

**Численное исследование нелинейных процессов теплопроводности
в горных породах**

¹ Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ariyevamaryam1@gmail.com

² Институт проблем геотермии и возобновляемой энергетики – филиал ОИВТ РАН; Россия, 367030, Махачкала, ул. Имама Шамиля, 39а

Аннотация. В статье представлено численное решение одномерной нестационарной задачи теплопроводности для двух типов горных пород: гранулита и глины. Коэффициент теплопроводности каждого материала описывается степенной зависимостью от температуры, параметры которой получены из регрессионного анализа экспериментальных данных. Рассмотрена задача с граничными условиями теплоизоляции на левой границе и конвективного теплообмена на правой границе. Численная реализация выполнена с использованием неявной конечно-разностной схемы, приведением системы к трёхдиагональному виду и решением методом прогонки. Установлено, что знак показателя степени b определяет характер остывания: для гранулита ($b < 0$) остывание происходит быстрее, для глины ($b > 0$) – медленнее. Достоверность расчётов подтверждена анализом сходимости и проверкой энергетического баланса.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, степенная модель, гранулит, глина, метод прогонки, численное моделирование.

Введение

Эффективная теплопроводность горных пород является одним из ключевых параметров при моделировании тепловых процессов в геотермии, при проектировании термических методов повышения нефтеотдачи, а также при бурении глубоких скважин [1–3]. Экспериментальные исследования показывают, что теплопроводность пород существенно зависит от температуры, причём характер этой зависимости может быть как убывающим (для плотных кристаллических пород), так и возрастающим (для аморфных пород) [4–6]. Поэтому использование моделей с постоянным коэффициентом теплопроводности может приводить к существенным погрешностям [7–9].

Нашей целью было является численное исследование процессов теплопроводности в горных породах, таких, как гранулит и глина, одномерной нелинейной моделью теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, зависящим от температуры по степенному закону, но с разными знаками степенного коэффициента. Параметры модели получены из регрессионного анализа экспериментальных данных, взятых из [6].

1. Постановка задачи

Очень часто в математических моделях теплопроводности, особенно теплопроводности горных пород, коэффициент теплопроводности зависит от температуры, то есть такие процессы описываются нелинейным дифференциальным уравнением теплопроводности. Для расчета коэффициента теплопроводности использовано уравнение [5; 6]:

$$\lambda(T) = \lambda_0 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^b,$$

где T_0 – опорная температура, λ_0 – эффективная теплопроводность при T_0 , b – безразмерный параметр.

Для $T_0 = 300$ К методом наименьших квадратов были получены значения λ_0 и b , представленные в таблице 1.

Таблица 1. Параметры степенной модели для исследуемых материалов

Материал	λ_0 , Вт/(м·К)	b	Характер $\lambda(T)$
Гранулит	2.00	–0.36	убывает с ростом T
Глина	2.00	+0.47	возрастает с ростом T

Исходные экспериментальные данные температурной зависимости эффективной теплопроводности гранулита и глины [6] при атмосферном давлении представлены на рисунке 1.

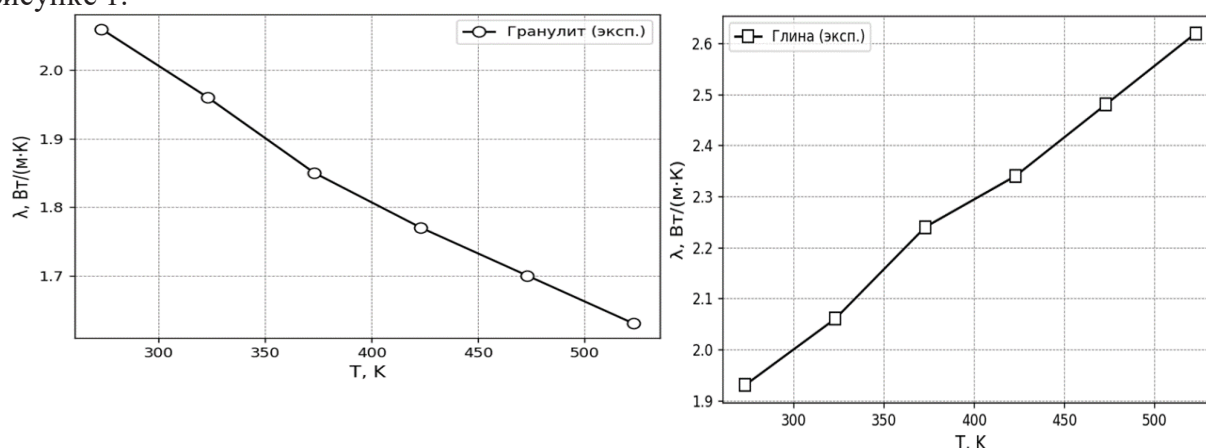


Рис. 1. Температурные зависимости эффективной теплопроводности гранулита (слева) и глины (справа)

Предположим, что исследуемая порода находится в тепловом равновесии с окружающей средой при температуре T_0 , т. е. температура везде одинаковая и равна температуре окружающей среды. С поверхности горной породы идет теплоотдача в окружающую среду с температурой T_0 . Требуется найти распределение температуры в горной породе. Для описания данного процесса рассмотрим следующую начально-краевую задачу.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) - H(T(x, t) - T_0), (x, t) \in (0, R) \times (0, t), \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = 0, -\lambda(T) \frac{\partial T(R, t)}{\partial x} + \beta(T_c - T(R, t)) = 0, \quad (3)$$

где $\lambda(T)$ – коэффициент теплопроводности, H – коэффициент теплообмена, T_c – температура окружающей среды, β – коэффициент теплоотдачи.

Для численного решения задач (1)–(3) воспользуемся методом конечных разностей [10]. Возьмем прямоугольную равномерную сетку:

$$x_m = m \cdot h, m = 0, 1, \dots, N, h = \frac{R}{N},$$

$$t_n = n \cdot \tau, n = 0, 1, \dots, K, \tau = \frac{t_{\max}}{K}.$$

Выберем для определенности следующие входные данные: $R = 1$ м, $N = 50$ ($h = 0.02$ м), $\tau = 0.01$ с, $K = 500$ (общее время 5 с).

2. Неявная разностная схема

Составим неявную разностную схему, аппроксимирующую задачи (1)–(3) с погрешностью порядка $O(\tau^2 + h^2)$, которая, как известно, является безусловно устойчивой:

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \left(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} \right) + \alpha u_m^n, \quad (4)$$

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{1 + 2\alpha\tau} \left(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} \right) + (1 + \alpha\tau) u_m^n, \quad (5)$$

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{1 + 2\alpha\tau} \left(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} \right) + (1 + \alpha\tau) u_m^n, \quad (6)$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c h^2}$.

Для внутренних узлов $m = 1, \dots, N-1$ после перегруппировки соответствующих слагаемых из разностного уравнения (4) получим:

$$u_m^{n+1} = \frac{1}{1 + 2\alpha\tau} \left(u_{m+1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m-1}^{n+1} \right) + (1 + \alpha\tau) u_m^n,$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c h^2}$, $\lambda = 1$, $\rho = 1$, $c = 1$, $h = 0.02$ м, $\tau = 0.01$ с, $K = 500$ (общее время 5 с).

Численное решение системы уравнений (4)–(6) получено методом прогонки.

2. Результаты моделирования

На рисунке 2 представлены профили температуры $T(K)$ вдоль пространственной координаты для гранулит в моменты времени $t = 0, 0.1, 0.2$ и 0.3 с. Начальное распределение равномерное ($T_0 = 273$ K). На правой границе ($X = 1$ м) действует конвективный теплообмен, на левой ($X = 0$) – теплоизоляция. Для гранулит, у которого показатель степени $b < 0$, теплопроводность уменьшается с ростом температуры. При охлаждении правой границы теплопроводность в этой зоне возрастает, что ускоряет отток тепла от левой (тёплой) части. На графике это проявляется в относительно быстром снижении температуры во всём образце, особенно вблизи правой границы.

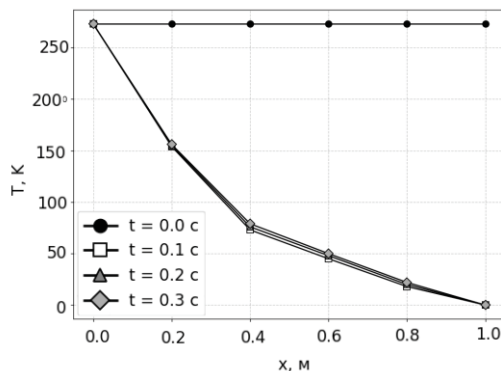


Рис. 2. Профили температуры $T(K)$ вдоль пространственной координаты для гранулит в моменты времени $t = 0, 0.1, 0.2$ и 0.3 с

На рисунке 3 показано распределение температуры для глины в те же моменты времени. В отличие от гранулита, данный материал имеет $b > 0$, т. е. теплопроводность возрастает с температурой. При охлаждении правой границы теплопроводность в холодной зоне снижается, что уменьшает тепловой поток и замедляет процесс остывания. По сравнению с гранулитом перепад температур между левым и правым концами образца к моменту $t = 0,3$ с выражен слабее, что наглядно видно на графике.

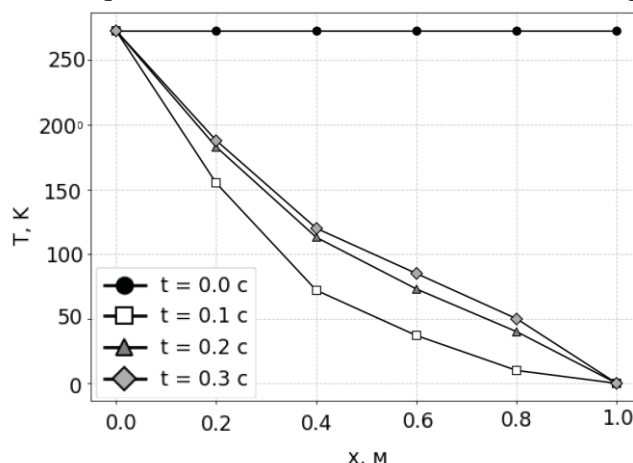


Рис. 3. Профили температуры $T(K)$ вдоль пространственной координаты для глины в моменты времени $t = 0, 0.1, 0.2$ и 0.3 с

Финальное распределение температуры ($t = 5$ с) представлено на таблице 2.

Таблица 2. Финальное распределение температуры через 5 секунд

Материал	$T(0)$, К	$T(R)$, К	ΔT , К	Средняя T , К	Средняя λ , Вт/(м·К)
Гранулит	273.00	250.23	22.77	261.89	2.08
Глина	273.00	251.18	21.82	262.53	1.97

Для гранулита ($b < 0$) теплопроводность уменьшается с ростом температуры. При охлаждении правой границы температура в прилегающей области падает, теплопроводность в этой зоне увеличивается, что приводит к росту теплового потока от левой (тёплой) части стержня. Возникает положительная обратная связь, ускоряющая остывание. Для глины ($b > 0$) картина обратная: охлаждение снижает теплопроводность, что препятствует дальнейшему оттоку тепла, замедляя процесс.

В проведённом нами анализе сходимости решения на последовательности сеток $N = 25, 50, 100, 200$ при переходе от грубой сетки к очень мелкой погрешность снижается с $\sim 5\%$ до $\sim 0,1\%$. Число Куранта для обоих материалов не превышает 0.5, что гарантирует устойчивость. Относительная погрешность сохранения энергии менее 10^{-4} .

Заключение

1. Получено численное решение начально-краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности.

2. Установлено, что знак показателя степени b в модели определяет характер остывания: при $b < 0$ (гранулит) остывание ускоряется, при $b > 0$ (глины) – замедляется.

3. Достоверность результатов подтверждена сходимостью по сетке, энергетическим балансом и соблюдением критерия устойчивости Куранта.

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании термических методов воздействия на нефтяные пласты и в геотермических расчётах.

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 25-29-01110.

Литература

1. Добрынин, В. М. Петрофизика / В. М. Добрынин, Б. Ю. Вендельштейн, Д. А. Кожевников. – М.: Нефть и газ, 2004. – 368 с.
2. Алхасов, А. Б. Освоение геотермальной энергии / А. Б. Алхасов, Д. А. Алхасова, М. Г. Алишаев [и др.]. – М.: Физматлит, 2022. – 320 с.
3. Furlong, K. P. Heat flow, heat generation, and the thermal state of the lithosphere / K. P. Furlong and D. S. Chapman // Annual Review of Earth and Planetary Sciences. 2013. Vol. 41. – Pp. 385–410.
4. Seipold, U. Temperature dependence of thermal transport properties of crystalline rocks – a general law / U. Seipold // Tectonophysics. 1998. Vol. 291. – Pp. 161–171. – DOI: 10.1016/S0040-1951(98)00037-7
5. Аливердиев, А. А. Зависимость эффективной теплопроводности гранитов от давления и температуры / А. А. Аливердиев, Р. М. Алиев, А. А. Амирова [и др.] // ТВТ. 2024. Т. 62, № 2. – С. 196–201. – DOI: 10.31857/S0040364424020051
6. Аливердиев, А. А. Температурно-барические зависимости эффективной теплопроводности горных пород различной упорядоченности / А. А. Аливердиев, Б. А. Григорьев, Р. А. Алиев [и др.] // Вести газовой науки. 2021. № 4 (49). – С. 54–60.
7. Norden, B. Temperature and pressure corrections applied to rock thermal conductivity: impact on subsurface temperature prognosis and heat-flow determination in geothermal exploration / B. Norden, A. Förster, H.-J. Förste & S. Fuchs // Geothermal Energy. 2020. Vol. 8 (1). – Pp. 1–19. – DOI: 10.1186/s40517-020-0157-0
8. Miranda, M. M. A numerical approach to infer terrestrial heat flux from shallow temperature profiles in remote northern regions / M. M. Miranda, M. I. V. Márquez, J. Raymond, C. Dezayes // Geothermics. 2021. Vol. 93. – Pp. 102064. – DOI: 10.1016/j.geothermics.2021.102064
9. Xiong, Z. L. Thermal diffusivity and thermal conductivity of alkali feldspar at 0.8–3 GPa and 300–873 K / Z. L. Xiong, B. H. Zhang, J. H. Ge, S. M., Zhai and X. Z. Guo // Contrib. Mineral. Petrol. 2021. Vol. 176. – P. 42. – DOI: 10.1007/s00410-021-01797-2
10. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

Поступила в редакцию 9 июня 2026 г.

Принята 17 июня 2026 г.

UDC 517.962.8: 536.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2026-41-2-17–22

Numerical Investigation of Nonlinear Heat Conduction Processes in Rock Formations

M. R. Ariyeva¹, A. A. Aliverdiev^{1,2}, V. D. Beybalaev^{1,2}

¹ Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; ariyevamaryam1@gmail.com

² Institute for Geothermal Research and Renewable Energy of the Joint Institute for High Temperatures of the Russian Academy of Sciences; Russia, 367030, Makhachkala, Imam Shamil av., 30a

Abstract. The paper presents a numerical solution of the one-dimensional unsteady heat conduction problem for three rock types: granulite and clay. The thermal conductivity of each material follows power-law temperature dependence, with parameters obtained from regression analysis of experimental data. The problem with boundary conditions of thermal insulation on the left end and convective heat transfer on the right end is considered. An implicit finite-difference scheme is implemented, reducing the system to tridiagonal form solved by the Thomas algorithm. The research has found that the sign of the exponent b determines the cooling behavior: for granulite ($b < 0$) cooling accelerates; for clays ($b > 0$) cooling decelerates. Numerical reliability is confirmed by convergence analysis and energy balance checking.

Keywords: unsteady heat conduction, power-law model, granulite, clay, Thomas algorithm, numerical simulation.

Received 9 June, 2026
Accepted 17 June, 2026