + \sum_{i=1}^{m} m_i) \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s,\ \kappa(s)) ds \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})} \int_0^t (t-s)^{2(\alpha_{ij}-1)} (g_{ij}(s,\ \kappa(s))^2 ds \right] \qquad (t \in [0,\ T]).$$

Лемма 1. Пусть функции $f_i,\ g_{ij}$ удовлетворяют обобщенным условиям Липшица на отрезке $[0,\ T]$и $G(t) \le \rho < 1,\ \ \mu(t) < K,\ \ t \in [0,\ T]$, где K – некоторое положительное число. Тогда уравнение (7) имеет единственное решение.

Доказательство. Пусть

$$x_0(t) = \kappa^T(t),\ \ t \in [0,\ T],$$

$$x_{n+1}(t) = \kappa^T(t) + \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s,\ x_n(s)) ds + \right. \tag{8}$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})} \int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij} - 1} g_{ij}(s,\ x_n(s)) dB_j(s) \right] (t \in [0,\ T]),\ \ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Отсюда в силу очевидного неравенства $\left(\sum_{i=1}^{l} a_i \right)^2 \le l \sum_{i=1}^{l} a_i^2$ и неравенства

$$E \left| \int_0^t f(\varsigma) dB(\varsigma) \right|^2 \le E \int_0^t f(\varsigma)^2 d\varsigma,$$

где $f(\varsigma)$ – скалярный прогрессивно измеримый случайный процесс на$[0,\ t]$, справедливость которого следует из неравенства (4) монографии [10, с. 65], с учетом неравенств (5) получим

$$\left\| E\left| x_{n+1} - x_n \right|^2 \right\|_t \le \left\| E\left| x_n - x_{n-1} \right|^2 \right\|_t (m + \sum_{i=1}^{m} m_i) \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} \Psi_i(s) ds \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})} \int_0^t (t-s)^{2(\alpha_{ij}-1)} (\Psi_{ij}(s)^2 ds \right] \le \rho \left\| E\left| x_n - x_{n-1} \right|^2 \right\|_t \quad (t \in [0, T]).$$

Из последнего неравенства по индукции имеем

$$\left\| E\left| x_{n+1} - x_n \right|^2 \right\|_t \le \rho^n \left\| E\left| x_1 - x_0 \right|^2 \right\|_t \le \rho^n E\mu(\mathrm{t}) < \rho^{\mathrm{n}} K \quad (t \in [0, T]),$$

так как $\left\| E\left| x_1 - x_0 \right|^2 \right\|_t \le E\mu(\mathrm{t}) < K \quad (t \in [0, T])$.

Так как $0 < \rho < 1$, имеем, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n$ сходится. В силу этого ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (x_{n+1}(t) - x_n(t))$ сходится к случайному процессу $x(t)$ $(t \in [0, T])$, принадлежащему пополнению нормированного пространства $D^n{}_T$. Тогда и последовательность $x_n(t)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ сходится к случайному процессу $x(t)$ $(t \in [0, T])$. Переходя к пределу в равенстве (8) при $n \to \infty$ и учитывая ранее сделанные предположения, получим

$$x(t) = \kappa^T(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s, x(s)) ds + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})} \int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij} - 1} g_{ij}(s, x(s)) dB_j(s) \right] \quad (t \in [0, T])$$

с вероятностью единица. В силу предыдущего равенства получим, что уравнение (7) имеет решение.

Докажем единственность решения. Допустим противное, что уравнение (7) имеет два различных решения – $x_1(t), x_2(t)$. Тогда очевидно, что справедливо равенство

$$x_2(t) - x_1(t) = \sum_{i=1}^{m} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)} \int_0^t (t-s)^{\alpha_i - 1} (f_i(s, x_2(s)) - f_i(s, x_1(s))) ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})} \int_0^t (t-s)^{\alpha_{ij} - 1} (g_{ij}(s, x_2(s)) - g_{ij}(s, x_2(s))) dB_j(s) \right] \quad (t \in [0, T]).$$

Отсюда, учитывая неравенства (5), получим

$$\left\| E\left| x_2 - x_1 \right|^2 \right\|_t \le G(t) \left\| E\left| x_2 - x_1 \right|^2 \right\|_t \le \rho E \left\| E\left| x_2 - x_1 \right|^2 \right\|_t \quad (t \in [0, T]).$$

Так как $0 < \rho < 1$, то $\left\| E\left| x_2 - x_1 \right|^2 \right\|_t = 0$ для всех $t \in [0, T]$. Из этого следует, что $x_2(t) - x_1(t) = 0$ п. н. при $t \in [0, T]$. Следовательно, $x_2(t) = x_1(t)$ $(t \in [0, T]$ п. н. Это противоречит нашему допущению, поэтому уравнение (7) однозначно разрешимо.

Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть функции f_i, g_{ij} удовлетворяют обобщенным условиям Липшица на отрезке $[0, T]$ и $G(t) \le \rho < 1$ $(t \in [0, T]$. Тогда уравнение (7) однозначно разрешимо.

Доказательство. Пусть $t_\nu = \inf\{t : t \in [0,\ T],\ \mu(t) \geq \nu\}$, где $\nu \in N$. Тогда $t_\nu \to T$ п. н. при $\nu \to \infty$ ввиду того, что функция $\mu(t)$ непрерывна на отрезке $[0,\ T]$, т. е. ограничена на отрезке $[0,\ T]$.

Рассмотрим следующую последовательность уравнений

$$x_\nu(t) = x_{\nu-1}(t) + \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{\Gamma(\alpha_i)}\int_0^t J_\nu(s)(t-s)^{\alpha_i - 1} f_i(s,\ x_\nu(s))ds + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{m_i}\frac{1}{\Gamma(\alpha_{ij})}\int_0^t J_\nu(s)(t-s)^{\alpha_{ij}-1} g_{ij}(s,\ x_\nu(s))dB_j(s)\right] \quad (t \in [0,\ T]), \nu = 0,\ 1,\ 2,\ ... \tag{9}$$

В последовательности уравнений (9) $x_0(t) = \kappa^T(t)$, $J_\nu(s)$ – характеристическая функция отрезка $[t_{\nu-1},\ t_\nu]$, $t_0 = 0$ (J_ν – прогрессивно измеримый случайный процесс на отрезке $[0,\ T]$). Решение ν-го уравнения (9) удовлетворяет также уравнению (7) на отрезке $[0,\ t_\nu]$. Верно и обратное, т. е. решение уравнения (7) удовлетворяет ν-му уравнению (9) на отрезке $[0,\ t_\nu]$. Заметим, что при любом $\nu \in N$ для уравнения (9) выполняются условия леммы 1. В силу того, что $t_\nu \to T$ п. н. при $\nu \to \infty$, получим, что уравнение (7) имеет единственное решение.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $t_\nu = \inf\{t : t \in [0,\ T],\ G(t) \geq \nu/2\}$, где $\nu \in N$. Тогда очевидно, что $t_\nu \to T$ при $\nu \to \infty$ в силу того, что функция непрерывна на отрезке $[0,\ T]$, т. е. ограничена на отрезке $[0,\ T]$.

Рассмотрим уравнение (9), где $x_0(t) = \kappa^T(t)$, $J_\nu(s)$ – характеристическая функция отрезка $[t_{\nu-1},\ t_\nu]$, $t_0 = 0$. Благодаря определению t_ν, $\nu \in T$ нетрудно убедиться, что при любом $\nu \in N$ для уравнений (9) выполняются условия леммы 2. Поскольку последовательность $x_\nu(t)$ ($\nu = 0,\ 1,\ 2,\ ...$) решений уравнений (9) стремится к единственному решению уравнения (7) при $\nu \to \infty$, то уравнение (7) имеет единственное решение.

Теорема доказана.

В силу теоремы справедливы следующие следствия.

Следствие 1. Пусть при любом $T \in [0,\ +\infty[$ функции f_i, g_{ij} удовлетворяют обобщенным условиям Липщица на отрезке $[0,\ T]$. Тогда уравнение (6) имеет единственное решение.

Следствие 2. Пусть при любом $T \in [0,\ +\infty[$ функции f_i, g_{ij} удовлетворяют обобщенным условиям Липщица на отрезке $[0,\ T]$. Тогда задача (2), (3) имеет единственное решение.

Литература

1. *Abouagwa M., Liu J., Li J.* Carathreodory approximations and stability of solutions to non-Lipschitz stochastic fractional differential equations of Ito-Doob type // Applied Mathematics and Computation. 2018. no. 329. – Pp. 143–153.

2. *Ding X.-L., Nieto J.J.* Analytical solutions for multi-time scale fractional stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and their applications // Entropy.

2018. Vol. 20, no. 63. – Pp. 1–15.

3. *Pedjeu J.-C., Ladde G.S.* Stochastic fractional differential equations: Modeling, method and analysis // Chaos, Solitons & Fractals. 2012. Vol. 45. – Pp. 279–293.

4. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

5. *Jumarie G.* Modified Riemann–Liouville derivative and fractional Taylor series of nondifferentiable functions further results // Computational Mathematics and Applications. 2006. Vol. 51, no. 9–10. – Pp. 1367–1376.

6. *Pedjeu J.-C., Ladde G.S.* Stochastic fractional differential equations: Modeling, method and analysis // Chaos, Solitons & Fractals. 2012. Vol. 45. – Pp. 279–293.

7. *Поносов А.В.* Существование и единственность решений стохастических дробных дифференциальных уравнений в нескольких временных шкалах // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 141. – С. 51–59.

8. *Guang-an Zoua, Bo Wang*. On the study of stochastic fractional-order differential equation systems // School of Mathematics and Statistics, Henan University, Kaifeng 475004. Preprint submitted to XXX. 2016. November 24.

9. *Кадиев Р.И.* Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Изв. вузов. Математика. 1995. № 10. – С. 35–40.

10. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986.

Поступила в редакцию 23 января 2024 г.
Принята 9 февраля 2024 г.

UDC 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2024-39-1-22–29

The Existence and Uniqueness of the Cauchy Problem Solution for Differential Equations of the Ito Fractional Order

R.I. Kadiyev[1, 2], Z.I. Shakhbanova[1]

[1] Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;
[2] Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45; kadiev_r@mail.ru

Abstract. The article considers a new class of systems of nonlinear differential equations of Ito fractional order on the semiaxis with the fractional derivative described in Jumari's approach. It has been proved the theorem of existence and uniqueness of the Cauchy problem solution for the differential equations. The main limitations on the nonlinearity of the equation are generalized as Lipschitz conditions. The results of the article summarize some well-known results for systems of nonlinear differential equations and equations of fractional order.

Keywords: Ito differential equation of fractional order, generalized Lipschitz conditions, Koput fractional derivative.

Received 23 January, 2024
Accepted 9 February, 2024