

МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.4:532.5:620.22

DOI: 10.21779/2542-0321-2026-41-2-7–16

М. Д. Рассыхаева, А. В. Копыльцов

Нелинейная эллиптическая модель течения вязкой жидкости в узких межфазных зазорах армированного композита

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения»; Россия, 190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, 67, ГУАП; mitschiru@ya.ru, kopyl2001@mail.ru

Аннотация. Нашей целью было построение физико-математической модели течения вязкой связующей фазы в узких межфазных зазорах армированного композиционного материала. Рассматривался изолированный фрагмент гетерогенной среды, содержащий полимерную матрицу, анизотропное армирующее включение и тонкий зазор переменной толщины. На основе уравнений движения вязкой несжимаемой жидкости и условия неразрывности при малой относительной толщине зазора было получено нелинейное эллиптическое уравнение для давления и скорости, аналогичное уравнению Рейнольдса для смазочного слоя. Нелинейность обусловлена зависимостью проводимости зазора от локальной толщины, от геометрии включения, от возможной подвижности межфазной границы и от эффективной вязкости. Сформулированы граничные условия, условия эллиптичности и безразмерные параметры модели. Получена аналитическая зависимость перепада давления через интегральную характеристику геометрии зазора и приведена ее асимптотическая форма при малой неоднородности толщины зазора. Выполнена тестовая проверка канального приближения для синусоидальной неоднородности зазора и приведена сеточная сходимость потоковой конечно-разностной схемы. Полученные результаты могут быть использованы для построения расчетных моделей межфазного течения в армированных полимерных композитах при технологической нагрузке и пропитке.

Ключевые слова: нелинейное эллиптическое уравнение; вязкая жидкость; узкий зазор; композитный материал; уравнение Рейнольдса; межфазная граница; число Рейнольдса.

Введение

Армированные полимерные композиционные материалы обладают выраженной неоднородностью структуры. На микроуровне их свойства определяются не только механическими характеристиками матрицы и армирующих включений, но и состоянием межфазной области. В этой области формируются тонкие зазоры, прослойки связующей фазы, зоны повышенного сопротивления переносу и локальные границы раздела фаз. При математическом моделировании таких материалов необходимо учитывать, что локальные процессы происходят в областях с внутренними границами и малыми геометрическими параметрами.

В классической механике сплошной среды течение вязкой жидкости описывается уравнениями движения и условием неразрывности [1–4]. Если характерная толщина слоя существенно меньше продольного размера, исходная задача может быть редуцирована к уравнению для поля давления. Такой подход лежит в основе теории смазочно-

го слоя и уравнения Рейнольдса [5–8]. Для композиционного материала указанная редукция требует дополнительного учета геометрии включений, анизотропии их формы, переменности толщины зазора и возможной подвижности межфазной границы.

В известных моделях композитов в основном внимание уделяется эффективным упругим, вязкоупругим или прочностным характеристикам [9–12]. Однако при формировании структуры армированного полимерного композита важным становится локальное течение связующей фазы между включением и матрицей. Именно это течение определяет распределение давления, условия заполнения межфазной области, перенос примесных компонентов и возможная последующая динамика границы. Поэтому для описания таких процессов естественно использовать эллиптические краевые задачи с переменными коэффициентами.

Для дальнейшей постановки существенно, что корректность краевой задачи опирается на стандартную теорию равномерно эллиптических операторов [12; 13], а выбор параметров формы и ориентации включения согласован с подходами к описанию композиционных материалов [14; 15] и ранее предложенными физически релевантными схемами для композитов [16; 17]. Современные работы по тонкослойной гидродинамике также подтверждают актуальность обобщений уравнения Рейнольдса на случаи переменной вязкости, кавитации и устойчивых сеточных аппроксимаций [18; 19].

Нашей задачей было построить нелинейную эллиптическую модель изменения давления и скорости в узком зазоре между анизотропным включением и матрицей композитного материала, сформулировать условия ее корректности, получить аналитическую зависимость перепада давления от скорости, вязкости, числа Рейнольдса и геометрических параметров зазора, а также выполнить тестовую численно-аналитическую проверку модели на канальном приближении и на сеточной задаче с известным решением.

Постановка задачи течения в узком межфазном зазоре

Рассмотрим представительный фрагмент композиционного материала. Пусть Ω – область, состоящая из матрицы Ω_m , армирующего включения Ω_i , межфазного слоя Ω_γ и тонкого зазора $\Omega_h(t)$:

$$\Omega = \Omega_m \cup \Omega_i \cup \Omega_\gamma \cup \Omega_h(t). \quad (1)$$

Граница тонкого зазора параметризуется локальными поверхностными координатами $s = (s_1, s_2)$ и нормальной координатой z :

$$\Omega_h(t) = \{x = x_\Gamma(s, t) + zn(s, t); s \in \Sigma, 0 < z < h(s, t)\}. \quad (2)$$

Здесь x_Γ – точка межфазной поверхности, n – единичная нормаль, $h(s, t)$ – локальная толщина зазора, Σ – параметрическая область на поверхности включения. Величина h зависит от геометрии включения и смещения межфазной границы:

$$h(s, t) = h_0[1 + \varepsilon_g \psi(s; a_1, a_2, a_3, \theta, \chi)] + \eta(s, t), \quad (3)$$

где h_0 – характерная толщина зазора, ψ – безразмерная функция неоднородности, a_1, a_2, a_3 – параметры формы включения, θ – параметр ориентации, χ – параметр асимметрии, η – смещение подвижной границы.

Для практического задания функции неоднородности можно использовать нормированные выражения, в которых средняя добавка к толщине зазора отделена от формы включения. Для типовых геометрий удобно принять следующие параметризации:

$$\psi_{sph}(\zeta) = \kappa_s(\zeta^2 - \langle \zeta^2 \rangle \Sigma), \quad \psi_{el}(s) = \sum_{k=1..3} \kappa_k(\xi_k^2 - \langle \xi_k^2 \rangle \Sigma), \quad \psi_{cyl}(\varphi, z) = \chi \cos(\varphi - \theta) + \kappa_z(z/L_z - 1/2).$$

Здесь ζ – нормированная осевая координата сфероиды, $\xi_k = x_k/a_k$ – безразмерные координаты эллипсоида, φ – угловая координата цилиндра, θ задает ориентацию эксцентриситета, а $\langle \psi \rangle \Sigma$ означает усреднение по межфазной поверхности. Коэффициенты κ_s , κ_k , κ_z и χ выбираются так, чтобы выполнялось условие $|\varepsilon_g \psi + \eta/h_0| < 1$; при сохранении средней толщины дополнительно полагается $\langle \psi \rangle \Sigma = 0$. Такая запись связывает параметры a_1 , a_2 , a_3 , θ и χ с конкретным видом локальной функции $h(s, t)$ и не меняет общую форму уравнения (12).

Дальнейшая постановка выполняется при условиях

$$0 < h_{\min} \leq h(s, t) \leq h_{\max}, \quad \delta = \frac{h_0}{L} \ll 1, \quad (4)$$

где L – характерный продольный размер зазора. Неравенство (4) означает, что зазор не схлопывается и может рассматриваться как тонкая область.

Для учета сохранения формы включения в процессе локального движения вводятся ограничения объема и площади поверхности:

$$V_i = \int_{\Omega_i} dx = \text{const}, \quad S_i = \int_{\partial\Omega_i} dS = \text{const}. \quad (5)$$

Эти условия задают геометрические ограничения на допустимые изменения функции $h(s, t)$ и позволяют исключить физически нереализуемые деформации включения.

Связь глобальных ограничений (5) с локальной функцией $h(s, t)$ задается через нормальное смещение межфазной поверхности. Если $\eta(s, t)$ мало по сравнению с характерным радиусом кривизны включения, то первые вариации объема и площади имеют вид:

$$\delta V_i(t) = \int \Sigma \eta(s, t) dS = 0, \quad \delta S_i(t) = \int \Sigma 2H(s) \eta(s, t) dS = 0, \quad (5a)$$

где $H(s)$ – средняя кривизна поверхности включения. Следовательно, $\eta(s, t)$ не является произвольной локальной добавкой: она должна принадлежать подпространству допустимых смещений, ортогональному к функциям 1 и $2H(s)$ в интегральном смысле.

При разложении $\eta(s, t) = \sum b_k(t) \phi_k(s)$ условия (5a) переходят в алгебраические связи

$$\sum b_k(t) \int \Sigma \phi_k(s) dS = 0 \quad \text{и} \quad \sum b_k(t) \int \Sigma 2H(s) \phi_k(s) dS = 0. \quad (5b)$$

Эти соотношения исключают равномерный сдвиг границы, изменяющий объем включения, и моды, изменяющие площадь поверхности в первом приближении; оставшиеся моды определяют допустимую локальную вариацию $h(s, t)$ в формуле (3).

Вывод нелинейной эллиптической модели для поля давления

В области $\Omega_h(t)$ связующая фаза рассматривается как вязкая несжимаемая жидкость. Исходная система имеет вид

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u \right) = -\nabla p + \mu \Delta u + f, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot u = 0. \quad (7)$$

Здесь u – скорость жидкости, p – давление, ρ – плотность, μ – динамическая вязкость, f – объемная сила. При малом δ нормальная компонента скорости мала по сравнению с тангенциальной, а давление слабо меняется по нормальной координате. В первом приближении для тангенциальной скорости u_s получаем

$$\mu \frac{\partial^2 u_s}{\partial z^2} = \nabla_s p, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (8)$$

где ∇_s – градиент по координатам поверхности. Интегрирование (8) по толщине зазора с учетом скоростей границ U_+ и U_- приводит к выражению для осредненного потока:

$$q_s = -\frac{h^3}{12\mu} \nabla_s p + \frac{h}{2} (U_+ + U_-). \quad (9)$$

Условие неразрывности после интегрирования по нормальной координате принимает форму

$$\nabla_s \cdot q_s + \frac{\partial h}{\partial t} = 0. \quad (10)$$

Подстановка (9) в (10) дает эллиптическую задачу для давления:

$$\nabla_s \cdot \left(\frac{h^3(s,t)}{12\mu} \nabla_s p \right) = \nabla_s \cdot \left(\frac{h(s,t)}{2} (U_+ + U_-) \right) + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (11)$$

Если эффективная вязкость зависит от концентрации, скорости сдвига или градиента давления, то модель становится нелинейной:

$$\nabla_s \cdot \left(\frac{h^3(s,t)}{12\mu(c, |\nabla_s p|)} \nabla_s p \right) = F_h(s, t, p, c). \quad (12)$$

Здесь

$$F_h = \nabla_s \cdot \left(\frac{h}{2} (U_+ + U_-) \right) + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (13)$$

Уравнение (12) является нелинейным эллиптическим с переменным коэффициентом. Оно обобщает классическую модель Рейнольдса за счет учета геометрии анизотропного включения, подвижности границы и возможной зависимости вязкости от состояния среды.

Запись (13) следует понимать как сокращенную: в правой части F_h явно собраны вклады подвижности границ и нестационарности толщины, а зависимость от концентрации c и величины $|\nabla_s p|$ входит в главный коэффициент $A_h = h^3/[12\mu(c, |\nabla_s p|)]$. Если скорости границ или кинетика межфазного слоя зависят от c , то правую часть можно записать в более общем виде $F_h = F_h(h, U^+, U^-, \partial_t h, c)$, что не нарушает условия эллиптичности при $\mu \geq \mu_{\min} > 0$.

Безразмерные переменные и параметры модели

Введем безразмерные переменные:

$$s = Ls^*, \quad h = h_0 H, \quad p = p_0 P, \quad U = U_0 U^*. \quad (14)$$

Масштаб давления выбирается как

$$p_0 = \frac{12\mu_0 U_0 L}{h_0^2}. \quad (15)$$

Тогда уравнение (12) можно представить в виде

$$\nabla_{s^*} \cdot \left(\frac{H^3}{M(c, |\nabla_{s^*} P|)} \nabla_{s^*} P \right) = F^*(s^*, t^*, P, C), \quad (16)$$

где $M = \mu/\mu_0$ – безразмерная вязкость. Основными параметрами являются

$$Re_h = \frac{\rho U_0 h_0}{\mu_0}, \quad \delta = \frac{h_0}{L}, \quad P_p = \frac{\Delta p}{\mu_0 U_0 L / h_0^2}. \quad (17)$$

Число Re_h характеризует относительную роль инерционных сил в зазоре, δ задает тонкослойное приближение, а P_p является безразмерным перепадом давления. Параметры формы и ориентации включения входят в функцию H .

Для строгости постановки требуется выполнение условий равномерной эллиптичности:

$$0 < A_{\min} \leq A_h(s, t, p, c) = \frac{h^3(s, t)}{12\mu(c, |\nabla_s p|)} \leq A_{\max} < \infty. \quad (18)$$

Из (18) следует, что толщина зазора положительна, а вязкость ограничена снизу положительной константой.

Аналитическая зависимость перепада давления

Для одномерного канального приближения вдоль координаты $x \in [0, L]$ поток q можно считать постоянным. Тогда из (9) получаем

$$\frac{dp}{dx} = \frac{12\mu}{h^3(x)} \left(\frac{h(x)}{2} U_T - q \right), \quad (19)$$

где $U_T = U_+ + U_-$. Перепад давления на единичном включении равен

$$\Delta p = p(0) - p(L) = 12\mu \int_0^L \frac{q - \frac{1}{2}h(x)U_T}{h^3(x)} dx. \quad (20)$$

Формула (20) показывает, что перепад давления определяется интегральной проводимостью зазора. Если

$$h(x) = h_0(1 + \varepsilon\psi(x)), \quad |\varepsilon\psi(x)| < 1, \quad (21)$$

то при малой ε используется разложение

$$\frac{1}{h^3(x)} = \frac{1}{h_0^3} (1 - 3\varepsilon\psi(x) + 6\varepsilon^2\psi^2(x) + O(\varepsilon^3)). \quad (22)$$

Подстановка (22) в (20) дает

$$\Delta p = \frac{12\mu q L}{h_0^3} [1 - 3\varepsilon\langle\psi\rangle + 6\varepsilon^2\langle\psi^2\rangle + O(\varepsilon^3)] - \frac{6\mu U_T L}{h_0^2} [1 - 2\varepsilon\langle\psi\rangle + 3\varepsilon^2\langle\psi^2\rangle + O(\varepsilon^3)]. \quad (23)$$

Здесь

$$\langle\psi\rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \psi(x) dx, \quad \langle\psi^2\rangle = \frac{1}{L} \int_0^L \psi^2(x) dx. \quad (24)$$

В общем виде зависимость перепада давления записывается как

$$\Delta p = \frac{\mu U_0 L}{h_0^2} \Phi_p(Re_h, \delta, \chi, \theta, a_1/a_3, a_2/a_3, \Pi_r), \quad (25)$$

где Φ_p – безразмерная функция геометрии зазора и подвижности границы. При малом числе Рейнольдса может быть использовано асимптотическое представление

$$\Phi_p = \Phi_0(\chi, \theta, a_1/a_3, a_2/a_3) + Re_h \Phi_1(\chi, \theta, \delta) + O(Re_h^2). \quad (26)$$

Тестовая верификация канального приближения

В качестве контрольного случая рассмотрим неподвижные стенки в среднем потоке, $U_T = 0$, постоянные μ и q , а также синусоидальную неоднородность $h(x) = h_0[1 + \varepsilon \sin(2\pi x/L)]$, $|\varepsilon| < 1$. Для этой геометрии интеграл в (20) вычисляется точно и совпадает с классическим решением уравнения Рейнольдса для периодического смазочного слоя:

$$\Delta p / (12\mu q L / h_0^3) = (1 + \varepsilon^2/2) / (1 - \varepsilon^2)^{5/2} = 1 + 3\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4). \quad (26a)$$

Сравнение точного выражения (26a) с асимптотикой (23) показывает, что для слабой неоднородности погрешность остается малой:

Таблица 1. Проверка асимптотики перепада давления для $h(x) = h_0[1 + \varepsilon \sin(2\pi x/L)]$

ε	Точное $\Delta p / (12\mu q L / h_0^3)$	$1 + 3\varepsilon^2$	Δ , %
0,10	1,030571	1,030000	0,055
0,20	1,129593	1,120000	0,849
0,30	1,322857	1,270000	3,996

Данные таблицы подтверждают, что разложение (23) корректно воспроизводит известное решение Рейнольдса при малой амплитуде неоднородности; при $\varepsilon = 0,1$ относительное расхождение составляет менее 0,1 %.

Обсуждение корректности и численно-аналитическая проверка

Корректность определяется тремя группами условий: геометрическими, физическими и функциональными. Геометрические условия требуют положительности толщины зазора. Физические условия требуют положительности вязкости. Функциональные условия связаны с ограниченностью коэффициента A_h и согласованностью граничных условий.

Рассмотрим задачу

$$\nabla_s \cdot (A_h \nabla_s p) = F_h \quad \text{в } \Sigma \quad (27)$$

с граничными условиями

$$p = p_{in} \quad \text{на } \Gamma_{in}, \quad p = p_{out} \quad \text{на } \Gamma_{out}, \quad q_s \cdot n_s = 0 \quad \text{на } \Gamma_0. \quad (28)$$

Если A_h удовлетворяет (18), то оператор в (27) является равномерно эллиптическим. Для слабой постановки требуется найти $p \in H^1(\Sigma)$, удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\int_{\Sigma} A_h \nabla_s p \cdot \nabla_s v \, ds = - \int_{\Sigma} F_h v \, ds, \quad v \in H_0^1(\Sigma). \quad (29)$$

В вычислительной форме задача может быть аппроксимирована потоковой конечно-разностной схемой. Для прямоугольной сетки с узлами (i, j) используется дискретизация

$$\frac{A_{i+1/2,j}(p_{i+1,j} - p_{i,j}) - A_{i-1/2,j}(p_{i,j} - p_{i-1,j})}{\Delta x^2} + \frac{A_{i,j+1/2}(p_{i,j+1} - p_{i,j}) - A_{i,j-1/2}(p_{i,j} - p_{i,j-1})}{\Delta y^2} = F_{i,j}. \quad (30)$$

Такая схема сохраняет потоковую структуру уравнения и удобна для учета скачков коэффициентов около межфазной границы. Модельная проверка выполняется путем сравнения решения на сетках h и $h/2$:

$$E_h = \frac{\|p_h - p_{h/2}\|}{2^{r-1}}, \quad (31)$$

где r – порядок сходимости схемы. Если E_h убывает при измельчении сетки, то дискретная постановка согласована с дифференциальной моделью.

Для проверки сеточной сходимости использована задача с известным решением на квадрате $\Sigma = (0,1)^2$.

$$p_{ex}(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad A_h(x, y) = 1 + 0,2 \sin(2\pi x) \sin(2\pi y), \\ F_h = \nabla_s \cdot (A_h \nabla_s p_{ex}), \quad p|_{\partial \Sigma} = 0. \quad (31a)$$

Потоковая схема (30) применялась на равномерных сетках $N \times N$; ошибка измерялась в относительной норме L_2 по внутренним узлам.

Таблица 2. Сеточная сходимость потоковой конечно-разностной схемы для теста (31a)

Сетка $N \times N$	E_h	Оценка порядка r
16×16	$3,201 \cdot 10^{-3}$	—
32×32	$7,990 \cdot 10^{-4}$	2,00
64×64	$1,997 \cdot 10^{-4}$	2,00
128×128	$4,991 \cdot 10^{-5}$	2,00

Полученный порядок $r \approx 2$ согласуется со второй аппроксимацией центральной потоковой разностной схемы и подтверждает корректность дискретной постановки для гладкого коэффициента A_h .

Таблица 3. Роль параметров в эллиптической модели давления

Параметр	Математический смысл	Физическая интерпретация
$h(s, t)$	коэффициент проводимости входит как h^3	локальная толщина межфазного зазора
μ	знаменатель коэффициента A_h	вязкость связующей фазы
Re_h	параметр малости инерционных поправок	режим течения в зазоре
χ, θ	параметры функции ψ	асимметрия и ориентация включения
η	добавка к толщине зазора	смещение межфазной границы

Заключение

Построена физико-математическая модель течения вязкой связующей фазы в узком межфазном зазоре армированного композиционного материала. Показано, что при малой относительной толщине зазора исходная система уравнений вязкой несжимаемой жидкости редуцируется к нелинейной задаче для поля давления.

Полученная модель обобщает уравнение Рейнольдса для смазочного слоя за счет учета переменной толщины зазора, геометрической асимметрии включения, подвижности межфазной границы и возможной зависимости вязкости от состояния среды. Сформулированы условия равномерной эллиптичности и граничные условия, необходимые для корректной постановки задачи.

Для канального приближения получена аналитическая зависимость перепада давления от вязкости, локальной толщины зазора и потока. В безразмерной форме перепад давления выражается через число Рейнольдса, относительную толщину зазора и параметры геометрии включения. Численно-аналитическая проверка выполнена для синусоидального зазора и для двумерной задачи с известным решением; полученные данные демонстрируют согласование асимптотики с точным решением Рейнольдса и второй порядок сеточной сходимости потоковой конечно-разностной схемы.

Конфликт интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Литература

1. Седов, Л. И. Механика сплошной среды: в 2 т. Т. 1 / Л. И. Седов. – Москва: Наука, 1970. – 492 с.
2. Седов, Л. И. Механика сплошной среды: в 2 т. Т. 2 / Л. И. Седов. – Москва: Наука, 1970. – 568 с.
3. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: учебное пособие: в 10 т. Т. VI: Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – Москва: Наука, 1986. – 736 с.
4. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов / Л. Г. Лойцянский. – 6-е изд., перераб. и доп. – Москва: Наука, 1987. – 840 с.
5. Reynolds, O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil / O. Reynolds // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1886. Vol. 177. – Pp. 157–234. – DOI: 10.1098/rstl.1886.0005.
6. Pinkus, O. Theory of hydrodynamic lubrication / O. Pinkus, B. Sternlicht. – New York: McGraw-Hill, 1961. – 465 p.

7. Hamrock, B. J. Fundamentals of fluid film lubrication / B. J. Hamrock, S. R. Schmid, B. O. Jacobson. – 2nd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2004. – 728 p. – DOI: 10.1201/9780203021187.
8. Szeri, A. Z. Fluid film lubrication / A. Z. Szeri. – 2nd ed. – Cambridge: Cambridge University Press, 2011. – 564 p.
9. A review of mixed lubrication modelling and simulation / R. Patel, Z. A. Khan, A. Saeed, V. Bakolas // Tribology in Industry. 2022. Vol. 44, no. 1. – Pp. 150–168. – DOI: 10.24874/ti.1186.09.21.11.
10. Maier, E. Effect of transversely isotropic elasticity on elastohydrodynamic lubrication of point contacts / E. Maier, M. Lengmüller, T. Lohner // Polymers. 2022. Vol. 14, no. 17. – Article 3507. – DOI: 10.3390/polym14173507.
11. Nguyen, L. T. P. Impact elastohydrodynamic lubrication analysis of transversely isotropic materials in point contact / L. T. P. Nguyen, W. L. Li // Journal of Tribology. 2024. Vol. 146, no. 2. – Article 024102. – DOI: 10.1115/1.4063496.
12. Evans, L. C. Partial differential equations / L. C. Evans. – 2nd ed. – Providence: American Mathematical Society, 2010. – 662 p. – (Graduate Studies in Mathematics; vol. 19).
13. Gilbarg, D. Elliptic partial differential equations of second order / D. Gilbarg, N. S. Trudinger. – Reprint of the 1998 ed. – Berlin; Heidelberg: Springer, 2001. XIII. – 517 p. – (Classics in Mathematics). – DOI: 10.1007/978-3-642-96379-7.
14. Chawla, K. K. Composite materials: science and engineering / K. K. Chawla. – 3rd ed. – New York: Springer, 2012. – XXIII. – 542 p. – DOI: 10.1007/978-0-387-74365-3.
15. Barbero, E. J. Introduction to composite materials design / E. J. Barbero. – 3rd ed. – Boca Raton: CRC Press, 2017. – 570 p. – DOI: 10.1201/9781315296494.
16. Рассыхаева, М. Д. Построение физически релевантной модели поведения композиционных материалов / М. Д. Рассыхаева // XXVI Туполевские чтения (школа молодых ученых): сборник трудов конференции, Казань, 9–10 ноября 2023 г. – Казань: КАИ, 2023. – С. 561–564. – ISBN 978-5-605-07490-8.
17. Рассыхаева, М. Д. Математическое моделирование физически релевантного поведения композиционных материалов / М. Д. Рассыхаева, А. В. Чабаненко // Моделирование и ситуационное управление качеством сложных систем: сборник докладов Четвертой Всероссийской научной конференции, Санкт-Петербург, 2023 г. – Санкт-Петербург: ГУАП, 2023. – С. 100–102.
18. On lower-dimensional models of thin film flow. Part C : Derivation of a Reynolds type of equation for fluids with temperature and pressure dependent viscosity / A. Almqvist, E. Burtseva, K. R. Rajagopal, P. Wall // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology. 2023. Vol. 237, no. 3. – Pp. 514–526. – DOI: 10.1177/13506501221135269.
19. Gravenkamp, H. Stabilized finite elements for the solution of the Reynolds equation considering cavitation / H. Gravenkamp, S. Pfeil, R. Codina // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2024. Vol. 418, part A. – Article 116488. – DOI: 10.1016/j.cma.2023.116488.

References

1. Sedov L. I. Mechanics of Continuous Media. Vol. 1. Moscow: Nauka; 1970. 492 p. (In Russ.)
2. Sedov L. I. Mechanics of Continuous Media. Vol. 2. Moscow: Nauka; 1970. 568 p. (In Russ.)
3. Landau L. D., Lifshitz E. M. Fluid Mechanics. 3rd rev. ed. Moscow: Nauka; 1986. 736 p. (In Russ.)

4. Loytsyansky L. G. *Mechanics of Liquids and Gases*. 6th rev. and enl. ed. Moscow: Nauka; 1987. 840 p. (In Russ.)
5. Reynolds O. On the theory of lubrication and its application to Mr. Beauchamp Tower's experiments, including an experimental determination of the viscosity of olive oil. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. 1886; 177:157–234. DOI:10.1098/rstl.1886.0005.
6. Pinkus O., Sternlicht B. *Theory of Hydrodynamic Lubrication*. New York: McGraw-Hill; 1961. 465 p.
7. Hamrock B. J., Schmid S. R., Jacobson B. O. *Fundamentals of Fluid Film Lubrication*. 2nd ed. Boca Raton: CRC Press; 2004. 728 p. DOI: 10.1201/9780203021187.
8. Szeri A. Z. *Fluid Film Lubrication*. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press; 2011. 564 p.
9. Patel R., Khan Z. A., Saeed A., Bakolas V. A review of mixed lubrication modeling and simulation. *Tribology in Industry*. 2022; 44 (1):150–168. DOI:10.24874/ti.1186.09.21.11.
10. Maier E., Lengmüller M., Lohner T. Effect of transversely isotropic elasticity on elastohydrodynamic lubrication of point contacts. *Polymers*. 2022; 14 (17):3507. – DOI: 10.3390/polym14173507.
11. Nguyen L. T. P., Li W. L. Impact elastohydrodynamic lubrication analysis of transversely isotropic materials in point contact. *Journal of Tribology*. 2024; 146 (2):024102. DOI:10.1115/1.4063496.
12. Evans L.C. *Partial Differential Equations*. 2nd ed. Providence: American Mathematical Society; 2010. 662 p. Graduate Studies in Mathematics; vol. 19.
13. Gilbarg D., Trudinger N. S. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Reprint of the 1998 ed. Berlin; Heidelberg: Springer; 2001. XIII, 517 p. Classics in Mathematics. DOI: 10.1007/978-3-642-96379-7.
14. Chawla K. K. *Composite Materials: Science and Engineering*. 3rd ed. New York: Springer; 2012. XXIII, 542 p. DOI: 10.1007/978-0-387-74365-3.
15. Barbero E.J. *Introduction to Composite Materials Design*. 3rd ed. Boca Raton: CRC Press; 2017. 570 p. DOI: 10.1201/9781315296494.
16. Rassykhaeva M. D. Construction of a physically relevant model of composite material behavior. In: XXVI Tupolev Readings (School of Young Scientists): Proceedings of the Conference, Kazan, November 9–10, 2023. Kazan: KAI; 2023. p. 561–564. ISBN 978-5-605-07490-8. (In Russ.)
17. Rassykhaeva M. D., Chabanenko A. V. Mathematical modeling of physically relevant behavior of composite materials. In: Modeling and Situational Quality Management of Complex Systems: Proceedings of the Fourth All-Russian Scientific Conference, Saint Petersburg, 2023. Saint Petersburg: SUAI; 2023. p. 100–102. (In Russ.)
18. Almqvist A., Burtseva E., Rajagopal K. R., Wall P. On lower-dimensional models of thin film flow, Part C: Derivation of a Reynolds type of equation for fluids with temperature and pressure dependent viscosity. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology*. 2023; 237(3):514–526. DOI:10.1177/13506501221135269.
19. Gravenkamp H., Pfeil S., Codina R. Stabilized finite elements for the solution of the Reynolds equation considering cavitation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2024; 418(A):116488. DOI:10.1016/j.cma.2023.116488.

Поступила в редакцию 29 мая 2026 г.

Принята 17 июня 2026 г.

UDC 517.956.4:532.5:620.22

DOI: 10.21779/2542-0321-2026-41-2-7-16

Nonlinear Elliptic Model of Viscous Fluid Flow in Narrow Interphase Gaps of a Reinforced Composite

M. D. Rassykhaeva, A. V. Kopyltsov

Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation; Russia, 190000, Saint-Petersburg, Bolshaya Morskaya st., 67a; mitschiru@ya.ru, kopyl2001@mail.ru

Abstract. The paper develops a physical and mathematical model of viscous binder flow in narrow interphase gaps of a reinforced composite material. A representative fragment of a heterogeneous medium containing a polymer matrix, an anisotropic reinforcing inclusion, and a thin gap of variable thickness is considered. Starting from the equations of motion of an incompressible viscous fluid and the continuity equation, a reduced nonlinear elliptic pressure equation is obtained under the small-gap assumption. The equation generalizes the Reynolds equation for a lubricating layer. The nonlinearity is caused by the dependence of the gap conductance on the local thickness, inclusion geometry, possible mobility of the interphase boundary, and effective viscosity. Boundary conditions, ellipticity assumptions, and dimensionless parameters are formulated. An analytical pressure-drop relation is derived through an integral characteristic of the gap geometry, and its asymptotic form for weak thickness heterogeneity is presented. A test verification for a sinusoidal gap and a mesh-convergence table for the flux finite-difference scheme are also provided. The results may be used for mathematical modeling of interphase flow in reinforced polymer composites.

Keywords: nonlinear elliptic equation; viscous fluid; narrow gap; composite material; Reynolds equation; interphase boundary; Reynolds number.

Received 29 May, 2026

Accepted 17 June, 2026