

УДК 539.3

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-3-18-27

Т.Р. Ищанов

**Математическая модель расчета эллиптического цилиндра на основе
четырёхугольного элемента дискретизации при скалярном варианте
аппроксимации**

*Волгоградский государственный аграрный университет; 400002, Южный
федеральный округ, Волгоградская обл., г. Волгоград, просп. Университетский, 26;
ishchanov.volgau@ya.ru*

Аннотация. В статье представлен математический алгоритм конечно-элементного расчета эллиптического цилиндра с учетом деформационной теории. Основные геометрические соотношения между деформациями и перемещениями были рассмотрены в двух вариантах: при отсчете угла наклона нормали к срединной поверхности от ее исходного состояния и от ее положения в деформированном состоянии. На примере эллиптического цилиндра, подвергаемого линейно распределенной нагрузке, был проведен сравнительный анализ эффективности двух алгоритмов расчета. В результате численного анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) цилиндра была выявлена необходимость учета деформаций поперечного сдвига. Проведенные исследования позволили сделать вывод о предпочтительности использования варианта расчета с учетом угла поворота нормали от ее деформированного состояния. Этот подход позволяет достичь удовлетворительной точности результатов при использовании относительно разреженной сетки элементов дискретизации.

Ключевые слова: математический алгоритм, эллиптический цилиндр, метод конечных элементов, четырехугольный элемент дискретизации, поперечный сдвиг.

Тонкостенные цилиндрические конструкции эллиптического типа широко применяются в различных областях нефтяной, газовой, химической промышленности. С развитием современных компьютерных технологий становятся актуальными вопросы усовершенствования численных методов анализа напряженно-деформированного состояния конструкций, в частности метода конечных элементов (МКЭ).

В настоящее время при проведении расчетов НДС оболочек наиболее распространена теория, основанная на гипотезе Кирхгофа–Лява [1; 2]. Тем не менее, ряд исследователей [3–7] считает, что сдвиговые теории, включая теорию С. П. Тимошенко, более точны. Несмотря на значительное количество научных трудов, освещающих моделирование процессов деформирования тонкостенных цилиндрических конструкций [8–15] на основе использования различных конечно-элементных моделей анализа их НДС, возникает ряд вопросов, требующих дальнейшего исследования.

В вышеупомянутых работах авторы используют деформационную теорию, основанную на отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния, но более логично осуществлять отсчет угла поворота нормали от ее деформированного состояния, что в большей степени соответствует физическому смыслу решаемой задачи. Данный алгоритм, реализованный в настоящей статье, позволяет получать достоверные конечно-элементные решения уже при редкой сетке элементов дискретизации.

Это позволяет сделать вывод, что разработка более совершенных алгоритмов для расчета цилиндрических оболочек с учетом деформаций поперечного сдвига остается весьма актуальной задачей.

Геометрия тонкой оболочки. Положение точки M^0 срединной поверхности эллиптического цилиндра описывается радиус-вектором

$$\vec{R}^0 = x\vec{j} + b \cdot \sin(t)\vec{j} + c \cdot \cos(t)\vec{k}, \quad (1)$$

где x – осевая координата; b и c – полуоси поперечного сечения эллиптического цилиндра; t – параметр.

Векторы локального базиса определим дифференцированием (1) по глобальным координатам x и t

$$\begin{aligned} \vec{a}_1^0 &= \vec{R}_{,x}^0 = \vec{j}; \\ \vec{a}_2^0 &= \vec{R}_{,t}^0 = b \cdot \cos(t)\vec{j} - c \cdot \sin(t)\vec{k}. \end{aligned} \quad (2)$$

Орт нормали к срединной поверхности найдем согласно векторному произведению

$$\vec{a}_n^0 = \frac{\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0}{|\vec{a}_1^0 \times \vec{a}_2^0|} = \frac{c \cdot \sin(t)}{\sqrt{a_n^0}} \vec{j} + \frac{b \cdot \cos(t)}{\sqrt{a_n^0}}, \quad (3)$$

где $a_n^0 = c^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)$.

Выразим производные локального базиса

$$\vec{a}_{2,t}^0 = q_{22} \vec{a}_2^0 + q_{23} \vec{a}_n^0; \quad \vec{a}_{n,t}^0 = q_{32} \vec{a}_2^0, \quad (4)$$

где $q_{22} = \frac{(c^2 - b^2) \cdot \sin(2t)}{2a_n^0}$; $q_{23} = \frac{-cb}{\sqrt{a_n^0}}$; $q_{32} = \frac{cb}{a_n^0 \sqrt{a_n^0}}$.

Процесс деформации определит новое положение точки срединной поверхности эллиптического цилиндра, которое будет определено радиус-вектором (точка M^0 переместится в точку M)

$$\vec{R} = \vec{R}^0 + \vec{v}, \quad (5)$$

где $\vec{v} = v^1 \vec{a}_1^0 + v^2 \vec{a}_2^0 + v \vec{a}_n^0$ – вектор перемещения точки M^0 .

Производные вектора перемещения точки M^0 по криволинейным координатам x и t

$$\begin{aligned} \vec{v}_{,x} &= t_x^1 \vec{a}_1^0 + t_x^2 \vec{a}_2^0 + t_x \vec{a}_n^0; \quad \vec{v}_{,t} = t_t^1 \vec{a}_1^0 + t_t^2 \vec{a}_2^0 + t_t \vec{a}_n^0; \\ \vec{v}_{,xx} &= t_{xx}^1 \vec{a}_1^0 + t_{xx}^2 \vec{a}_2^0 + t_{xx} \vec{a}_n^0; \quad \vec{v}_{,tt} = t_{tt}^1 \vec{a}_1^0 + t_{tt}^2 \vec{a}_2^0 + t_{tt} \vec{a}_n^0; \\ \vec{v}_{,tx} &= t_{tx}^1 \vec{a}_1^0 + t_{tx}^2 \vec{a}_2^0 + t_{tx} \vec{a}_n^0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} t_x^1 &= v_{,x}^1; \quad t_x^2 = v_{,x}^2; \quad t_x = v_{,x}; \\ t_t^1 &= v_{,t}^1; \quad t_t^2 = v_{,t}^2 + v^2 \cdot q_{22} + v \cdot q_{32}; \quad t_t = v^2 \cdot q_{23} + v_{,t}; \\ t_{xx}^1 &= v_{,xx}^1; \quad t_{xx}^2 = v_{,xx}^2; \quad t_{xx} = v_{,xx}; \quad t_{tt}^1 = v_{,tt}^1; \\ t_{tt}^2 &= (q_{23} q_{32} + (q_{22})^2) v^2 + v_{,tt}^2 + 2 q_{32} v_{,t} + q_{32} q_{22} v; \\ t_{tt} &= t_t^2 q_{23} + t_{t,t} = q_{32} q_{23} v - v^2 q_{22} q_{23} + 2 q_{23} v_{,t}^2 + v_{,tt}; \\ t_{tx}^1 &= v_{,tx}^1; \quad t_{tx}^2 = v_{,tx}^2 + v_{,x}^2 q_{22} + v_{,x} q_{32}; \\ t_{tx} &= v_{,x}^2 q_{23} + v_{,tx}. \end{aligned}$$

Для определения базисных векторов в точке M продифференцируем (5) по глобальным координатам x и t :

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= \vec{R}_{,x} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,x} = \vec{a}_1^0 + t_x^1 \vec{a}_1^0 + t_x^2 \vec{a}_2^0 + t_x \vec{a}_n^0; \\ \vec{a}_2 &= \vec{R}_{,t} = (\vec{R}^0 + \vec{v})_{,t} = \vec{a}_2^0 + t_t^1 \vec{a}_1^0 + t_t^2 \vec{a}_2^0 + t_t \vec{a}_n^0. \end{aligned} \quad (7)$$

Для определения орта нормали к срединной поверхности цилиндра в деформированном состоянии воспользуемся векторным произведением

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}. \quad (8)$$

Положения произвольной точки цилиндрической оболочки задаются соответствующими радиус-векторами

$$\vec{R}^{o\zeta} = \vec{R}^o + \zeta \vec{a}_n^o; \quad \vec{R}^\zeta = \vec{R}^{o\zeta} + \vec{V}, \quad (9)$$

где $\vec{V}$ – вектор перемещения точки, отстоящей от срединной поверхности на расстоянии ζ . Опишем его с помощью следующей формулы [3]

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^o), \quad (10)$$

где вектор углов поворота нормали определяется соотношением [4]

$$\vec{\gamma} = -\gamma^2 \vec{a}_1^0 + \gamma^1 \vec{a}_2^0 + \Omega_n \vec{a}_n^0. \quad (11)$$

Соотношение (10) определяет отсчет угла поворота нормали от ее исходного состояния (рис. 1).

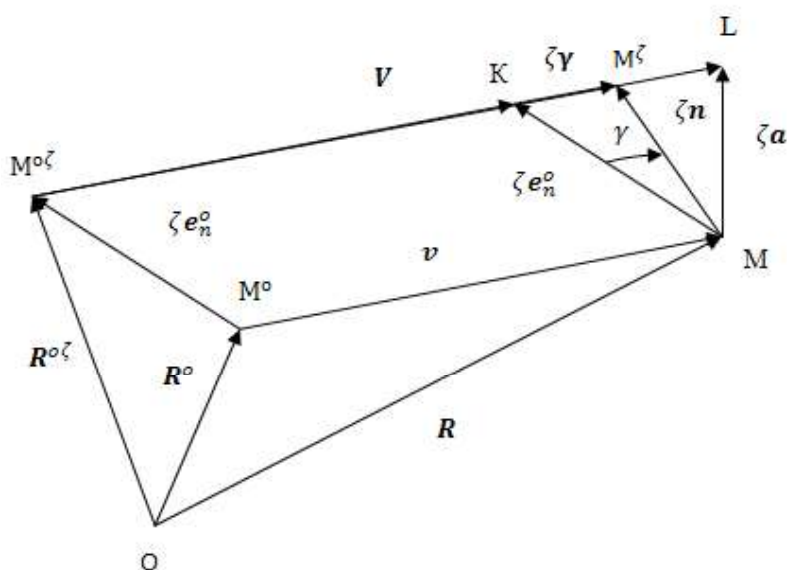


Рис. 1. Отсчет угла поворота нормали от ее исходного состояния

Деформации в произвольном слое оболочки определяются соотношениями механики сплошной среды [16]:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^\zeta = (g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta}^0)/2; \quad \varepsilon_{\alpha 3}^\zeta = (g_{\alpha 3} - g_{\alpha 3}^0)/2, \quad (12)$$

где $g_{\alpha\beta} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_\beta = \vec{R}_{,\alpha}^\zeta \cdot \vec{R}_{,\beta}^\zeta$; $g_{\alpha\beta}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_\beta^0 = \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta} \cdot \vec{R}_{,\beta}^{0\zeta}$;

$g_{\alpha 3} = \vec{g}_\alpha \cdot \vec{g}_3 = \vec{R}_{,\alpha}^\zeta \cdot \vec{R}_{,\zeta}^\zeta$; $g_{\alpha 3}^0 = \vec{g}_\alpha^0 \cdot \vec{g}_3^0 = \vec{R}_{,\alpha}^{0\zeta} \cdot \vec{R}_{,\zeta}^{0\zeta}$.

С учетом (7)–(11) соотношения (12) примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^\zeta &= \vec{g}_1^0 \cdot \vec{V}_{,x} = t_x^1 + \zeta \gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0}; \\ \varepsilon_{22}^\zeta &= \vec{g}_2^0 \cdot \vec{V}_{,t} = a_{22}^0 t_t^2 + \gamma^2 q_{22} \sqrt{a_{22}^0} + \\ &\quad + \zeta \left(\gamma_{,t}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_t^2 q_{32} \right); \\ 2\varepsilon_{12}^\zeta &= \vec{g}_1^0 \cdot \vec{V}_{,t} + \vec{g}_2^0 \cdot \vec{V}_{,x} = t_t^1 + a_{22}^0 t_x^2 + \\ &\quad + \zeta \left(\gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} + \frac{\gamma^1 a_{22,t}^0}{2\sqrt{a_{22}^0}} + \gamma_{,x}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_x^2 q_{32} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{13}^{\zeta} &= \vec{g}_1^0 \vec{V}_{,\zeta} + \vec{g}_3^0 \vec{V}_{,x} = \gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} + t_x; \\ 2\varepsilon_{23}^{\zeta} &= \vec{g}_2^0 \vec{V}_{,\zeta} + \vec{g}_3^0 \vec{V}_{,t} = \gamma^2 \sqrt{a_{22}^0} + t_t, \end{aligned} \quad (13)$$

где $a_{22}^0 = \vec{a}_2^0 \cdot \vec{a}_2^0 = c^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)$.

При отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния (рис. 2) вектор перемещения произвольной точки будет иметь вид

$$\vec{V} = \vec{v} + \zeta(\vec{v}^n \times \vec{a}_n^0) + \zeta(\vec{\gamma} \times \vec{a}_n^0), \quad (14)$$

где $\vec{v}^n = \vec{a}_n - \vec{a}_n^0$ – вектор разности нормалей в деформированном и исходном состояниях.

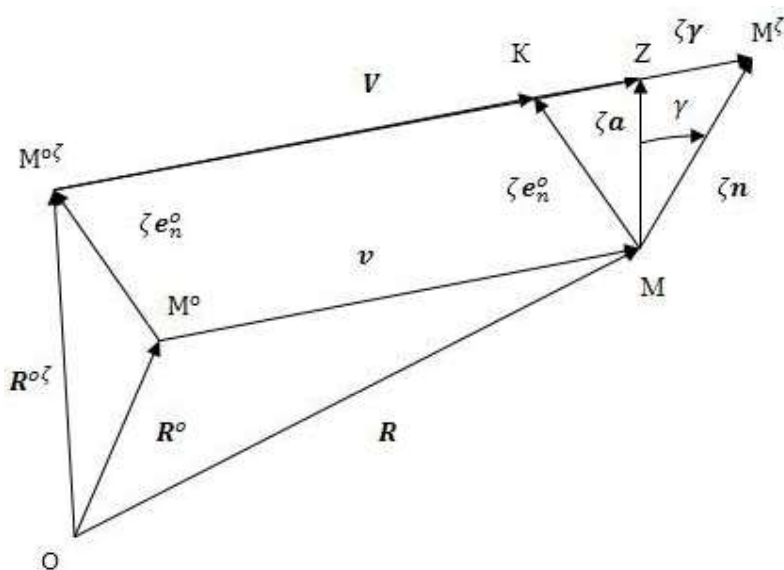


Рис. 2. Отсчет угла поворота нормали от ее деформированного состояния

На основании (7, 8, 9, 11, 14) формулы (12) примут вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{\zeta} &= t_x^1 + \zeta \left(\gamma_{,x}^1 \sqrt{a_{22}^0} - t_{tx} \sqrt{a_{22}^0} \right); \\ \varepsilon_{22}^{\zeta} &= t_t^2 a_{22}^0 + \zeta \left(t_t^2 a_{22}^0 q_{32} + t_{tx} \sqrt{a_{22}^0} + t_x q_{22} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,t}^2 \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 q_{22} \sqrt{a_{22}^0} \right); \\ 2\varepsilon_{12}^{\zeta} &= t_t^1 + a_{22}^0 t_x^2 + \zeta \left(-t_{tt} \sqrt{a_{22}^0} + t_{xx} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,t}^1 \sqrt{a_{22}^0} + \gamma_{,x}^2 \sqrt{a_{22}^0} + a_{22}^0 t_x^2 q_{32} \right); \\ 2\varepsilon_{13}^{\zeta} &= \gamma^1 \sqrt{a_{22}^0} - t_t \sqrt{a_{22}^0} + t_x; \\ 2\varepsilon_{23}^{\zeta} &= t_x \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 \sqrt{a_{22}^0} + t_x + \zeta \left(t_x q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \gamma^2 q_{32} \sqrt{a_{22}^0} + \frac{q_{23}(t_x + \gamma^2)}{\sqrt{a_{22}^0}} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Матрица жесткости конечного элемента. Конечный элемент (КЭ) представлен четырехугольным фрагментом поверхности цилиндра с узлами i, j, k, l , который проектировался на квадрат с локальными координатами: $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$.

Столбец узловых неизвестных в локальной и глобальной системах координат представлен формулами (16) и (17). Узловые неизвестные КЭ – компоненты векторов перемещений, их первые производные; компоненты векторов углов поворотов нормалей:

$$\{U_y^L\}^T = \left\{ \{v_y^{1L}\}^T \{v_y^{2L}\}^T \{v_y^L\}^T \{\gamma_y^{1L}\}^T \{\gamma_y^{2L}\}^T \right\}; \quad (16)$$

$$\{U_y^G\}^T = \left\{ \{v_y^{1G}\}^T \{v_y^{2G}\}^T \{v_y^G\}^T \{\gamma_y^{1G}\}^T \{\gamma_y^{2G}\}^T \right\}, \quad (17)$$

где $\{m_y^L\}^T = \{m^i \dots m^l m_{,\xi}^i \dots m_{,\xi}^l m_{,\beta}^i \dots m_{,\beta}^l\};$

$$\{m_y^G\}^T = \{m^i \dots m^l m_{,x}^i \dots m_{,x}^l m_{,\eta}^i \dots m_{,\eta}^l\}; \quad \{\gamma_y^p\}^T = \{\gamma^{pi} \gamma^{pj} \gamma^{pk} \gamma^{pl}\};$$

m – компонента вектора перемещения $\vec{v}$; L и G – локальная и глобальная системы координат соответственно.

Матрица, связывающая локальную (16) и глобальную (17) системы координат, описывается соотношением

$$\{U_y^L\}^T = [PR] \{U_y^G\}^T, \quad (18)$$

где элементы матрицы $[PR]$ компонуются на основе зависимостей

$$m_{,\xi}^w = m_{,x}^w x_{,\xi}^w + m_{,t}^w t_{,\xi}^w; \quad m_{,\eta}^w = m_{,x}^w x_{,\eta}^w + m_{,t}^w t_{,\eta}^w. \quad (19)$$

Перемещения внутренней точки конечного элемента в деформированном состоянии выражаются через узловые значения с помощью интерполяционных выражений

$$m = \{\varphi\}^T \{m_y^L\}; \quad \gamma^p = \{\theta\}^T \{\gamma_y^p\}, \quad (20)$$

где $\{\varphi\}^T = \{\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_{12}\}$ – матрица-строка, элементами которой являются произведения полиномов Эрмита третьей степени; $\{\theta\}^T = \{\theta_1 \theta_2 \theta_3 \theta_4\}$ – матрица-строка, содержащая билинейные функции формы.

Производные компонент вектора перемещения и компонент вектора углов поворота нормали получены дифференцированием (23)

$$\begin{aligned} m_{,\alpha} &= \left(\{\varphi_{,\xi}\}^T \xi_{,\alpha} + \{\varphi_{,\eta}\}^T \eta_{,\alpha} \right) \{m_y^L\}; \\ m_{,\alpha\beta} &= \left(\{\varphi_{,\xi\xi}\}^T (\xi_{,\alpha})^2 + \{\varphi_{,\eta\eta}\}^T (\eta_{,\alpha})^2 + \{\varphi_{,\xi\eta}\}^T \xi_{,\alpha} \eta_{,\beta} + \{\varphi_{,\eta\xi}\}^T \eta_{,\alpha} \xi_{,\beta} \right) \{m_y^L\}; \\ \gamma_{,\alpha}^p &= \left(\{\theta_{,\xi}\}^T \xi_{,\alpha} + \{\theta_{,\eta}\}^T \eta_{,\alpha} \right) \{\gamma_y^p\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где α и β определяют операции дифференцирования по x и t .

Между компонентами вектора перемещений и вектора угла поворота нормали внутри элемента и соответствующими компонентами в его узлах имеет место матричное соотношение

$$\{U\} = [A] \{U_y^L\}. \quad (22)$$

Для удобства изложения материала запишем зависимости (13) и (17) в матричном виде

$$\{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\} = [\Gamma] \{\varepsilon_{\alpha\beta}\} = [\Gamma] [B] \{U_y^L\} = [Q] \{U_y^L\}, \quad (23)$$

где $\{\varepsilon_{\alpha\beta}\}$ – деформации срединной поверхности; $[Q]$ – матрица дифференциальных и алгебраических операторов.

При выводе матрицы жесткости четырехугольного КЭ используется функционал, определяющий равенство возможных работ внешних и внутренних сил

$$\Phi = \int_V \{\varepsilon_{\alpha\beta}^{\zeta}\}^T \{\sigma^{\alpha\beta}\} dV - \int_F \{U\}^T \{P\} dF, \quad (24)$$

где $\{\sigma^{ij}\}^T = \{\sigma^{11}\sigma^{12}\sigma^{13}\sigma^{22}\sigma^{23}\}$; $\{P\}^T = \{p_1p_2p_{00}\}$ – столбец компонент вектора внешней нагрузки; V – объем элемента; F – площадь приложения нагрузки.

Принимая во внимание (13) или (17), (25) и (26), можно сделать вывод, что соотношение (27) примет вид

$$\Phi = \{U_y^G\}_{1 \times 44}^T [PR]_{44 \times 44}^T \int_V [B]^T_{44 \times 5} [C]_{5 \times 5} [B]_{5 \times 44} dV [PR]_{44 \times 44} \{U_y^G\}_{44 \times 1} - \\ - \{U_y^G\}_{1 \times 44}^T [PR]_{44 \times 44}^T \int_F [A]^T_{44 \times 5} \{P\}_{5 \times 1} dF, \quad (25)$$

где $[C]_{5 \times 5}$ – матрица упругости.

Минимизация функционала (25) по глобальным узловым неизвестным $\{U_y^G\}^T$ позволит получить более компактную запись,

$$[K]_{44 \times 44} \{U_y^G\}_{44 \times 1} = [f]_{44 \times 1}, \quad (26)$$

где $[K]_{44 \times 44} = [PR]_{44 \times 44}^T \int_V [B]^T_{44 \times 5} [C]_{5 \times 5} [B]_{5 \times 44} dV [PR]_{44 \times 44}$ – матрица жесткости КЭ;

$[f]_{44 \times 1} = [PR]_{44 \times 44}^T \int_F [A]^T_{44 \times 5} \{P\}_{5 \times 1} dF$ – столбец узловых нагрузок используемого элемента дискретизации.

Пример расчета. Была решена тестовая задача по расчету НДС эллиптического цилиндра (рис. 3).

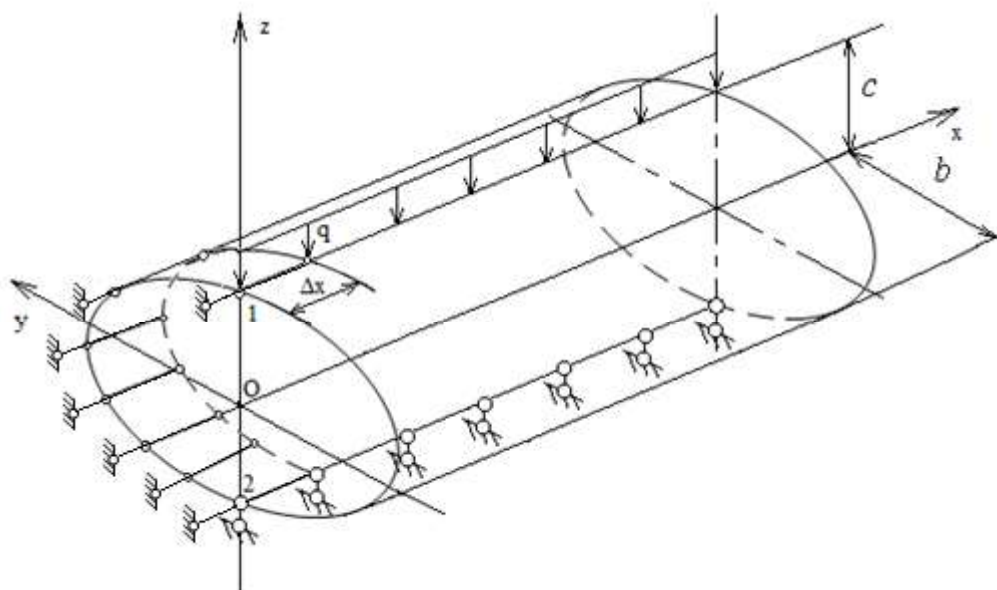


Рис. 3. Эллиптический цилиндр

Цилиндрическая оболочка, нагруженная вдоль образующей распределенной нагрузкой интенсивности q , имеет шарнирные опоры, находящиеся на противоположной стороне цилиндра. Исходные данные: $q = 5 \cdot 10^{-3}$ МПа; $b = 0,1$ м; $h = 0,001$ м; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu = 0$. Величина c принимает значения 0,05 и 0,025 м. Было введено следующее обозначение $n = c/b$. При $n = 1/2$ и $n = 1/4$ цилиндр примет эллиптическую форму.

Результаты расчетов напряжений σ_{tt} при различных вариантах отсчета угла наклона нормали, сгущении сетки дискретизации и величине параметра n на основании скалярной интерполяции представлены в таблицах 1 и 2.

Таблица 1. Нормальные напряжения при отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния

$n = c/b$	Координаты точек (x, t)	Напряжения МПа	Сетка дискретизации				
			25×2	49×2	97×2	145×2	193×2
1/2	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	139,97	159,33	166,43	168,33	168,97
		σ_{tt}^H	-139,77	-157,77	-165,97	-167,23	-168,33
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	137,33	159,37	166,47	168,33	168,97
		σ_{tt}^H	-137,93	-157,73	-165,93	-167,23	-168,33
1/4	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	103,77	133,79	153,32	155,03	156,36
		σ_{tt}^H	-107,33	-133,87	-153,39	-154,97	-155,73
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	13,39	143,13	153,43	155,37	156,16
		σ_{tt}^H	-13,36	-133,36	-153,09	-154,03	-155,79

Таблица 2. Нормальные напряжения при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния

$n = c/b$	Координаты точек (x, t)	Напряжения МПа	Сетка дискретизации				
			25×2	49×2	97×2	145×2	193×2
1/2	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	169,03	171,77	171,37	171,39	171,39
		σ_{tt}^H	-168,33	-170,99	-170,49	-170,49	-170,49
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	168,98	171,06	171,40	171,39	171,39
		σ_{tt}^H	-167,36	-170,97	-170,54	-170,49	-170,49
1/4	Точка (1) приложения силы (0; 0)	σ_{tt}^B	119,13	149,13	157,63	158,39	158,53
		σ_{tt}^H	-113,03	-149,98	-157,03	-158,09	-158,13
	Точка (2) шарнирного опирания (0; π)	σ_{tt}^B	117,08	119,77	156,13	158,43	158,53
		σ_{tt}^H	-109,06	-137,09	-155,99	-157,19	-158,13

Сравнительный анализ показал, что оба варианта дают приемлемые результаты (таблицы 1 и 2), но при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния погрешность менее значительна.

Для получения достоверных значений контролируемых параметров НДС при отсчете угла поворота нормали от ее исходного состояния требуется более густая сетка элементов дискретизации, чем при отсчете угла поворота нормали от ее деформированного состояния.

Опираясь на анализ вышеизложенных расчетов, можно сделать вывод, что вариант отсчета угла поворота нормали от ее деформированного состояния является более корректным и соответствующим физическому смыслу процесса деформирования.

Разработанный математический алгоритм обладает достаточной точностью для инженерных расчетов цилиндрических оболочек эллиптического типа с учетом сдвиговых деформаций, что позволяет использовать его в расчетной инженерной практике.

Литература

1. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. – СПб.: Изд-во С.-Петербург. ун-та, 2010. – 380 с.
2. Джабраилов А.Ш., Николаев А.П., Клочков Ю.В., Гуреева Н.А., Ищанов Т.Р. Нелинейное деформирование осесимметрично нагруженной оболочки вращения на основе МКЭ при различных вариантах определяющих уравнений // Известия Саратовско-

го университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, № 1. – С. 48–61.

3. *Рикардс Р.Б.* Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 248 с.

4. *Черных К.Ф.* Линейная теория оболочек. Ч. 2. Некоторые вопросы теории. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. – 394 с.

5. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 636 с.

6. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1956. – 419 с.

7. *Клочков Ю.В., Андреев А.С., Клочков М.Ю., Черненко У.В.* Алгоритм расчета на прочность тонких оболочечных элементов мелиоративных систем в геометрически нелинейной постановке с учетом поперечного сдвига // Инновационные технологии в агропромышленном комплексе в условиях цифровой трансформации. Материалы Международной научно-практической конференции. – Волгоград, 2022. – С. 133–140.

8. *Салахутдинов М.А., Каюмов Р.А., Арипов Д.Н., Ханеков А.Р.* Численное исследование несущей способности балки составного двутаврового сечения из пултрузионных стеклопластиковых профилей // Известия Казанского государственного архитектурно-строительного университета. 2022. № 2 (60). – С. 15–23.

9. *Магомедов А.М., Лоренс С.А., Челяпина О.И.* Алгоритмический подход к задаче перечисления разбиений прямоугольной полосы // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2023. Т. 38, вып. 2. – С. 39–47.

10. *Курбанов Н.Т., Гадиева С.С., Алиева У.С.* Динамическое кручение вязкоупругого цилиндра // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2022. Т. 37, вып. 1. – С. 18–23.

11. *Сейфуллаева Х.И.* Задача граничной управляемости для уравнения колебаний тонкой пластины // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. 2023. Т. 38, вып. 1. – С. 49–54.

12. *Постнов В.А., Хархурим И.Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых сооружений. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.

13. *Полякова Л.С., Андреев В.И.* Решение осесимметричной задачи термоупругости радиально неоднородной цилиндрической оболочки численно-аналитическим методом и методом конечных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2019. Т. 15, № 4. – С. 323–326.

14. *Железнов Л.П., Серьёзов А.Н.* Нелинейное деформирование и устойчивость подкрепленной композитной цилиндрической оболочки при осевом сжатии // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2022. № 2. – С. 40–48.

15. *Косицын С.Б., Акулич В.Ю.* Численный анализ устойчивости цилиндрической оболочки, взаимодействующей с неоднородным окружающим основанием // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2021. Т. 17, № 6. – С. 608–616.

16. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1976. Т. 1. – 536 с.

Поступила в редакцию 15 августа 2023 г.

Принята 26 августа 2023 г.

UDC 539.3

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-3-18-27

Mathematical Model for Calculating an Elliptical Cylinder Based on a Quadrangular Discretization Element With a Scalar Approximation

T.R. Ishchanov

Volgograd State Agrarian University; 400002, Southern Federal District, Volgograd region, Volgograd, Universitetsky av., 26; ishchanov.volgau@ya.ru

Abstract. The article presents a mathematical algorithm for the finite element calculation of an elliptical cylinder, with regard to the deformation theory. The main geometric relationships between deformations and displacements were considered in two versions: when counting the angle of inclination of the normal to the middle surface from its initial state and from its position in the deformed state. By the example of an elliptical cylinder subjected to a linearly distributed load, a comparative analysis of the effectiveness of two calculation algorithms was carried out. As a result of the numerical analysis of the stress-strain state (SSS) of the cylinder, the need to take into account transverse shear deformations was revealed. The conducted studies made it possible to conclude that it is preferable to use the calculation option, with regard to the angle of rotation of the normal from its deformed state. The given approach makes it possible to achieve satisfactory accuracy of the results when using a relatively sparse bin grid.

Keywords: mathematical algorithm, elliptic cylinder, finite element method, quadrangular bin, transverse shift.

Received 15 August 2023.

Accepted 26 August 2023.