

УДК 539.3

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-4-32–42

Т.Р. Ищанов

**Учет деформации поперечного сдвига в тонких оболочках: векторная
аппроксимация в МКЭ на основе четырехугольного элемента дискретизации**

*Волгоградский государственный аграрный университет; Россия, 400002,
Южный федеральный округ, Волгоградская обл., г. Волгоград, просп. Университет-
ский, 26; ishchanov.volgau@ya.ru*

Аннотация. В статье рассмотрен численный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) эллиптического цилиндра под воздействием линейно распределенной нагрузки при различных условиях опирания. Представлены два алгоритма конечно-элементного исследования НДС эллиптического цилиндра: при отсчете угла поворота нормали от ее исходного и деформированного состояний.

Результаты численных экспериментов подчеркивают важность учета деформаций поперечного сдвига и демонстрируют, что вариант с отсчетом угла поворота нормали от ее деформированного состояния обеспечивает высокую точность при ограниченном числе элементов дискретизации. Разработанный алгоритм с векторной аппроксимацией полей перемещений успешно решает проблему учета смещения оболочки как абсолютно твердого тела, предоставляя перспективное решение в области строительной механики и численного моделирования.

Ключевые слова: деформационная теория Тимошенко, эллиптический цилиндр, угол поворота нормали, скалярная аппроксимация, векторная аппроксимация, метод конечных элементов.

В современном мире метод конечных элементов (МКЭ) [1–5] и математическое моделирование деформаций [6–8] играют важную роль в инженерных и научных исследованиях. Однако существующие методы не всегда полностью учитывают сложные деформации, возникающие в материалах под воздействием внешних нагрузок. Статья обосновывает актуальность учета деформаций поперечного сдвига [9–15] и в рамках данной теории предлагает новый вариант отсчета угла поворота нормали при расчетах НДС оболочечных конструкций [16].

Проведенный анализ последних исследований и публикаций выявил ограничения существующих методов, особенно в области учета смещения оболочек как абсолютно твердых тел [12–15]. С учетом этого исследование ставило перед собой задачу разработки конечно-элементного алгоритма, который эффективно решит данную проблему.

Автором предлагается алгоритм конечно-элементного исследования напряженно-деформированного состояния эллиптического цилиндра при отсчете угла наклона нормали от ее деформированного состояния с учетом векторной аппроксимации полей перемещений. Тестовые примеры подтверждают высокую эффективность нового метода, решающего проблему учета смещения оболочки как абсолютно твердого тела.

Полученные результаты предоставляют перспективное решение в области строительной механики и численного моделирования, обеспечивая более точное и реалистичное моделирование деформаций в эллиптических цилиндрах.

Геометрия цилиндрической оболочки. Положение точки срединной поверхности рассматривается в исходном состоянии цилиндра (точка M^0) и в деформированном (точка M). Для обозначения положения точки в произвольном слое оболочки, находящейся на расстоянии ζ от срединной поверхности, будем использовать записи $M^{0\zeta}$ и M^ζ соответственно указанным состояниям оболочки в процессе деформирования. Геометрия эллиптического цилиндра описывается посредством радиус-вектора

$$\vec{R}^0 = x\vec{i} + b \cdot \sin(t)\vec{j} + c \cdot \cos(t)\vec{k}, \quad (1)$$

где x и t – глобальные координаты; b и c – полуоси эллипса.

Дифференцирование (1) по x и t позволит определить векторы локального базиса

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{i}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,t}^0 = b \cdot \cos(t)\vec{j} - c \cdot \sin(t)\vec{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

На основании векторного произведения определим орт нормали к срединной поверхности

$$\vec{a}_n^0 = \frac{\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|} = \frac{c \cdot \sin(t)}{d}\vec{j} + \frac{b \cdot \cos(t)}{d}\vec{k}, \quad (3)$$

где $d = \sqrt{b^2 \cos^2 t + c^2 \sin^2 t}$.

Продифференцировав (2) и (3), найдем производные векторов локального базиса

$$\begin{aligned} \vec{a}_{1,x}^0 &= \vec{R}_{,xx}^0 = 0; \quad \vec{a}_{1,t}^0 = \vec{R}_{,xt}^0 = 0; \quad \vec{a}_{2,x}^0 = \vec{R}_{,tx}^0 = 0; \quad \vec{a}_{n,x}^0 = 0; \\ \vec{a}_{2,t}^0 &= \frac{(c^2 - b^2) \cdot \sin(2t)}{2d} \vec{a}_2^0 + \frac{-cb}{\sqrt{d}} \vec{a}_n^0; \quad \vec{a}_{n,t}^0 = \frac{cb}{d\sqrt{d}} \vec{a}_2^0. \end{aligned} \quad (4)$$

Для удобства изложения материала представим формулы (2), (3) и (4) в матричном виде

$$\{\vec{a}^0\} = [h^0]\{\vec{i}\}; \quad \{\vec{a}_{,x}^0\} = [h_{,x}^0]\{\vec{i}\}; \quad \{\vec{a}_{,t}^0\} = [h_{,t}^0]\{\vec{i}\}, \quad (5)$$

где $\{\vec{a}^0\}^T = \{\vec{a}_1^0 \vec{a}_2^0 \vec{a}_n^0\}$; $\{\vec{a}_{,x}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,x}^0 \vec{a}_{2,x}^0 \vec{a}_{n,x}^0\}$; $\{\vec{a}_{,t}^0\}^T = \{\vec{a}_{1,t}^0 \vec{a}_{2,t}^0 \vec{a}_{n,t}^0\}$;
 $\{\vec{i}\}^T = \{\vec{i}\vec{j}\vec{k}\}$;

На основании (5) запишем формулу

$$\{\vec{i}\} = [h^0]^{-1}\{\vec{a}^0\}. \quad (6)$$

Исходя из (5) и (6), производные векторов локального базиса представим в базисе $\{\vec{a}^0\}$

$$\begin{aligned} \{\vec{a}_{,x}^0\} &= [h_{,x}^0][h^0]^{-1}\{\vec{a}^0\} = [p]\{\vec{a}^0\}; \\ \{\vec{a}_{,t}^0\} &= [h_{,t}^0][h^0]^{-1}\{\vec{a}^0\} = [s]\{\vec{a}^0\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} [p] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad [s] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & s_{23} \\ 0 & s_{32} & 0 \end{bmatrix}; \quad s_{22} = \frac{(c^2 - b^2) \cdot \sin(2t)}{2d}; \\ s_{23} &= \frac{-cb}{\sqrt{d}}; \quad s_{32} = \frac{cb}{d\sqrt{d}}. \end{aligned}$$

Радиус-векторы $\vec{R}$, $\vec{R}^{0\zeta}$, $\vec{R}^\zeta$ однозначно определяют положения точек M , $M^{0\zeta}$, M^ζ :

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \vec{v}; \quad \vec{R}^{0\zeta} = \vec{R}^0 + \zeta \vec{a}_n^0; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{0\zeta} + \vec{V}, \quad (8)$$

где $\vec{V}$ – вектор перемещения точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ .

Вектор перемещения точки M^0 записывается в локальном базисе следующим образом

$$\vec{v} = v^1 \vec{a}_1^0 + v^2 \vec{a}_2^0 + v \vec{a}_n^0. \quad (9)$$

Производные вектора (9) по криволинейным координатам x и t

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,x} &= v_{,x}^1 \vec{a}_1^0 + v_{,x}^2 \vec{a}_2^0 + v_{,x} \vec{a}_n^0; \quad \vec{v}_{,t} = v_{,t}^1 \vec{a}_1^0 + v_{,t}^2 \vec{a}_2^0 + v_{,t} \vec{a}_n^0; \\ \vec{v}_{,xx} &= v_{,xx}^1 \vec{a}_1^0 + v_{,xx}^2 \vec{a}_2^0 + v_{,xx} \vec{a}_n^0; \quad \vec{v}_{,tt} = v_{,tt}^1 \vec{a}_1^0 + v_{,tt}^2 \vec{a}_2^0 + v_{,tt} \vec{a}_n^0; \\ \vec{v}_{,tx} &= v_{,tx}^1 \vec{a}_1^0 + v_{,tx}^2 \vec{a}_2^0 + v_{,tx} \vec{a}_n^0, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} t_t^2 &= v_{,t}^2 + v^2 \cdot s_{22} + v \cdot s_{32}; \quad t_t = v^2 \cdot s_{23} + v_{,t}; \\ t_{tt}^2 &= (s_{23}s_{32} + (s_{22})^2)v^2 + v_{,tt}^2 + 2s_{32}v_{,t} + s_{32}s_{22}v; \\ t_{tt} &= s_{32}s_{23}v - v^2s_{22}s_{23} + 2s_{23}v_{,t}^2 + v_{,tt}; \\ t_{tx}^2 &= v_{,tx}^2 + v_{,x}^2s_{22} + v_{,x}s_{32}; \quad t_{tx} = v_{,x}^2s_{23} + v_{,tx}. \end{aligned}$$

Орт нормали в точке M определяется посредством векторного произведения

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}, \quad (11)$$

где $\vec{a}_1 = \vec{R}_{,x} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,x}$; $\vec{a}_2 = \vec{R}_{,t} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,t}$.

При отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния вектор $\vec{V}$ запишется в следующем виде [9]

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0). \quad (12)$$

Если отсчитывать угол поворота нормали от ее деформированного состояния, вектор перемещения $\vec{V}$ произвольной точки будет иметь вид [16]:

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{v}^n \times \vec{a}_n^0) + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0), \quad (13)$$

где $\vec{\gamma} = -\gamma^2 \vec{a}_1^0 + \gamma^1 \vec{a}_2^0 + \Omega_n \vec{a}_n^0$ – вектор углов поворота нормали [10]; $\vec{v}^n = \vec{a}_n - \vec{a}_n^0$ – вектор разности нормалей в деформированном и исходном состояниях.

Деформации в произвольном слое, отстоящем на расстоянии ζ от срединной поверхности оболочки, определяются соотношениями механики сплошной среды [17]

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = \frac{g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0}{2}; \quad \varepsilon_{\alpha 3}^\zeta = \frac{g_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}^0}{2}, \quad (14)$$

где $g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta = \vec{R}_{,\alpha}^\zeta \cdot \vec{R}_{,\beta}^\zeta$; $g_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\beta^0 = \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta} \cdot \vec{R}_{,\beta}^{0\zeta}$;
 $g_{\alpha 3} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_3 = \vec{R}_{,\alpha}^\zeta \cdot \vec{R}_{,\zeta}^\zeta$; $g_{\alpha 3}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_3^0 = \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta} \cdot \vec{R}_{,\zeta}^{0\zeta}$.

Для конкретного случая деформации (14) описываются зависимостями (15) на основании формул (7)–(13):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\zeta &= \vec{g}_1^0 \vec{V}_{,x}; \quad \varepsilon_{22}^\zeta = \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,t}; \quad 2\varepsilon_{12}^\zeta = \vec{g}_1^0 \vec{V}_{,t} + \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,x}; \\ 2\varepsilon_{13}^\zeta &= \vec{g}_1^0 \vec{V}_{,\zeta} + \vec{g}_3^0 \vec{V}_{,x}; \quad 2\varepsilon_{23}^\zeta = \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,\zeta} + \vec{g}_3^0 \vec{V}_{,t}. \end{aligned} \quad (15)$$

Элемент дискретизации, аппроксимация перемещений. Элементом дискретизации был выбран четырехугольный фрагмент срединной поверхности цилиндрической оболочки с узлами i, j, k, l . Для осуществления операции численного интегрирования фрагмент отображался на квадрат с локальными координатами ξ и η , которые изменялись в пределах $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$.

При скалярном варианте аппроксимации узловыми варьируемыми параметрами были приняты компоненты вектора перемещения и вектора угла поворота нормали в глобальной и локальной системах координат

$$\begin{aligned} \left\{ \tau_y^r \right\}_{1 \times 12}^T &= \{ \tau^i \tau^j \tau^k \tau^l \tau_{,x}^i \tau_{,x}^j \tau_{,x}^k \tau_{,x}^l \tau_{,t}^i \tau_{,t}^j \tau_{,t}^k \tau_{,t}^l \}; \\ \left\{ \tau_y^n \right\}_{1 \times 12}^T &= \{ \tau^i \tau^j \tau^k \tau^l \tau_{,\xi}^i \tau_{,\xi}^j \tau_{,\xi}^k \tau_{,\xi}^l \tau_{,\eta}^i \tau_{,\eta}^j \tau_{,\eta}^k \tau_{,\eta}^l \}; \end{aligned}$$

$$\{\gamma_y^\alpha\}_{1 \times 4}^T = \{\gamma^{\alpha i} \gamma^{\alpha j} \gamma^{\alpha k} \gamma^{\alpha l}\}, \quad (16)$$

где τ – компонента вектора перемещения v^1, v^2 или v .

Векторная аппроксимация в качестве узловых варьируемых параметров предусматривает векторы перемещений узловых точек, их производные и векторы углов поворота нормали в глобальной и локальной системах координат

$$\begin{aligned} \{\vec{v}_y^l\}_{1 \times 12}^T &= \{\vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,\xi}^i \vec{v}_{,\xi}^j \vec{v}_{,\xi}^k \vec{v}_{,\xi}^l \vec{v}_{,\eta}^i \vec{v}_{,\eta}^j \vec{v}_{,\eta}^k \vec{v}_{,\eta}^l\}; \\ \{\vec{v}_y^r\}_{1 \times 12}^T &= \{\vec{v}^i \vec{v}^j \vec{v}^k \vec{v}^l \vec{v}_{,x}^i \vec{v}_{,x}^j \vec{v}_{,x}^k \vec{v}_{,x}^l \vec{v}_{,t}^i \vec{v}_{,t}^j \vec{v}_{,t}^k \vec{v}_{,t}^l\}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\{\vec{\gamma}_y\}_{1 \times 4}^T = \{\gamma^i \gamma^j \gamma^k \gamma^l\}. \quad (18)$$

При использовании традиционной интерполяции компонент вектора перемещения и компонент вектора угла поворота нормали (16) как независимых скалярных величин их аппроксимирующие функции будут иметь вид

$$\tau = \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T \{\tau_y^l\}_{12 \times 1}^T; \quad \gamma^\alpha = \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T \{\gamma_y^\alpha\}_{4 \times 1}^T, \quad (19)$$

где $\{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T$; $\{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T$ – полиномы Эрмита третьей степени и билинейные функции локальных координат.

Из формулы (19) видно, что каждая компонента вектора перемещения внутренней точки конечного элемента (КЭ) аппроксимируется через узловые значения этой же компоненты, а каждая компонента вектора угла поворота нормали аппроксимируется через узловые значения только этой же компоненты и не зависит от узловых значений другой компоненты.

Рассмотрим векторную формулировку алгоритма аппроксимации. Выражение вектора перемещения и вектора угла поворота нормали внутренней точки КЭ в деформированном состоянии через узловые величины (17), (18) будет иметь вид

$$\vec{v} = \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T \{\vec{v}_y^l\}_{12 \times 1}; \quad \vec{\gamma} = \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T \{\vec{\gamma}_y\}_{4 \times 1}. \quad (20)$$

Между узловыми неизвестными (17) устанавливается матричное соотношение

$$\{\vec{v}_y^l\}_{12 \times 1} = [PK]_{12 \times 12} \{\vec{v}_y^r\}_{12 \times 1}. \quad (21)$$

Принимая во внимание (21), перепишем (20) следующим образом

$$\vec{v} = \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T [PK]_{12 \times 12} \{\vec{v}_y^r\}_{12 \times 1}; \quad \vec{\gamma} = \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T \{\vec{\gamma}_y\}_{4 \times 1}. \quad (22)$$

С учетом (9) и (10) набор векторных узловых варьируемых параметров в глобальной системе координат примет вид

$$\{\vec{U}_y^r\}_{16 \times 1} = [\vec{A}]_{16 \times 44} \{z_y\}_{44 \times 1}, \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \{\vec{U}_y^r\}_{16 \times 1}^T &= \left\{ \{\vec{v}_y^r\}_{12 \times 1}^T \{\vec{\gamma}_y\}_{4 \times 1}^T \right\}; \quad \{z_y\}_{44 \times 1}^T = \left\{ \{z_v\}_{36 \times 1}^T, \{z_\gamma\}_{8 \times 1}^T \right\}; \\ \{z_v\}_{36 \times 1}^T &= \{v^{1i} v^{2i} v^i \dots v^l t_1^{1i} t_1^{2i} t_1^i \dots t_1^l t_2^{1i} t_2^{2i} t_2^i \dots t_2^l\}; \end{aligned}$$

$$\{z_\gamma\}_{8 \times 1}^T = \{\gamma^{1i} \gamma^{2i} \gamma^{1j} \gamma^{2j} \gamma^{1k} \gamma^{2k} \gamma^{1l} \gamma^{2l}\}; \quad [\vec{A}] = \begin{bmatrix} [\vec{A}_v]_{12 \times 36} & [\vec{A}_{12}]_{12 \times 8} \\ [\vec{A}_{21}]_{4 \times 36} & [\vec{A}_\gamma]_{4 \times 8} \end{bmatrix};$$

матрицы $\begin{bmatrix} \vec{A}_{12} \\ 12 \times 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \vec{A}_{21} \\ 4 \times 36 \end{bmatrix}$ являются нулевыми, $\begin{bmatrix} \vec{A}_v \\ 12 \times 36 \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \vec{A}_\gamma \\ 4 \times 8 \end{bmatrix}$ – квазидиагональные матрицы, элементами которых являются векторы локальных базисов узлов конечного элемента.

На основании (23) представим (22) в следующем виде

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T [PK]_{12 \times 12} \begin{bmatrix} \vec{A}_v \\ 12 \times 36 \end{bmatrix} \{z_v\}_{36 \times 1} = \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T \begin{bmatrix} \vec{A}_v \\ 12 \times 36 \end{bmatrix} [KP]_{36 \times 36} \{z_v\}_{36 \times 1}; \\ \vec{\gamma} &= \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T \begin{bmatrix} \vec{A}_\gamma \\ 4 \times 8 \end{bmatrix} \{z_\gamma\}_{8 \times 1}. \end{aligned} \quad (24)$$

Выразим векторы базиса узловых точек в локальной системе координат через векторы базиса внутренней точки конечного элемента

$$\{\vec{a}^{o\rho}\} = [n^{o\rho}][n^o]^{-1}\{\vec{a}^o\} = [s^{o\rho}]\{\vec{a}^o\}, \quad (25)$$

где $\{\vec{a}^{o\rho}\} = \{\vec{a}_1^{o\rho} \vec{a}_2^{o\rho} \vec{a}_n^{o\rho}\}$; верхний индекс ρ обозначает узел КЭ: i, j, k, l .

На основании (9) и (25) зависимости (24) примут вид

$$\begin{aligned} v^1 \vec{a}_1^o + v^2 \vec{a}_2^o + v \vec{a}_n^o &= \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T \left(\begin{bmatrix} A_v^1 \\ 12 \times 36 \end{bmatrix} \vec{a}_1^o + \begin{bmatrix} A_v^2 \\ 12 \times 36 \end{bmatrix} \vec{a}_2^o + \begin{bmatrix} A_v \\ 12 \times 36 \end{bmatrix} \vec{a}_n^o \right) \{Q_{vy}\}_{36 \times 1}; \\ \gamma^1 \vec{a}_1^o + \gamma^2 \vec{a}_2^o &= \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T \left(\begin{bmatrix} A_\gamma^1 \\ 4 \times 8 \end{bmatrix} \vec{a}_1^o + \begin{bmatrix} A_\gamma^2 \\ 4 \times 8 \end{bmatrix} \vec{a}_2^o \right) \{W_{\gamma y}\}_{8 \times 1}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\{Q_{vy}\}_{36 \times 1} = [KP]_{36 \times 36} \{z_v\}_{36 \times 1}$; $\{W_{\gamma y}\}_{8 \times 1} = \{z_\gamma\}_{8 \times 1}$.

Приравнявая коэффициенты при векторах $\vec{a}_1^o, \vec{a}_2^o$ и $\vec{a}_n^o$ в левой и правой частях равенств (26), получим интерполяционные зависимости для компонент вектора перемещения и вектора углов поворота нормалей

$$\begin{aligned} v^1 &= \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T [A_v^1] \{Q_{vy}\}; \quad v^2 = \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T [A_v^2] \{Q_{vy}\}; \quad v = \{\psi(\xi, \eta)\}_{1 \times 12}^T [A_v] \{Q_{vy}\}; \\ \gamma^1 &= \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T [A_\gamma^1] \{W_{\gamma y}\}; \quad \gamma^2 = \{\varphi(\xi, \eta)\}_{1 \times 4}^T [A_\gamma^2] \{W_{\gamma y}\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Анализ выражений (27) показывает, что каждая компонента вектора перемещения произвольной точки конечного элемента зависит от узловых значений всех трех компонент и их производных, каждая компонента угла поворота нормали зависит от узловых значений обеих компонент вектора угла поворота нормали [15].

Матрица жесткости и столбец узловых усилий записываются согласно стандартной для МКЭ процедуре в форме метода перемещений [16].

Результаты численных расчетов. Решена тестовая задача по определению НДС эллиптического цилиндра, нагруженного вдоль образующей линейно распределенной нагрузкой интенсивности q . На противоположной стороне цилиндра имеются шарнирные опоры, которые препятствуют вертикальному смещению (рис. 1). Исходные данные: $q = 5 \cdot 10^{-3}$ МПа; $b = 0,1$ м; $c = 0,025$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0,3$; $h = 0,001$ м.

Расчеты с учетом скалярной и векторной аппроксимаций выполнялись в двух вариантах: в первом варианте отсчет угла поворота нормали осуществлялся от ее исходного положения, во втором – от ее деформированного положения.

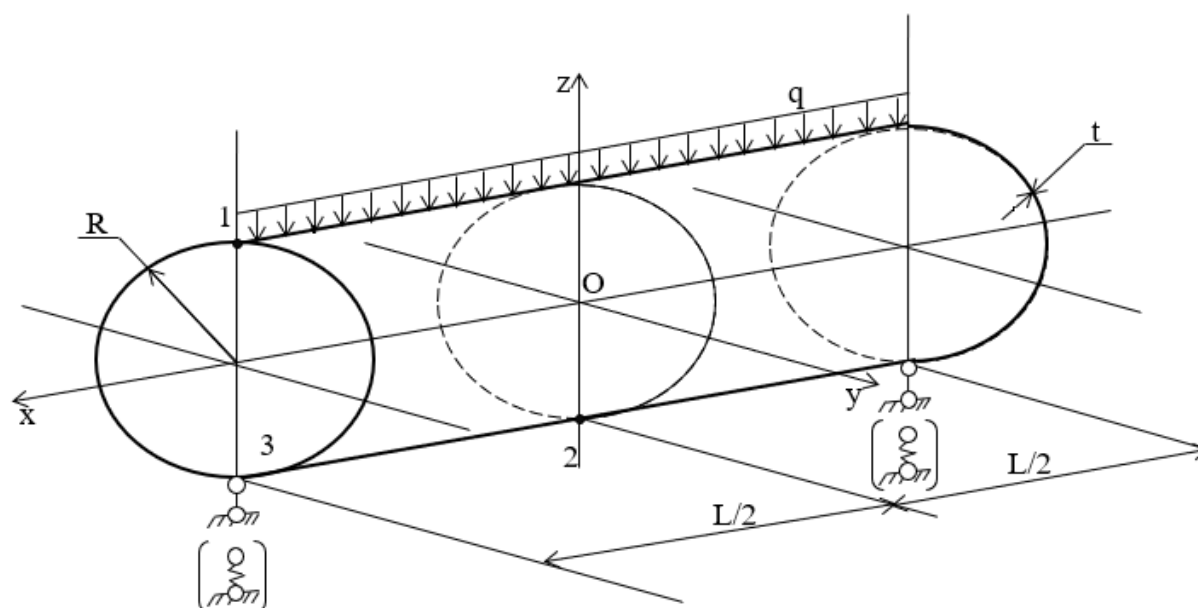


Рис. 1. Расчетная схема эллиптического цилиндра

Проведенная оценка достоверности результатов включала анализ сходимости вычислительного процесса и условия равенства численных значений кольцевых напряжений в точках 1 и 2.

В таблице 1 отражены значения нормальных напряжений на внутренней σ_{tt}^B и наружной σ_{tt}^H поверхностях цилиндра в контролируемых точках 1 и 2 для обоих вариантов расчета при использовании скалярной и векторной форм аппроксимаций.

Данные табличного материала показывают, что в обоих вариантах отсчета угла поворота нормали скалярная аппроксимация позволяет получать приемлемые результаты только при значительном сгущении сетки дискретизации. Векторный вариант интерполяционной процедуры уже при редкой сетке элементов дискретизации дает удовлетворительные по точности результаты. Важно отметить, что во втором варианте расчета сходимость значительно лучше при любой форме аппроксимации.

Таблица 1. Расчет НДС эллиптического цилиндра: шарнирные опоры

Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Сетка дискретизации					
			25x2	37x2	49x2	97x2	145x2	241x2
Первый вариант расчета								
Скалярная	Точка (1): (0; 0)	σ_{tt}^B	101,73	130,12	144,14	154,43	156,44	157,74
		σ_{tt}^H	−103,36	−130,88	−144,63	−154,09	−155,88	−157,33
	Точка (2): (0; π)	σ_{tt}^B	14,13	90,41	133,33	154,64	156,53	157,78
		σ_{tt}^H	−13,43	−89,96	−132,87	−154,07	−155,69	−157,38
Векторная	Точка (1):	σ_{tt}^B	141,51	146,77	150,78	154,77	156,79	157,66

	(0; 0)	σ_{tt}^H	−140,79	−146,33	−150,56	−154,39	−155,91	−157,23
	Точка (2): (0; π)	σ_{tt}^B	141,51	146,77	150,78	154,77	156,79	157,66
		σ_{tt}^H	−140,79	−146,33	−150,56	−154,39	−155,91	−157,23
Второй вариант расчета								
Скалярная	Точка (1): (0; 0)	σ_{tt}^B	123,11	143,88	151,77	156,76	158,44	158,73
		σ_{tt}^H	−128,36	−144,73	−151,89	−156,49	−158,46	−158,34
	Точка (2): (0; π)	σ_{tt}^B	−6,93	73,46	121,36	155,46	158,39	158,72
		σ_{tt}^H	7,78	−72,23	−120,76	−154,87	−158,73	−158,35
Векторная	Точка (1): (0; 0)	σ_{tt}^B	157,16	158,46	158,61	158,63	158,78	158,78
		σ_{tt}^H	−159,23	−158,33	−158,33	−158,33	−158,32	−158,32
	Точка (2): (0; π)	σ_{tt}^B	157,16	158,46	158,61	158,63	158,78	158,78
		σ_{tt}^H	−159,23	−158,33	−158,33	−158,33	−158,32	−158,32

При использовании векторной интерполяционной процедуры значения напряжений в точках приложения силы и шарнирного опирания совпадают, что соответствует условию равновесия цилиндра. При скалярной аппроксимации для выполнения данного условия необходимо значительно увеличивать число элементов дискретизации.

Дадим возможность эллиптическому цилиндру смещаться вертикально вниз под воздействием нагрузки, заменив шарнирные опоры на пружинные. Результаты расчетов напряженно-деформированного состояния цилиндра представлены в таблице 2.

При использовании первого варианта расчета, когда угол поворота нормали отсчитывался от ее исходного состояния, применялась сетка дискретизации (337x2); когда отсчет угла поворота нормали осуществлялся от ее деформированного положения, при скалярной аппроксимации выбиралась сетка дискретизации (145x2), при векторной – (49x2). Как видим, для второго варианта расчета было использовано меньшее число конечных элементов, так как алгоритм, использующий отсчет угла наклона нормали от деформированного состояния нормали, показывает приемлемые результаты и при более редкой сетке элементов дискретизации.

Из таблицы 1 видно, что при отсутствии вертикального смещения традиционная и векторная аппроксимации для обоих вариантов отсчета угла наклона нормали (при различном числе элементов дискретизации для каждого из вариантов расчета) показывают удовлетворительные результаты. При смещении цилиндра как жесткого целого для скалярной аппроксимации равенство значений напряжений в контролируемых точках не выполняется, а при существенном смещении получаем недостоверные результаты. Значения напряжений при инвариантной интерполяционной процедуре векторных полей перемещений остаются приемлемыми при любой величине вертикального смещения цилиндрической оболочки. Условие равенства напряжений в характерных точках 1 и 2 также выполняется.

Таблица 2. Расчет НДС эллиптического цилиндра: пружинные опоры

Жесткость пружины, 10 ² Н/м			∞	0,1	0,01	0,02
Величина смещения, 10 ⁻² м			0,00	1,00	10,00	20,00
Варианты аппроксимаций	Координаты точек (x, t)	Напряжения, МПа	Значения напряжений в контролируемых точках при заданных смещениях оболочки			
Первый вариант расчета						
Скалярная	Точка (1): (0; 0)	σ _{tt} ^B	157,83	154,48	123,69	-221,19
		σ _{tt} ^H	-157,43	-153,88	-123,88	217,38
	Точка (2): (0; π)	σ _{tt} ^B	157,84	162,39	201,59	536,23
		σ _{tt} ^H	-157,47	-161,79	-200,76	-543,14
Смещение оболочки, 10 ⁻² м			0	0,99928	9,92892	19,32095
Векторная	Точка (1): (0; 0)	σ _{tt} ^B	157,93	157,93	157,93	157,93
		σ _{tt} ^H	-157,57	-157,57	-157,57	-157,57
	Точка (2): (0; π)	σ _{tt} ^B	157,93	157,93	157,93	157,93
		σ _{tt} ^H	-157,57	-157,57	-157,57	-157,57
Смещение оболочки, 10 ⁻² м			0,00	1,00	10,00	20,00
Второй вариант расчета						
Скалярная	Точка (1): (0; 0)	σ _{tt} ^B	158,44	130,44	123,29	111,19
		σ _{tt} ^H	-158,46	-130,79	-124,37	-112,39
	Точка (2): (0; π)	σ _{tt} ^B	158,39	97,33	61,16	63,42
		σ _{tt} ^H	-158,73	-96,26	-62,28	-61,93
Смещение оболочки, 10 ⁻² м			0	0,42056	0,67818	0,72243
Векторная	Точка (1): (0; 0)	σ _{tt} ^B	158,61	158,61	158,61	158,61
		σ _{tt} ^H	-158,33	-158,33	-158,33	-158,33
	Точка (2): (0; π)	σ _{tt} ^B	158,61	158,61	158,61	158,61
		σ _{tt} ^H	-158,33	-158,33	-158,33	-158,33
Смещение оболочки, 10 ⁻² м			0,00	1,00	10,00	20,00

Заключение

В заключении следует подчеркнуть значимость предложенного алгоритма конечно-элементного исследования для более точного моделирования процессов деформаций при определении НДС тонкостенных конструкций. Алгоритм учитывает деформации поперечного сдвига и предлагает улучшенный метод отсчета угла поворота нор-

мали от ее деформированного состояния с использованием векторной аппроксимации полей перемещений.

Результаты численных экспериментов, представленные в таблицах 1 и 2, демонстрируют высокую эффективность предложенного алгоритма. Векторная аппроксимация угловых перемещений при учете угла поворота нормали от ее деформированного состояния обеспечивает сходимость вычислительного процесса и равенство напряжений в контролируемых точках при различных смещениях оболочки.

Анализ результатов подчеркивает преимущества векторной аппроксимации при учете смещения оболочки как абсолютно твердого тела. Даже при небольшом количестве элементов дискретизации достигается высокая точность результатов, что делает предложенный метод перспективным в области строительной механики и численного моделирования. Полученные выводы подтверждают эффективность алгоритма и обозначают направления для дальнейших исследований в данной области.

Литература

1. *Дергачёв Д.А., Малахов Д.Ю., Смолко Е.С.* Расчёт тонкостенных деталей методом конечных элементов на примере топливного бака // Труды Северо-Кавказского филиала Московского технического университета связи и информатики. 2022. № 1. – С. 82–84.
2. *Vu Dinh Tho, Korol E.A., Rimshin V.I., Pham Tuan Anh.* Model of stress-strain state of three-layered reinforced concrete structure by the finite element methods // International Journal for Computational Civil and Structural Engineering. 2022. Т. 18, № 2. – С. 62–73.
3. *Надольский В.В., Подымако В.И.* Оценка несущей способности стальной балки методом конечных элементов при совместном действии локальных и сдвиговых усилий // Строительство и реконструкция. 2022. № 2 (100). – С. 26–43.
4. *Ким А.Ю., Полников С.В., Амоян М.Ф.* Новые виды мембранно-стержневых и мембранно-пневматических сооружений и усовершенствованные методы их расчета // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2023. Т. 50, № 1. – С. 183–193.
5. *Клочков Ю.В., Николаев А.П., Вахнина О.В., Джабраилов А.Ш., Клочков М.Ю.* Численный анализ НДС тонкой оболочки в геометрически нелинейной постановке на основе совместного треугольного конечного элемента // Инженерные системы. Труды научно-практической конференции с международным участием, посвященной 60-летию Российского университета дружбы народов: в 2 т. / под общ. ред. М.Ю. Мальковой (г. Москва, 14–16 октября 2020 г.). – М.: Российский университет дружбы народов, 2020. – С. 40–49.
6. *Магомедов А.М., Лоренс С.А., Челябинна О.И.* Алгоритмический подход к задаче перечисления разбиений прямоугольной полосы // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2023. Т. 38, № 2. – С. 39–47.
7. *Курбанов Н.Т., Гадиева С.С., Алиева У.С.* Динамическое кручение вязкоупругого цилиндра // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2022. Т. 37, № 1. – С. 18–23.
8. *Сейфуллаева Х.И.* Задача граничной управляемости для уравнения колебаний тонкой пластины // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2023. Т. 38, № 1. – С. 49–54.

9. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 248 с.
10. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1964. – 394 с.
11. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.
12. *Паймушин В.Н., Шишкин В.М.* Деформирование тонкостенных элементов конструкций, на граничных лицевых поверхностях которых имеются закрепленные участки // Прикладная механика и техническая физика. 2023. Т. 64, № 2 (378). – С. 155–173.
13. *Гимазетдинов А.Р., Каюмов Р.А., Шакирзянов Ф.Р.* Податливость сжатых стержней на упругих опорах с учетом сдвига // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: материалы XXVIII Международного симпозиума имени А.Г. Горшкова. – М., 2022. – С. 69–70.
14. *Языев Б.М., Языев С.Б.* Устойчивость плоской формы изгиба полос при совместном действии поперечной и продольной нагрузок // Актуальные проблемы науки и техники: материалы национальной научно-практической конференции / отв. ред. Н.А. Шевченко. 2020. – С. 1600–1602.
15. *Клочков Ю.В., Андреев А.С., Клочков М.Ю., Черненко У.В.* Конечно-элементный расчет тонкой оболочки в геометрически нелинейной постановке на основе векторной формы интерполяции линейных и угловых параметров // Инновационные технологии в агропромышленном комплексе в условиях цифровой трансформации: материалы Международной научно-практической конференции (г. Волгоград, 9–11 февраля 2022 г.). – Волгоград, 2022. – С. 140–147.
16. *Ищанов Т. Р.* Математическая модель расчета эллиптического цилиндра на основе четырехугольного элемента дискретизации при скалярном варианте аппроксимации // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2023. Т. 38, № 3. – С. 18–27.
17. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. Т. 1. – 536 с.

Поступила в редакцию 18 ноября 2023 г.

Принята 25 ноября 2023 г.

UDC 539.3

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-4-32–42

Taking Account of Transverse Shear Deformation in Thin Shells: Vector Approximation in FEM Based on a Quadrilateral Sampling Element

T.R. Ishchanov

Volgograd State Agrarian University; 400002, Southern Federal District, Volgograd region, Volgograd, Universitetsky av., 26; ishchanov.volgau@ya.ru

Abstract. The study is devoted to the numerical analysis of the stress-strain state (SSS) of an elliptical cylinder under the influence of a linearly distributed load under various support conditions. The paper presents two algorithms for the finite element study of the stress-strain state of an elliptical cylinder: when measuring the angle of rotation of the normal from its initial and deformed states.

The results of numerical experiments emphasize the importance of taking account of the transverse shear deformations and demonstrate that the option of measuring the rotation angle of the normal from its deformed state provides high accuracy with a limited number of sampling elements. The developed algorithm with vector approximation of displacement fields successfully solves the problem of taking account of the displacement of a shell as an absolutely rigid body, providing a promising solution in the field of structural mechanics and numerical modeling.

Keywords: Timoshenko deformation theory, elliptic cylinder, normal rotation angle, scalar approximation, vector approximation, finite element method.

Received 18 November, 2023

Accepted 25 November, 2023