УДК 517.9+43

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-4-18–24

М.К. Ризаев

Интегральное представление дифференциальных операторов

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; rizaev.56@mail.ru

Аннотация. Дифференциальные уравнения и связанные с ними краевые задачи находят самые различные приложения в задачах квантовой механики, механики сплошных сред и самой математики. В данных задачах основным является вопрос спектрального анализа дифференциальных операторов, ибо их спектр имеет конкретный прикладной и физический смысл. Согласно теореме Планшереля преобразование Фурье однозначно продолжается до унитарного отображения пространства $L^2(R^n)$ на $L^2(R^n)$. В более общем случае применение соответствующих интегральных операторов Фурье в качестве преобразования подобия дает возможность приводить псевдодифференциальные операторы к более простому виду. В данной работе рассматривается вопрос унитарного интегрального представления дифференциальных операторов, имеющих самые различные приложения в задачах квантовой механики, математической физики. В некоторых случаях задача исследования спектральных свойств гамильтонианов квантовой механики их интегральное представление обладает рядом преимуществ.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, преобразование Фурье, оператор Лапласа, интегральный оператор, ядро оператора, гамильтониан, дельта-функция.

Введение

В работе рассматривается дифференциальный оператор A, порождаемый равенством

$$Af(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) = -\sum_{k=1}^{n} C_k\, \Delta_k f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) + \\ + \mathcal{U}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n), \qquad (1)$$

в котором Δ_k есть оператор Лапласа по координатам трехмерного вектора $\vec{x}_k = (x_{k1}, x_{k2}, x_{k3})$, C_i – постоянные, $\mathcal{U}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ – функция, заданная на R^n. Область определения оператора приведенного зависит от конкретной рассматриваемой задачи и вполне понятно, что оператор A определен на множестве дважды непрерывно дифференцируемых функций $f(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ по каждой компоненте x_{kj} вектора $\vec{x}_k, k = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, 3$. Второе слагаемое в (1) задает оператор умножения на функцию. Хотя данный дифференциальный оператор имеет не совсем общий вид, тем не менее он имеет самые различные приложения в задачах квантовой механики и математики [1–8].

Рассмотрим для удобства изложения $3n$–мерный вектор

$$X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n).$$

После принятого обозначения оператор A можно записать в компактном виде

$$Af(X) = -\sum_{k=1}^{n} C_k\, \Delta_k f(X) + \mathcal{U}(X) f(X). \qquad (2)$$

В конкретном частном случае, когда оператор А рассматривается как гамильтониан квантовой механической системы из n частиц с массами m_k, вектор $\vec{x}_k$ является радиус-вектором k-той частицы системы, постоянные $C_k = 1/2m_k$ и оператор (1) является оператором энергии этой системы. Функция $\mathcal{U} = \mathcal{U}(X)$ задает суммарно взаимодействие частиц системы и воздействие внешних полей, влияющих на динамику системы, а функция $f = f(X)$ есть волновая функция системы [1; 4].

Ограничимся более конкретным случаем оператора (1), когда оператор умножения на функцию в нем имеет вид:

$$\mathcal{U}(X)f(X) = \left[\sum_{k<j}^{n} \mathcal{U}_{kj}\left(\vec{x}_k - \vec{x}_j\right) + \sum_{k=1}^{n} V_k(\vec{x}_k)\right] f(X). \tag{3}$$

Условия существования преобразования Фурье известны и приводятся в различных источниках [3–7], поэтому они здесь не приводятся, и в дальнейшем предполагается, что существуют преобразования Фурье в пространстве R^{3n} функции f и ее частных производных второго порядка, а также всех функций, входящих в выражение оператора, порождающих его.

Преобразование Фурье F искомого оператора A обозначим символом $\widehat{A}$, определяется оно естественным образом согласно формуле

$$\hat{A}\hat{f}(P) = F[Af](P),$$

где $P = (\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n)$, $\vec{p}_i \epsilon R^3$ и $\hat{f} = F[f]$ есть образ Фурье функции f. Согласно теореме Фурье–Планшереля преобразование Фурье, задаваемое приведенным выше элементарным равенством, расширяется на все пространство $L^2(R^n)$. Заметим, что в силу унитарности оператора Фурье–Планшереля обратное преобразование Фурье совпадает с сопряженным [3–4].

Преобразование Фурье имеет различные приложения к исследованию дифференциальных уравнений в частных производных, в частности в вопросах построения их фундаментальных решений. Оно имеет самые широкие приложения и к теории квантовых полей, которая появилась в результате попытки соединения квантовой механики и специальной теории относительности в квантовом обобщении моделей электромагнитных явлений. В силу этого обстоятельства теория поля используется для построения моделей многих физических систем и процессов, в которых участвуют элементарные частицы. Математические модели подобных физических систем содержат дифференциальные операторы, уравнения в частных производных.

Интегральное представление оператора и его обоснование. В силу того, что преобразование Фурье произведения двух функций равно свертке образов Фурье этих функций, образ Фурье исходного оператора умножения на функцию является интегральным оператором. Вполне понятно то обстоятельство, что всякий оператор умножения на функцию можно представить в виде интегрального оператора, если привлечь аппарат обобщенных функций Дирака. Поэтому оператор $\hat{A}$ можно рассматривать как интегральный с соответствующим ему ядром

$$K(P,Q) = K(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_n;\ \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_n).$$

Из всего вышеизложенного следует, что интерес представляет унитарное интегральное представление вида

$$\hat{A}g(P) = \int_{R^{3n}} K(P,Q)\, g(Q) dQ.$$

Теорема. Пусть искомый дифференциальный оператор A порождается равенствами (1)–(3), для функций $\mathcal{U}_{kj}$ и V_k существуют их образы Фурье $\widehat{\mathcal{U}}_{kj}$ и $\widehat{V_k}$ в пространстве $L^2(R^3)$. Тогда для ядра $K(P,Q)$ оператора $\hat{A}$ справедливо представление

$$K(P,Q) = \left(\sum_{k=1}^{n} C_k|\vec{q}_k|^2\right)\prod_{k=1}^{n}\delta(\vec{p}_k - \vec{q}_k) +$$
$$+\sum_{k<j}^{n}\widehat{\mathcal{U}}_{kj}\left(\frac{p_k-\vec{p}_j-\vec{q}_k+\vec{q}_j}{2}\right)\delta\left(\vec{p}_k+\vec{p}_j-\vec{q}_k-\vec{q}_j\right)\prod_{m\neq k}^{n}\delta(\vec{p}_m-\vec{q}_m) + \quad (4)$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\widehat{V_k}(\vec{p}_k-\vec{q}_k)\prod_{m\neq k}^{n}\delta(\vec{p}_m-\vec{q}_m).$$

Доказательство. 1) В случае абсолютной интегрируемости функции и ее производных $\varphi'(x)$ и $\varphi''(x)$ на каждом конечном интервале имеет место известная формула

$$F[\varphi''](p) = -p^2\hat{\varphi}(p), p\epsilon R^1, \quad (5)$$

где F – унитарный оператор преобразования Фурье, а $\hat{\varphi} = F[\varphi]$.

Согласно (5) в случае функции трех переменных $\psi = \psi(\vec{x})$ при выполнении аналогичных соответствующих условий справедлива формула

$$F\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_j^2}\right] = -p_j^2\hat{\psi}(\vec{p}), j = 1,2,3 \quad (6)$$
$$\vec{x} = (x_1,x_2,x_3), \vec{p} = (p_1,p_2,p_3), x_j, p_j\epsilon R^1.$$

Опираясь на последнее соотношение (6), можно обосновать справедливость формулы

$$F[-\Delta\psi](\vec{p}) = |\vec{p}|^2\hat{\psi}(\vec{p}),\ \vec{p}\epsilon R^3. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь более общий случай преобразования Фурье в пространстве R^{3n}. Для удобства изложения дальнейшего материала примем следующие обозначения:

$$X = (\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n), \vec{x}_i\epsilon R^3;$$
$$P = (\vec{p}_1,\vec{p}_2,\dots,\vec{p}_n), \vec{p}_i\epsilon R^3;$$
$$Q = (\vec{q}_1,\vec{q}_2,\dots,\vec{q}_n), \vec{q}_n\epsilon R^3.$$

Если функция $f = f(X) = f(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$ и выполняются необходимые условия, то формула (7) приводит нас к соотношению

$$F\left[-\sum_{k=1}^{n} C_k\,\Delta_k f(X)\right] = \left[\sum_{k=1}^{n} C_k|\vec{p}_k|^2\right]\hat{f}(P), \quad (8)$$

где Δ_k есть стандартный оператор Лапласа по координатам вектора $\vec{p}_k = (p_{k1},p_{k2},p_{k3})$.

Обозначим через $\hat{A}_1$ оператор умножения, действующий по закону

$$\hat{A}_1 g(P) = \left[\sum_{k=1}^{n} C_k|\vec{p}_k|^2\right] g(P).$$

Используя обобщенную дельта-функцию Дирака, введенный оператор можно представить в интегральной форме

$$\hat{A}_1 g(P) = \int_{R^{3n}}\left[\sum_{k=1}^{n} C_k|\vec{q}_k|^2\right]\delta(P-Q)g(Q)dQ, \quad (9)$$

где

$$\delta(P-Q) = \prod_{k=1}^{n}\delta(\vec{p}_k-\vec{q}_k) \text{ и } dQ = \prod_{k=1}^{n} d\vec{q}_k.$$

Вполне очевидно, что ядро $\hat{A}_1(P,Q)$ оператора $\hat{A}_1$ имеет вид

$$\hat{A}_1(P,Q) = \left[\sum_{k=1}^{n} C_k|\vec{q}_k|^2\right]\prod_{k=1}^{n}\delta(\vec{p}_k-\vec{q}_k). \quad (10)$$

2) Преобразование Фурье является линейным преобразованием, поэтому для любой функции

$$f_n = f(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_n)$$

при выполнении осуществимости проводимых преобразований справедлива формула

$$F\left[\sum_{k<j}^{n} \mathcal{U}_{kj}\left(\vec{x}_k - \vec{x}_j\right) f(X)\right] = \left\{\sum_{k<j}^{n} F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{3n}\right\}(P) * \hat{f}(P), \tag{11}$$

где $F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{3n}$ есть преобразование Фурье функции $\mathcal{U}_{kj} = \mathcal{U}_{kj}(\vec{x}_k - \vec{x}_j)$ в пространстве R^{3n}, а $*$ – операция свертки функций.

В силу того, что преобразование подобия Фурье по определению задается равенством

$$F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{3n} = \int\limits_{R^{3n}} \mathcal{U}_{kj}\left(\vec{x}_k - \vec{x}_j\right) e^{i\sum_{m=1}^{n}(\vec{p}_m,\vec{x}_m)} \prod_{m=1}^{n} d\vec{x}_i,$$

имеет место соотношение

$$F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{3n} = F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{6} \cdot \prod_{m\neq k,j}^{n} \int_{R^{3n}} e^{i(\vec{p}_m,\vec{q}_m)} d\vec{q}_m\,, \tag{12}$$

где

$$F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{6} = \int_{R^6} \mathcal{U}_{kj}\left(\vec{x}_k - \vec{x}_j\right) e^{i\left[(\vec{p}_k,\vec{x}_k)+(\vec{p}_j,\vec{x}_j)\right]} d\vec{x}_k d\vec{x}_j. \tag{13}$$

Произведя преобразование переменных $\vec{x}_k$ и $\vec{x}_j$ в интеграле (13) по закону

$$\vec{\xi} = \vec{x}_k - \vec{x}_j, \qquad \vec{\eta} = \vec{x}_k + \vec{x}_j,$$

мы придем к равенству

$$F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{6} = \frac{1}{8}\int_{R^3} \mathcal{U}_{kj}\left(\vec{\xi}\right) e^{i\left((\vec{p}_k-\vec{p}_j)/2,\vec{\xi}\right)} d\vec{\xi} \int_{R^3} e^{i\left((\vec{p}_k+\vec{p}_j)/2,\vec{\eta}\right)} d\vec{\eta}. \tag{14}$$

Как известно, образ Фурье постоянной единицы есть функция Дирака, т. е.

$$\int_{R^3} 1 \cdot e^{i(\vec{p}_m,\vec{q}_m)} d\vec{q}_m = \delta(\vec{p}_m).$$

В силу данного равенства из соотношения (14) мы имеем, что

$$F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{6}(\vec{p}_k,\vec{p}_j) = \frac{1}{8}\hat{\mathcal{U}}_{kj}\left((\vec{p}_k - \vec{p}_j)/2\right)\delta\left((\vec{p}_k + \vec{p}_j)/2\right), \tag{15}$$

где $\hat{\mathcal{U}}_{kj}$ есть преобразование Фурье $\mathcal{U}_{kj} = \mathcal{U}_{kj}(\vec{x}_1)$ в R^3.

Согласно полученной формуле (15) равенство (12) можно записать в следующем виде:

$$F\left[\mathcal{U}_{kj}\right]_{3n}(P) = \frac{1}{8}\hat{\mathcal{U}}_{kj}\left(\frac{\vec{p}_k-\vec{p}_j}{2}\right)\delta\left(\frac{\vec{p}_k+\vec{p}_j}{2}\right)\prod_{m\neq k,j}^{n}\int_{R^{3n}}\delta(\vec{p}_m)\,. \tag{16}$$

Поэтому в силу (11) приходим к равенству

$$F\left[\sum_{k<j}^{n} \mathcal{U}_{kj}\left(\vec{x}_k - \vec{x}_j\right) f(X)\right](P) = \int\limits_{R^{3n}} \frac{1}{8}\hat{\mathcal{U}}_{kj}\left(\frac{\vec{p}_k - \vec{p}_j - \vec{q}_k + \vec{q}_j}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\, \delta\left(\frac{\vec{p}_k + \vec{p}_j - \vec{q}_k - \vec{q}_j}{2}\right)$$

$$\cdot \prod_{m\neq k,j}^{n} \delta(\vec{p}_m - \vec{q}_m)\,\hat{f}(Q)dQ. \tag{17}$$

Введем в рассмотрение оператор $\hat{A}_2$, задаваемый равенством (17), его правой частью. Вполне очевидно, что его ядро $\hat{A}_2(P,Q)$ есть функция

$$\hat{A}_2(P,Q) = \frac{1}{8}\hat{\mathcal{U}}_{kj}\left(\frac{\vec{p}_k - \vec{p}_j - \vec{q}_k + \vec{q}_j}{2}\right) \cdot$$

$$\cdot\, \delta\left(\vec{p}_k + \vec{p}_j - \vec{q}_k - \vec{q}_j\right)\prod_{m\neq k}^{n} \delta(\vec{p}_m - \vec{q}_m). \tag{18}$$

3) Определим теперь преобразование Фурье $\hat{A}_3$ оператора

$$A_3 f(X) = \sum_{k=1}^{n} V_k(\vec{x})\, f(X).$$

Поскольку образ Фурье произведения двух функций есть свертка образов Фурье сомножителей, то

$$F[A_3 f]_{3n} = F\left[\sum_{k=1}^{n} V_k\right] * \hat{f}$$

или

$$F[A_3 f]_{3n} = \left\{\sum_{k=1}^{n} F[V_k]_{3n}\right\} * \hat{f}.$$

Расписав в сумме из правой части полученного равенства преобразование Фурье, мы придем к равенству

$$F[A_3 f]_{3n} = \left\{\sum_{k=1}^{n} F[V_k]_3 \prod_{m\neq k}^{n} \delta_m\right\} * \hat{f}$$

где $\delta_m = \delta(\vec{p}_m)$ – функция Дирака. Следовательно, если $\widehat{V_k}$ есть образ Фурье функции V_k в R^3, то предыдущее равенство по определению свертки двух функций принимает вид

$$\hat{A}_3 \hat{f} = \int_{R^{3n}} \left[\sum_{k=1}^{n} \widehat{V_k}(\vec{p}_k - \vec{q}_k) \prod_{m\neq k}^{n} \delta(\vec{p}_m - \vec{q}_m)\right] \hat{f}(Q) dQ. \tag{19}$$

Само ядро $\hat{A}_3(P, Q)$ интегрального оператора $\hat{A}_3$ согласно полученному равенству (19) есть функция

$$\hat{A}_3(P, Q) = \sum_{k=1}^{n} \left[\widehat{V_k}(\vec{p}_k - \vec{q}_k) \prod_{m\neq k}^{n} \delta(\vec{p}_m - \vec{q}_m)\right]. \tag{20}$$

4) Согласно определению введенных операторов A_i выполняется равенство

$$\hat{A} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3,$$

из которого следует функциональное равенство

$$K(P, Q) = \hat{A}_1(P, Q) + \hat{A}_2(P, Q) + \hat{A}_3(P, Q).$$

Последнее равенство в силу соотношений (10), (18), (20) означает, что действительно имеет место требуемое соотношение (4).

Теорема доказана.

Заключение

В работе получено интегральное унитарное представление дифференциального оператора, имеющего самые разные приложения в задачах математической и теоретической физики, квантовой механики. При этом от функциональных коэффициентов, входящих в дифференциальный оператор и порождающих его, требуется лишь существование их образов Фурье. Это позволяет приложить полученное интегральное представление к решению различных задач, в которых возникает проблема исследования спектральных характеристик подобных операторов при тех или иных ограничениях. Для интегральных операторов их изолированные собственные значения являются полюсами резольвент, а это в некоторых случаях существенно упрощает их определение и исследование.

Литература

1. *Фаддеев Л.Д.* Математические вопросы квантовой теории рассеяния для систем трех частиц // Труды МИАН им. В.И. Стеклова.– М.–Л., 1963. Т. 69. – 124 с.

2. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 2010. – 428 с.

3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Изд-во КДУ, Добросовет, 2016. – 408 с.

4. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: в 4 т. Т. 2: Гармонический анализ. Самосопряженность. – М.: Мир, 1978. – 400 с.

5. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: в 2 т. Т. 1: Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1984. – 360 с.

6. *Трев Ф.* Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье: в 2 т. Т. 2: Интегральные операторы Фурье. – М.: Мир, 1984. – 400 с.

7. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 2008. – 512 с.

8. *Левитан Б.М., Саргсян И.С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 432 с.

9. *Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 5. – С. 788–793.

10. *Шкаликов А.А*. О базисных свойствах корневых функций дифференциальных операторов, содержащих спектральный параметр в краевых условиях // Дифф. уравнения. 2019. Т. 55, № 5. – С. 631–643.

11. *Ризаев М.К.* Построение резольвенты импульсного представления гамильтониана квантовомеханической системы с вырожденным внешним полем // Актуальные вопросы математики и смежные вопросы. Сборник научных трудов межвузовского семинара. – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2017. – С. 77–79.

12. *Ризаев М.К.* Приложение метода стационарной теории возмущений к вычислению критических нагрузок в задаче продольного изгиба стержня // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2020. Т. 35, вып. 3. – С. 24–30.

13. *Ризаев М.К.* Об оценке определителя Фредгольма одного интегрального оператора // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2022. Т. 37, вып. 4. – С. 36–41.

14. *Ризаев М.К.* Интегральное представление дифференциальных операторов // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики: материалы XV Международной конференции (г. Махачкала, 13–15 сентября 2023 г.). – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2023. – С. 97–100.

Поступила в редакцию 30 ноября 2023 г.
Принята 5 декабря 2023 г.

UDC 517.9+43

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-4-18–24

Integral Representation of Differential Operators

M.K. Rizaev

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; rizaev.56@mail.ru

Abstract. Differential equations and related boundary value problems find a variety of applications in the problems of quantum mechanics, continuum mechanics and mathematics itself. In these problems, the main issue is the spectral analysis of differential operators, since their spectrum has a specific applied and physical meaning. According to Plancherel's theorem, the Fourier transform uniquely continues to a unitary mapping of the space $L^2(R^n)$ onto $L^2(R^n)$**.** In a more general case, the use of the corresponding Fourier integral operators as a similarity transformation makes it possible to reduce pseudodifferential operators to a simpler form. This paper examines the issue of a unitary integral representation of differential operators that have a variety of applications in the problems of quantum mechanics and mathematical physics. In some cases, the problem of studying the spectral properties of Hamiltonians of quantum mechanics, their integral representation has a number of advantages.

Keywords: differential operator, Fourier transform, Laplace operator, integral operator, operator kernel, Hamiltonian, delta function.

Received 30 November, 2023
Accepted 5 December, 2023