МАТЕМАТИКА

УДК 512.531.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2024-39-1-7–13

Д.В. Соломатин

Свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы, допускающие внешнепланарные и обобщённые внешнепланарные графы Кэли

Омский государственный педагогический университет; Россия, 644099, г. Омск, ул. Наб. Тухачевского, 14; denis_2001j@bk.ru, solomatin_dv@omgpu.ru

Аннотация. Ранее автор находил исчерпывающее описание характеристического свойства свободных частично коммутативных нильпотентных полугрупп с планарными графами Кэли в терминах копредставлений полугрупп. Граф называется внешнепланарным, если существует такая его плоская укладка, что каждая вершина графа принадлежит внешней грани. Граф называется обобщённым внешнепланарным, если существует такая его плоская укладка, что каждое ребро графа хотя бы одной из своих вершин принадлежит внешней грани. В настоящей статье приводятся характеристические свойства свободных частично коммутативных нильпотентных полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли, а также проанализированы возможности их обобщения до обобщённых внешнепланарных графов Кэли на языке определяющих соотношений. А именно: доказано необходимое и достаточное условие существования внешнеплоской или обобщённой внешнеплоской укладки графов Кэли полугрупп, обозначенных в заголовке статьи. Подробно рассмотрен случай, когда графы Кэли таких полугрупп оказываются обобщёнными внешнепланарными, но не внешнепланарными.

Ключевые слова: графы Чартрэнда–Харари, графы Седлачека, полугруппы с планарными графами Кэли.

Введение

Изучение свободных частично коммутативных нильпотентных полугрупп имеет важное значение для различных наук, включая математику, информатику и робототехнику. В теории групп, например, такие структуры позволяют определить каноническую форму для каждого элемента группы, что облегчает анализ и работу алгоритмов с этими группами. Кроме того свободные частично коммутативные группы обладают рядом замечательных свойств [1]. Также стоит отметить, что фундаментальные группы преобразований почти всех поверхностей являются подгруппами свободных частично коммутативных групп, многие известные семейства групп встраиваются в свободные частично коммутативные группы. Таким образом, изучение свободных частично коммутативных нильпотентных полугрупп имеет большое значение для развития теории групп и приложений в различных областях [2–3].

1. Основные факты и определения

Прежде чем приступить к описанию свободных частично коммутативных полугрупп, допускающих внешнепланарные графы Кэли, и свободных частично коммутативных полугрупп, допускающих обобщённые внешнепланарные графы Кэли, приведем некоторые определения из [4].

Компонентой связности графа называется максимальное по включению подмножество его вершин, в котором каждые две вершины связаны цепью. Компонентой связности называют также и подграф, порожденный таким множеством вершин. Вершина графа называется *точкой сочленения*, если удаление ее из графа вместе с инцидентными ей ребрами увеличивает число компонент связности. *Блоком* в графе называется максимальное по включению подмножество его вершин, не содержащее точек сочленения. Блоком называется также и подграф, порожденный таким множеством вершин.

Напомним, что деревом называется ациклический связный граф. В дальнейшем нам понадобится понятие графа, представляющего собой одно или несколько «деревьев», «вершинами» которых служат циклы. Здесь и в дальнейшем *«деревом» из простых циклов* называем связный граф, блоками которого являются простые циклы или мосты. В англоязычной литературе такие графы получили название «кактус».

Полугруппа S с нулем 0 называется *нильпотентной* полугруппой, если имеет место равенство $S^n = 0$ для некоторого натурального n (наименьшее n с таким свойством называют *ступенью* нильпотентности полугруппы) [5, с. 37]. Напомним также, что если дан граф Γ с множеством вершин $V\Gamma = \{a_1, \dots, a_t\}$, то можно определить свободную частично коммутативную полугруппу [6] как полугруппу $S(\Gamma)$, заданную множеством $\{a_1, \dots, a_t\}$ образующих элементов и множеством определяющих соотношений вида $a_i \cdot a_j = a_j \cdot a_i$ для тех и только тех a_i и a_j, которые соединены ребром в графе Γ.

Свободной частично коммутативной нильпотентной полугруппой, определяемой графом Γ, мы называем фактор-полугруппу Риса $S(\Gamma)/S^n$. Будем обозначать её через $S_t^n(\Gamma)$. Заметим, что хотя ненулевой элемент этой полугруппы неоднозначно разлагается в произведение образующих, число сомножителей в любом таком разложении одно и то же.

Свойства графов Кэли частично коммутативных полугрупп полезны в решениях задач распараллеливания алгоритмов, когда вершины коммутирующих элементов и только они соответствуют взаимозаменяемым потокам, способным исполняться одновременно. С другой стороны, свойства графов Кэли нильпотентных полугрупп интересны при решении математических задач на электронных цифровых вычислительных машинах численными методами, когда есть шанс появления машинного нуля или машинной бесконечности.

Мотивация и необходимый инструментарий для исследования обобщённой внешнепланарности графов приводятся в [7]. В монографии [8] на более высоком уровне абстракции поднимаются вопросы, отличающиеся от классической теории представлений. Более точно, классическая теория представления использует матрицы для представления групп. Матрицы в свою очередь являются частным случаем представления графов как комбинаторных объектов дискретной математики, а группы являются частным случаем таких абстрактных алгебраических структур как полугруппы.

2. Основной результат

Основным результатом является получение в теореме 1 положительного ответа на вопрос № 7 из [8, с. 20]: верно ли, что полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает внешнепланарный граф Кэли, если и только если Γ – любой граф, а $t = 1$, или $1 \leq n \leq 2$, или $n = 3$ и $t = 2$?

Теорема 1. *Для любого графа коммутативности* Γ *полугруппа* $S_t^n(\Gamma)$ *допускает внешнепланарный граф Кэли, если и только если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $t = 1$;

2) $1 \le n \le 2$;

3) $n = 3$ и $t = 2$.

Следующая теорема в аналогичных терминах содержит характеристическое свойство свободных частично коммутативных нильпотентных полугрупп, допускающих обобщённые внешнепланарные графы Кэли.

Теорема 2. *Полугруппа* $S_t^n(\Gamma)$ *допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих ограничений:*

1) $n = 4$ *и* $t = 2$*, а* Γ *– любой;*

2) $n = 3$ *и* $t \ge 3$*, а связные компоненты графа* Γ *– цепи или изолированные вершины;*

3) Γ *– любой, а* $t = 1$*, или* $1 \le n \le 2$*, или* $n = 3$ *и* $t = 2$.

Доказательство теоремы 1 и теоремы 2 опирается на [9], теорема 1.

Доказательство теорем 1 и 2

В ходе одновременного доказательства обеих теорем проанализируем каждое из условий. Для удобства восприятия приведём условия теоремы 1 из [9] в следующем списке:

5) $n \ge 6$ и $t \ge 3$, а Γ – пустой;

4) $n = 5$ и $t \ge 3$, а связные компоненты в Γ – это паросочетания или изолированные вершины;

3) $n = 4$ и $t \ge 3$, а связные компоненты в Γ – это цепи или изолированные вершины;

2) $n = 3$ и $t \ge 3$, а связные компоненты Γ – это «деревья» из простых циклов (так называемые «кактусы») или изолированные вершины;

1) Γ – любой, а $n \le 2$ и $t \ge 1$, либо $n \ge 1$ и $t \le 2$.

В первую очередь заметим, что бесконечное счётное множество вариантов полугрупп, получающихся при $n \ge 4$, $t \ge 3$, для любого графа коммутативности Γ отсеивается, так как основа графа Кэли форсируемой в этих случаях полугруппы содержит изображенный на рис. 1 подграф, гомеоморфный графу G_1 списка графов Седлачека в обозначениях из [10]. Здесь и в дальнейшем пунктирной линией отмечены простые цепи, соответствующие последовательному умножению на один и тот же образующий достаточное число раз. Следовательно, эти полугруппы не допускают обобщённо внешнепланарных и внешнепланарных графов Кэли. Таким образом, отсеиваются условия 3), 4), 5), и предстоит проанализировать конечное число вариантов счётного бесконечного числа полугрупп из условий 1), 2).

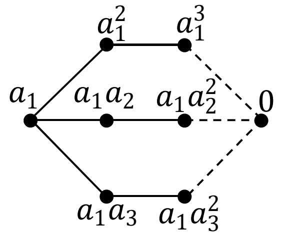

Рис. 1. Подграф основы графа Кэли полугруппы $S_t^n(\Gamma)$ для $n \ge 4$, $t \ge 3$ и любого графа Γ

Случай 1. При выполнении условия 1), когда $t = 1$ или $n = 1$, получим, что вне зависимости от графа коммутативности формируемая тогда моногенная нильполугруппа или тривиальная полугруппа допускает внешнепланарный граф Кэли. Аналогично для веерной полугруппы, получаемой при $n = 2$. Если же $t = 2$ и $n = 3$, то для коммутативного случая эскиз внешнеплоской укладки графа полугруппы приведен ниже на рис. 2, а для некоммутативной полугруппы внешнеплоскую укладку приводим на рис. 3.

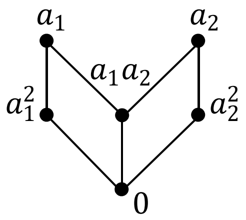

Рис. 2. Внешнеплоская укладка основы графа Кэли коммутативной полугруппы $S_2^3(\Gamma)$ для полного графа Г

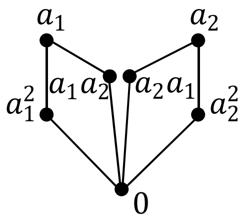

Рис. 3. Внешнеплоская укладка основы графа Кэли некоммутативной полугруппы $S_2^3(\Gamma)$ для пустого графа Г

Так как основа графа Кэли полугруппы $S_t^n(\Gamma)$ для $n = 4$, $t = 2$ и любого графа Г содержит изображенный на рис. 4 подграф, гомеоморфный графу $K_{2,3}$, одному из графов Чартрэнда–Харари, то граф Кэли такой полугруппы не является внешнепланарным. Но при этом можно построить его обобщённую внешнеплоскую укладку, в общем виде указанную на рис. 1 и рис. 6 из [9].

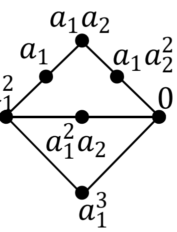

Рис. 4. Подграф основы графа Кэли полугруппы $S_2^4(\Gamma)$ для любого графа Г

Подграф основы графа Кэли полугруппы $S_2^n(\Gamma)$ для $n \geq 5$ при условии, что хотя бы два образующих этой полугруппы коммутируют, изображен на рис. 5. Не теряя общности, коммутирующие образующие обозначены как a_1 и a_2. Данный граф получен подразбиением ребер графа G_{11}, одного из графов Седлачека. Следовательно, он не является обобщённым внешнепланарным.

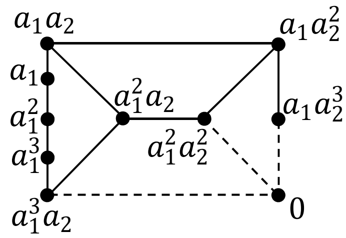

Рис. 5. Подграф основы графа Кэли полугруппы $S_2^n(\Gamma)$ для $n \geq 5$ и непустого графа Г

Подграф основы графа Кэли некоммутативной полугруппы $S_2^n(\Gamma)$ для $n \geq 5$ изображен на рис. 6. Данный граф получен подразбиением ребер графа G_1, следовательно, не является обобщённым внешнепланарным.

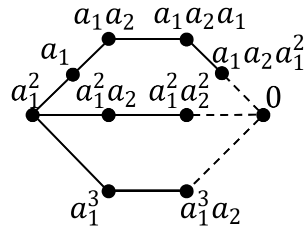

Рис. 6. Подграф основы графа Кэли полугруппы $S_2^n(\Gamma)$ для $n \geq 5$ и пустого графа Г

Случай 2. Увеличение ступени нильпотентности до $n = 3$ приводит к тому, что в основе графа Кэли полугруппы $S_t^n(\Gamma)$ для $t \geq 3$ при наличии хотя бы одного цикла в Г обнаруживается изоморфный изображенному на рис. 7 подграф для цикла $(a_1, a_2, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k)$.

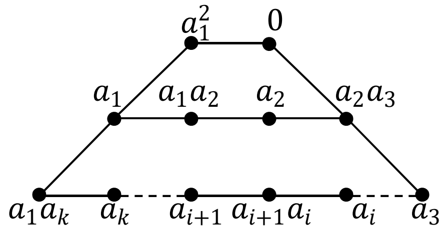

Рис. 7. Подграф основы графа Кэли полугруппы $S_t^3(\Gamma)$ для $t \geq 3$ и графа Г, связными компонентами которого являются «кактусы»

Данный граф получен подразбиением ребер графа G_1, следовательно, он не является обобщённым внешнепланарным.

Наконец, если граф Г ацикличен, то в основе $S_t^3(\Gamma)$ для $t \geq 3$ обнаруживается изображенный на рис. 8 подграф, который изоморфен графу $K_{2,3}$. Следовательно, он не является внешнепланарным. При этом заметим, что для данных ограничений полугруппа $S_t^n(\Gamma)$ допускает обобщенный внешнепланарный граф Кэли, соответствующую укладку которого можно получить из указанной на рис. 6 в [9] путём склеивания с нулём полугруппы вершин, являющихся произведением трёх и более образующих элементов.

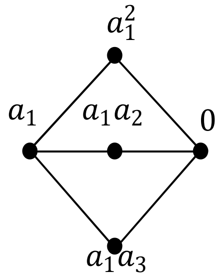

Рис. 8. Подграф основы графа Кэли полугруппы $S_t^3(\Gamma)$ для $t \geq 3$ и графа Г, связными компонентами которого являются цепи или изолированные вершины

Таким образом, перебрав все варианты ограничений из леммы, если оказалось так, что условие теоремы выполнено, приходим к тому, что граф Кэли соответствующей нильпотентной частично коммутативной полугруппы допускает внешнеплоскую укладку (то есть такую укладку, в которой все вершины графа принадлежат единственной грани) или обобщённую внешнеплоскую укладку (то есть такую укладку, в которой каждое ребро графа принадлежит внешней грани хотя бы одним из своих концов), иначе в основе этого графа обнаруживается подграф, гомеоморфный графу K_4, или $K_{2,3}$ (тогда граф не является внешнепланарным), или одному из графов Седлачека (в этом случае граф не является обобщённым внешнепланарным).

Что и требовалось доказать.

Заметим, что третий пункт второй теоремы эквивалентен объединению всех пунктов первой теоремы, а первые два пункта второй теоремы не имеют общих значений с третьим её пунктом. Поэтому из доказательства теорем непосредственно вытекает следующее следствие.

Следствие 1. *Свободная частично коммутативная нильпотентная полугруппа* $S_t^n(\Gamma)$ *допускает обобщённый внешнепланарный граф Кэли, но не допускает внешнепланарный граф Кэли, если и только если выполняется одно из следующих условий:*

1) Г – *любой граф, а* $n = 4$ *и* $t = 2$;

2) *связными компонентами графа* Г *являются цепи или изолированные вершины, а* $n = 3$ *и* $t \geq 3$.

Заключение

В заключение отметим, что полученный результат дает возможность решить некоторые проблемы [11] в виде исследования рангов внешнепланарности и рангов обобщённой внешнепланарности многообразий нильпотентных полугрупп.

Литература

1. *Timoshenko E.I.* Mal'tsev bases for partially commutative nilpotent groups // International Journal of Algebra and Computation. 2022. Vol. 32, Iss. 01. – Pp. 1–9.

2. *Sullivan R.P.* Nilpotents in semigroups of partial transformations. Bulletin of the Australian Mathematical Society. 1997. Vol. 55 (3). – Pp. 453–467.

3. *Cain A.J., Malheiro A., Paulista T.* Commutative nilpotent transformation semigroups. – URL: https://arxiv.org/abs/2310.08481 (дата обращения: 18.12.2023).

4. *Harary F.* Graph Theory. Advanced Book Program Series. – Boulder: Westview Press, 1994. – 284 p.

5. *Шеврин Л.Н.* Полугруппы // Общая алгебра / под ред. Л.А. Скорнякова. –

М.: Наука, 1991. Т. 2, гл. IV. – С. 11–191.

6. *Diekert V., Métivier Y.* Partial commutation and traces // Handbook of formal languages. – Berlin: Springer-Verl., 1997. Vol. 3. – Pp. 457–533.

7. *Sedláček J.* On a generalization of outerplanar graphs // Časopis Pěst. Mat, 1988. Vol. 113, no. 2. – Pp. 213–218. (in Czech.)

8. *Соломатин Д.В.* Теория представлений. – Омск: ОмГПУ, 2015. – 64 с.

9. *Соломатин Д.В.* Свободные частично коммутативные нильпотентные полугруппы с планарными графами Кэли // Вестник Омского университета. 2014. № 4. – С. 28–36.

10. *Мартынов П.О.* Конечные свободные коммутативные моноиды, допускающие обобщенно внешнепланарные графы Кэли // Вестник Омского университета. 2015. № 4. – С. 6–9.

11. *Соломатин Д.В.* Исследования полугрупп с планарными графами Кэли: результаты и проблемы // Прикладная дискретная математика. 2021. № 54. – С. 5–57.

Поступила в редакцию 20 декабря 2023 г.
Принята 13 января 2024 г.

UDC 512.531.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2024-39-1-7–13

Free Partially Commutative Nilpotent Semigroups with Outerplanar and Generalized Outerplanar Cayley Graphs

D.V. Solomatin

Omsk State Pedagogical University; Russia, 644099, Omsk, Tukhachevsky emb., 14; denis_2001j@bk.ru, solomatin_dv@omgpu.ru

Abstract. Previously, the author found an exhaustive description of the characteristic property of free partially commutative nilpotent semigroups with planar Cayley graphs in terms of semigroup co-representations. A graph is called outerplanar if there is such a planar layout twhere each vertex of the graph belongs to an external face. A graph is called a generalized outerplanar if there is such a planar layout where each edge of the graph has at least one of its vertices on an external face. This article presents the characteristic properties of free partially commutative nilpotent semigroups admitting outerplanar Cayley graphs, also analyzing the possibilities of their generalization to generalized outerplanar Cayley graphs, in the language of defining relations. Namely, a necessary and sufficient condition for the existence of an outerplanar or generalized outerplanar arrangement of Cayley graphs of the semigroups indicated in the headline of the article is proved. The case when the Cayley graphs of such semigroups turn out to be generalized outerplanar, but not outerplanar, is given a detaied analysisl.

Keywords: Chartrand–Harari graphs, Sedláček graphs, semigroups with planar Cayley graphs.

Received 20 December, 2023
Accepted 13 January, 2024