УДК 517.977.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2025-40-2-47–54

А. Ф. Тараканов, Е. А. Шипилова

О решении линейно-квадратичной задачи оптимального управления с ограничениями

Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н. Е. Жуковского и Ю. А. Гагарина»; Россия, 394064, г. Воронеж, ул. Старых Большевиков, 54а; aft777@mail.ru

Аннотация. В статье приводится аналитическое и численное решение задачи оптимального управления линейной динамической системой с квадратичным функционалом, закреплёнными концами, ограничением на управление и квадратичным фазовым ограничением. Трудности исследования и численного решения таких задач связаны, во-первых, с проблемой сопряжения участков оптимальной траектории, а во-вторых, с программной реализацией численных процедур и необходимостью учёта ограничений на управление и фазовую переменную. Условия оптимальности используются в форме принципа множителей Лагранжа. Получено явное выражение для функционального множителя Лагранжа. Оптимальное управление и оптимальная траектория имеют «составной» вид, обусловленный стыковкой частей траектории, проходящей вне фазового ограничения и залегающей на нем.

Ключевые слова: оптимальное управление, ограничение на управление, фазовое ограничение, принцип множителей Лагранжа.

Введение

Практические задачи оптимального управления зачастую осложнены наличием ограничений на управляющие воздействия и допустимые состояния (фазовые переменные). Например, в математических моделях экономических задач накладываются ограничения на неотрицательность фазовых переменных (производственные мощности, ограниченные ресурсы), при конструировании крылатых ракет решаются задачи огибания препятствий и повторения ландшафта местности.

Принцип максимума в задачах с фазовыми ограничениями получил Р. В. Гамкрелидзе [1]. Однако практическое использование его результата осложняется весьма сильными требованиями регулярности, накладываемыми на некоторые математические объекты, используемые при теоретическом решении задачи. При отсутствии условия регулярности оптимальной траектории подобная задача была решена в [2]. Последующие многочисленные приложения, исследования которых приводили к математическим моделям задач оптимального управления с фазовыми ограничениями, выявили, что требование регулярности не случайно. В работах [3; 4] показано, что принцип максимума из [2] может вырождаться в том смысле, что необходимому условию оптимальности (принципу максимума) удовлетворяет любая допустимая траектория. Например, необходимые условия из [2] вырождаются, если хотя бы один из концов оптимальной траектории фиксирован и лежит на границе фазового ограничения. Дополнительные условия, обеспечивающие невырожденность принципа максимума, сформулированы в [3; 4].

Учёт фазовых ограничений в задачах оптимизации динамических систем часто производится методом штрафных функционалов (метод штрафов), который для таких задач обоснован в [5] и применялся в [6]. Однако практическое использование этого метода существенно осложняется необходимостью выбора способа роста штрафных параметров при решении вспомогательных задач. При этом происходит потеря точности. С другими методами можно ознакомиться в [7–9].

В зарубежных работах (см., например, [10–16]) задачи оптимального управления с фазовыми и смешанными ограничениями изучены в разнообразных постановках, предложены различные техники получения различных форм принципа максимума. В частности, несколько модифицирована техника из [1] сопряжения участков траектории вне и на фазовом ограничении. Обзор различных форм принципов максимума в задачах с фазовыми ограничениями дан в [16].

В статье проводится аналитическое и численное решение задачи оптимального управления линейной динамической системой с закреплёнными концами, квадратичным функционалом, ограничением на управление и квадратичным фазовым ограничением. Поиск оптимального управления и оптимальной траектории имеет алгоритмический характер. Отметим, что в большинстве работ по данной тематике подробные аналитические решения задач с нелинейными фазовыми ограничениями с доведением до численных результатов либо отсутствуют, либо изложены крайне сжато и в трудно проверяемом виде. Эти недостатки связаны с проблемой сопряжения участков оптимальной траектории и с необходимостью учёта ограничений на управление и фазовую переменную. В статье оптимальное управление и соответствующая траектория получаются «составными». Условия скачка из [1] не использовались. Моменты захода оптимальной траектории на границу фазового ограничения и схода с него вычислялись путём решения уравнений для сопряжения концов участков траектории.

1. Математическая модель и аналитическое решение задачи

Рассматривается задача оптимального управления динамической системой с регулярным фазовым ограничением:

$$\dot{x}(t) = -\omega x(t) + ku(t),\ t \in [t_0, T],\ x(t_0) = x_0,\ x(T) = x_T, \qquad (1)$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T} u^2(t)dt \to \min, \qquad (2)$$

$$0 < \omega \le 1,\ 0 < k \le 1,\ 0 \le u(t) \le a,\ X_{\max} > 0,$$

$$g(x(t), t) = x(t) - X_{\max} + b(t - cT)^2 \ge 0,\ b > 0,\ 0 < c \le 1.$$

В результате решения задачи требуется получить выражения для оптимального управления и соответствующей оптимальной траектории, обеспечивающих минимальное значение функционала $J(u)$.

Классом допустимых управлений считаем множество всех кусочно-непрерывных функций $u(t)$ с разрывами первого рода и определённых на заданном отрезке времени $[t_0, T]$. Полагаем, что значение управления $u(t)$ в точке разрыва τ равно пределу справа, то есть $u(\tau) = u(\tau + 0)$.

При отсутствии управления, т. е. $u(t) = 0$, при значениях параметров $t_0 = 0$, $T = 24$, $x_0 = 0.8$, $x_T = 1.5$, $k = 0.9$, $\omega = 0.35$, $X_{\max} = 0.4$, $b = 0.01$, $c = 0.5$, $a = 1$ из

уравнения движения системы имеем экспоненциально убывающую функцию, а также ограничение (рис. 1)

$$x(t) = x_0 e^{-\omega(t-t_0)},\ t_0 = 0.$$

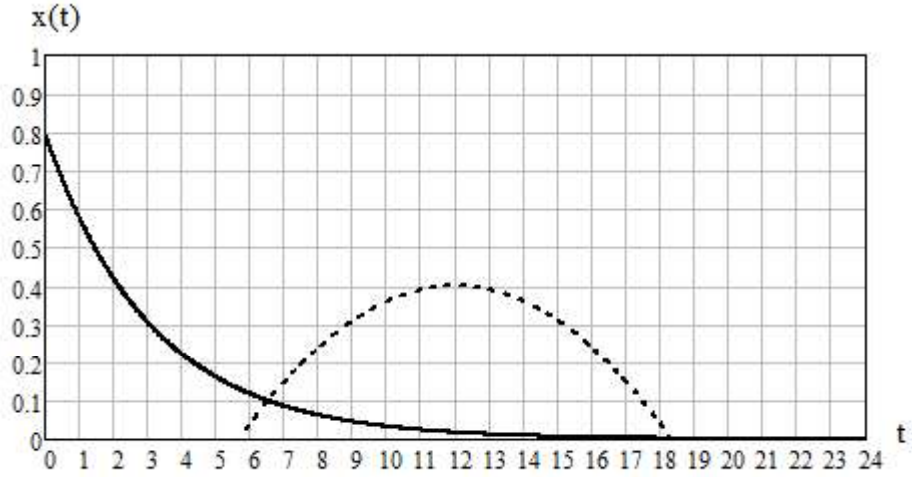


Рис. 1. Графики траектории (сплошная линия) при управлении $u(t) = 0$ и фазового ограничения (пунктирная линия)

Из рисунка 1 видно, что в силу $x(t_0) = x_0 > X_{\max}$ существует такой момент времени τ_1, что при всех $t \in [t_0, \tau_1)$ траектория $x(t)$ рассматриваемой системы проходит вне фазового ограничения. Поэтому в соответствии с требованием $J(u) \to \min$ оптимальным управлением является $u_0^*(t) = 0$, $t \in [t_0, \tau_1)$, а первая часть оптимальной траектории имеет вид: $x_0^*(t) = x_0 e^{-\omega(t-t_0)}$, $t \in [t_0, \tau_1]$. Подставим $x_0^*(t)$ в фазовое ограничение и приравняем к нулю:

$$g(x_0^*(t), t) = x_0 e^{-\omega(t-t_0)} - X_{\max} + b(t - cT)^2 = 0. \qquad (3)$$

Получили уравнение для нахождения момента времени τ_1 захода траектории на границу фазового ограничения: $x_0 e^{-\omega(\tau_1 - t_0)} - X_{\max} + b(\tau_1 - cT)^2 = 0$. Данное уравнение решается численно.

Для дальнейшего решения задачи при $t \geq \tau_1$ составим функции

$$H(u, x, \psi) = (-\omega x(t) + ku)\psi - \frac{1}{2}u^2, \qquad (4)$$

$$L(t, u, x, \psi) = H(u, x, \psi) + \mu(t)(x(t) - X_{\max} + b(t - cT)^2), \qquad (5)$$

где $\psi \in \mathrm{E}^n$ – сопряжённая переменная, $\mu(t)$ – множитель Лагранжа. Из необходимого условия экстремума с учётом ограничения $0 \leq u(t) \leq a$ находим управление, на котором функция (4) достигает максимума:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = k\psi(t) - u^*(t) = 0,\ u^*(t) = \begin{cases} 0, & k\psi(t) < 0, \\ k\psi(t), & 0 \leq k\psi(t) \leq a, \\ a, & k\psi(t) > a. \end{cases}$$

Для сопряжённой переменной с помощью функции (5) получаем дифференциальное уравнение

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial L}{\partial x} = \omega\psi(t) - \mu(t),\ \psi(T) = \pi = const, \qquad (6)$$

причём выполнены условия дополняющей нежёсткости $\mu(t) \geq 0$, $\mu(t)g(x(t),t) = 0$.

Пусть $[\tau_1, \tau_2]$ – отрезок времени, в течение которого траектория $x(t)$ залегает на границе фазового ограничения, то есть $g(x(t),t) = 0$, $\mu(t) > 0$. Из равенства $g(x(t),t) = x(t) - X_{\max} + b(t-cT)^2 = 0$ имеем оптимальную траекторию $x_g^*(t) = X_{\max} - b(t-cT)^2$. Тогда из уравнения $\dot{x}_g^*(t) = -2b(t-cT) = -\omega x_g^*(t) + ku_g^*(t)$ получим оптимальное управление

$$u_g^*(t) = \frac{1}{k}\left(\omega(X_{\max} - b(t-cT)^2) - 2b(t-cT)\right). \qquad (7)$$

Отсюда с учётом структуры оптимального управления $u_g^*(t) = k\psi_g(t)$ следует, что

$$\psi_g(t) = \frac{1}{k^2}\left(\omega(X_{\max} - b(t-cT)^2) - 2b(t-cT)\right),\ t \in [\tau_1, \tau_2].$$

Для нахождения выражения для множителя Лагранжа вычислим производную:

$$\dot{\psi}_g(t) = -\frac{1}{k^2}\left(2\omega b(t-cT) + 2b\right).$$

В то же время из уравнения для сопряженной системы имеем равенство

$$\dot{\psi}_g(t) = \omega\psi_g(t) - \mu(t) = \frac{\omega}{k^2}\left(\omega(X_{\max} - b(t-cT)^2) - 2b(t-cT)\right) - \mu(t).$$

Из последних двух равенств получаем выражение для множителя Лагранжа:

$$\mu(t) = \frac{\omega^2}{k^2}\left(X_{\max} - b(t-cT)^2\right) + \frac{2b}{k^2},\ t \in [\tau_1, \tau_2].$$

При $t > \tau_2$ имеем $\mu(t) \equiv 0$ и из (6) дифференциальное уравнение для сопряжённой переменной; его решение: $\dot{\psi}(t) = \omega\psi(t)$, $t \in [T, \tau_2]$, $\psi(T) = \pi = const$, $\psi(t) = \pi e^{\omega(t-T)}$. Тогда оптимальное управление на $[\tau_2, T]$ имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} 0,\ \pi k e^{\omega(t-T)} < 0, \\ \pi k e^{\omega(t-T)},\ 0 \leq \pi k e^{\omega(t-T)} \leq a, \\ a,\ \pi k e^{\omega(t-T)} > a. \end{cases} \qquad (8)$$

При $u^*(t) = \pi k e^{\omega(t-T)}$ для определения оптимальной траектории $x_u^*(t)$ имеем дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) = -\omega x(t) + \pi k^2 e^{\omega(t-T)}$. Его решение имеет вид:

$$x_u^*(t) = \frac{\pi k^2}{2\omega}\left(e^{\omega(t-T)} - e^{\omega(2\tau_2 - T - t)}\right) + C_u e^{\omega(\tau_2 - t)}. \qquad (9)$$

Константа C_u определяется из равенства $x_g^*(\tau_2) = x_u^*(\tau_2)$:

$$X_{\max} - b(\tau_2 - cT)^2 = \frac{\pi k^2}{2\omega}\left(e^{\omega(\tau_2 - T)} - e^{\omega(2\tau_2 - T - \tau_2)}\right) + C_u e^{\omega(\tau_2 - \tau_2)},$$

$$C_u = X_{\max} - b(\tau_2 - cT)^2.$$

Константа π определяется из равенства $\psi_g(\tau_2) = \psi(\tau_2)$:

$$\pi = \frac{1}{k^2}\left(\omega(X_{\max} - b(\tau_2 - cT)^2) - 2b(\tau_2 - cT)\right)e^{\omega(T-\tau_2)}.$$

Момент времени τ_2 находится численно из равенства $x_u^*(T) = x_T$.

При $u_a^*(t) \equiv a$ имеем уравнение $\dot{x}(t) = -\omega x(t) + a$ и его решение

$$x_a^*(t) = \left(x_u^*(\theta) - \frac{a}{\omega}\right)e^{-\omega(t-\theta)} + \frac{a}{\omega}, \qquad (10)$$

где $\theta \geq \tau_2$ – момент времени, когда при $\pi k e^{\omega(t-T)} > a$ может произойти переключение управления на значение a, $x_u^*(\theta)$ – правый конец траектории $x_u^*(t)$ (т. к. $x_g^*(\tau_2) = x_u^*(\tau_2)$). Момент θ находится численно из уравнения $u_u^*(\theta) = a$.

Итак, с учетом найденных ранее $u_0^*(t) = 0$, $x_0^*(t) = x_0 e^{-\omega(t-t_0)}$, $t \in [t_0, \tau_1)$, а также из (7)–(10) получаем оптимальное управление и соответствующую траекторию:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, \tau_1), \\ u_g^*(t), & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u_u^*(t), & t \in [\tau_2, \theta), \\ a, & t \in [\theta, T], \end{cases} \quad x^*(t) = \begin{cases} x_0^*(t), & t \in [t_0, \tau_1], \\ x_g^*(t), & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ x_u^*(t), & t \in [\tau_2, \theta], \\ x_a^*(t), & t \in [\theta, T]. \end{cases}$$

2. Численный пример

Далее показано численное решение задачи (1)–(2) при следующих значениях параметров: $t_0 = 0$, $T = 24$, $x_0 = 0.8$, $x_T = 1.5$, $k = 0.9$, $\omega = 0.35$, $X_{\max} = 0.4$, $b = 0.01$, $c = 0.5$, $a = 1$. Единицы измерения в данном случае не играют принципиальной роли. Графики оптимального управления и оптимальной траектории, приведенные ниже, являются качественными, они отражают общий характер зависимостей. Поэтому на них обозначены лишь оси координат. Все вычисления и графическая визуализация результатов проводились в математическом пакете Mathcad 15 M045.

Получены значения моментов переключения оптимального управления: $\tau_1 \approx 6.391$, $\tau_2 \approx 15.067$, $\theta \approx 23.5798$. Легко проверить, что $\mu(t) > 0$ при $t \in [\tau_1, \tau_2]$.

Оптимальное управление имеет вид:

$$u^*(t) = \begin{cases} u_0^*(t) = 0, & t \in [t_0, \tau_1), \\ u_g^*(t) = 0.0711t - 0.0039t^2 - 0.1378, & t \in [\tau_1, \tau_2), \\ u_u^*(t) = 0.0003e^{0.35t}, & t \in [\tau_2, \theta), \\ 1, & t \in [\theta, T], \end{cases}$$

Соответствующая оптимальная траектория:

$$x^*(t) = \begin{cases} x_0^*(t) = 0.8e^{-0.35t}, & t \in [t_0, \tau_1], \\ x_g^*(t) = 0.4 - 0.01(t-12)^2, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ x_u^*(t) = 46.9374e^{-0.35t} + 0.0003e^{0.35t}, & t \in [\tau_2, \theta], \\ x_a^*(t) = 2.8571 - 5985.5577e^{-0.35t}, & t \in [\theta, T]. \end{cases}$$

Минимальное значение функционала: $J(u) = 0.5152$.

На рисунках ниже показаны графики оптимального управления и соответствующей оптимальной траектории (рис. 2, 3):

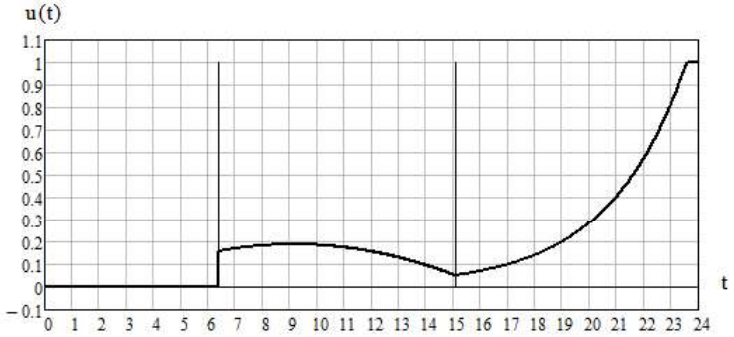


Рис. 2. График оптимального управления. Вертикальные линии обозначают моменты переключения $\tau_1 \approx 6.391$, $\tau_2 \approx 15.067$

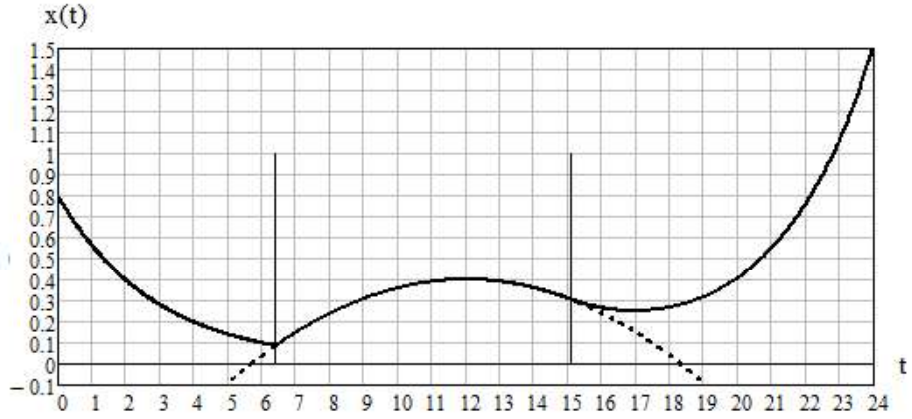


Рис. 3. Графики оптимальной траектории (сплошная линия) и фазового ограничения (пунктирная линия). Вертикальные линии обозначают моменты захода траектории на границу фазового ограничения $\tau_1 \approx 6.391$ и схода с него $\tau_2 \approx 15.067$

На рисунке 3 видно:

– оптимальное управление: 1) имеет кусочно-непрерывный характер (разрыв 1 рода терпит в момент $\tau_1 \approx 6.391$); 2) в момент $\tau_2 \approx 15.067$ недифференцируемо; 3) на промежутке времени $t \in [\theta \approx 23.58, 25]$ постоянно в силу наличия ограничения сверху;

– оптимальная траектория: 1) на всём промежутке времени непрерывна и кусочно дифференцируема (недифференцируема в момент $\tau_1 \approx 6.391$); 2) огибание фазового ограничения происходит точно по его границе; 3) сход траектории с фазового ограничения (в момент $\tau_2 \approx 15.067$) происходит плавно (с точки зрения её дифференцируемости – гладко).

Заключение

В работе представлено аналитическое и численное решение задачи оптимального управления линейной динамической системой с закреплёнными концами, квадратичным функционалом, ограничением на управление и квадратичным фазовым ограничением. Оптимальное управление и соответствующая траектория получаются «составными». Моменты времени захода динамической системы на границу фазового ограни-

чения и схода с него лежат внутри рассматриваемого промежутка времени. Условия скачка из [1] не использовались. Моменты захода оптимальной траектории на границу фазового ограничения и схода с него вычислялись путём решения уравнений для сопряжения концов участков траектории.

Эти результаты могут быть использованы:

– для построения конкретных алгоритмов управления и структур управляющих устройств при исследовании прикладных проблем построения технических, экономических, военных систем оптимального и экстремального управления рассмотренного класса;

– в решении задач оптимального управления процессами индукционного нагрева металлических пластин перед последующей обработкой давлением с учетом фазового ограничения на максимально допустимую температуру на всём протяжении нагрева;

– в решении задач оптимального управления мобильными роботами, управления вращательным движением вала электродвигателя, распределения инвестиций в отрасли экономики, стабилизации движений квадрокоптера, демпфирования колебаний искусственного спутника.

Литература

1. Гамкрелидзе, Р. В. Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах / Р. В. Гамкрелидзе // Изв. АН СССР. Серия математическая. 1960. № 24. – С. 315–356.

2. Дубовицкий, А. Я. Задачи на экстремум при наличии ограничений / А. Я. Дубовицкий, А. А. Милютин // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 3. – С. 395–453.

3. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974 – 480 с.

4. Арутюнов, А. В. О принципе максимума в задаче с фазовыми ограничениями / А. В. Арутюнов, Н. Т. Тынянский // Изв. АН СССР. Серия: Техническая кибернетика. 1984. № 4. – С. 60–68.

5. Федоров, В. В. Принцип максимума для минимаксной задачи управления с фазовыми ограничениями / В. В. Федоров // Вестник МГУ. Серия: Вычислительная математика и кибернетика. 1977. № 4. – С. 36–46.

6. Гусев, М. И. О методе штрафных функций для управляемых систем с фазовыми ограничениями при интегральных ограничениях на управление / М. И. Гусев // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 3. – С. 59–70.

7. Горнов, А. Ю. Алгоритмы решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями / А. Ю. Горнов // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, № 2. – С. 24–30.

8. Асеев, С. М. Задача оптимального управления с ослабленным фазовым ограничением / С. М. Асеев // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 3. – С. 14–29.

9. Тятюшкин, А. И. Оптимизация управления в системах с фазовыми ограничениями / А. И. Тятюшкин, Т. С. Зароднюк // Вычислительные технологии. 2023. Т. 28, № 5. – С. 55–69.

10. Biswas, H. A. A maximum principle for optimal control problems with state and mixed constraints / H. A. Biswas, M. R. de Pinho // ESAIM on Control, Optim. and Calc. of Var. 2015. No. 21. – Pp. 939–951.

11. Bishmbher, D. On CPs with bounded state variables / D. Bishmbher // Int. J. of Eng. Research and Reviews. 2023. Vol. 11, iss. 1. – Pp. 10–19.

12. Boccia, A. Optimal control problems with mixed and pure state constraints / A. Boccia, M. R. de Pinho, R. B. Vinter // SIAM J. on Control and Optim. 2016. Vol. 54, no. 6. – Pp. 3061–3083.

13. Hammoudi, A. An exact penalty method for constrained optimal control problems / A. Hammoudi, M. Benharrat // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Series 2. 2021. Vol. 70, iss. 1. – Pp. 275–293.

14. Loxton, R. C. Optimal control problems with a continuous inequality constraint on the state and the control / R. C. Loxton, K. L. Teo, V. Rehbock, K. F. C. Yiu // Automatica. 2009. Vol. 45. – Pp. 2250–2257.

15. Pytlak, R. Numerical methods for optimal control problems with state constraints / R. Pytlak. – Berlin: Springer, 1999. – 218 p.

16. Hartl, R. F. A Survey of the maximum principles for optimal cControl problems with state constraints / R F. Hartl, S. P. Sethi, R. G. Vickson // SIAM Review. 1995. Vol. 37, no. 2. – Pp. 181–218.

Поступила в редакцию 18 марта 2025 г.
Принята 16 июня 2025 г.

UDC 517.977.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2025-40-2-47–54

On the Solution of a Linear-Quadratic Optimal Control Problem With Constraints

A. F. Tarakanov, E. A. Shipilova

Military Educational and Scientific Centre of the Air Force "N. E. Zhukovsky and Y. A. Gagarin Air Force Academy"; Russia, 394064, Voronezh, Old Bolsheviks st., 54a; aft777@mail.ru

Abstract. An analytical and numerical solution of the optimal controlling of a linear dynamic system with quadratic functional, fixed endpoints, constraint on control and quadratic phase constraint are obtained. The difficulties of studying and numerical solving such problems are related, firstly, to the problem of matching sections of the optimal trajectory, and secondly, to the software implementation of numerical procedures and the need for accounting the constraints on control and on the phase variable. Optimality conditions are used in the form of Lagrange multipliers principle. An explicit expression for the Lagrange functional multiplier is obtained. Optimal control and trajectory have a "composite" appearance due to the joining of parts of the trajectory that pass outside the phase constraint and lie on it.

Keywords: optimal control, control constraint, phase constraint, Lagrange multipliers principle.

Received 18 March, 2025
Accepted 16 June, 2025