МАТЕМАТИКА

УДК 519.1

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-3-7-17

Х.Н. Абдулрахман[1], Я.М. Ерусалимский[2]

О реализуемости потоков в классических сетях потоками в ресурсных сетях

[1] ФГБОУ ВО «Ростовский государственный университет путей сообщения»; Россия, 344038, г. Ростов-на-Дону, пл. Ростовского стрелкового полка народного ополчения, 2; haidar_74@mail.ru

[2] ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет»; Россия 344006 г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42; ymerusalimskiy@sfedu.ru

Аннотация. В статье рассматривается задача построения ресурсной сети, поток в которой совпадает с заданным потоком в исходной классической сети (т. е. сети, содержащей источник и сток).

Доказано, что эта задача имеет решение (теорема 1). Получено необходимое условие на количество ресурса, распределенного в вершинах ресурсной сети (теорема 2). Введено понятие локального подобия ресурсных сетей. Это позволило доказать теорему 3, из которой следует, что решение задачи построения ресурсной сети, реализующей поток в классической сети, не определено однозначно.

Приведено большое количество примеров, иллюстрирующих полученные результаты.

Ключевые слова: сеть, ресурсная сеть, поток в сети, пропускная способность, максимальный поток, начальное состояние.

Введение

В работах О.П. Кузнецова, Л.Ю. Жиляковой и др. [1–10] рассмотрены ресурсные сети как потоковая модель движения ресурса, первоначально распределенного в вершинах сети.

В работах А.И. Ерзина, И.И. Тахонова рассмотрена задача поиска сбалансированного потока и равновесного распределения ресурсов в сетевой модели [11–12]. В работах Я.М. Ерусалимского, В.А. Скороходова и учеников [14–17] исследованы потоковые задачи в сетях с ограничениями на достижимость, а в работах Х. Абдулрахмана изучены ресурсные сети с ограничениями на достижимость и двухресурсные сети [18–20]. В работе [7] приведен подробный обзор графовых динамических моделей.

Термин *сеть* в настоящее время применяется в двух смыслах – классическом, идущем от Л. Форда и Д. Фалкерсона [21], и ресурсном, идущем от Л.Ю. Жиляковой и О.П. Кузнецова (см., напр., монографию [3]).

Связь между этими «параллельными» понятиями ранее не была рассмотрена. Целью нашего исследования было установление связи между ними.

Главное отличие ресурсных сетей от обычных заключается в том, что функционирование ресурсной сети рассматривается как динамический процесс, а обычных сетей в классической постановке – как стационарный [9–11].

В настоящей работе рассмотрена задача построения ресурсной сети, поток в которой совпадает с заданным потоком в исходной классической сети (т. е. сети, содержащей источник и сток).

Для этого потребуется:

- добавить дугу, ведущую из стока в источник;
- переопределить пропускные способности дуг исходной сети так, чтобы «убрать» стохастику в функционировании ресурсной сети;
- определить начальное распределение ресурса.

Основные определения

Для графов мы будем пользоваться определениями и обозначениями из [13].

Определение 1. Сетью называется связный ориентированный граф $G(X,U,f,\rho)$ без петель, в котором существует такая вершина x_I, называемая источником, у которой $deg_- x_I = 0$, и такая вершина x_S, называемая стоком, у которой $deg_- x_S > 0$, $deg_+ x_S = 0$, а для всех остальных вершин $x \in X$, называемых промежуточными вершинами, выполнено $deg_- x > 0$, $deg_+ x > 0$.

Каждой дуге $u \in U$ сети поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число – пропускная способность дуги $\rho(u)$.

Определение 2. В соответствии с работой Л.Р. Форда, Д.Р. Фалкерсона [21] потоком в сети называется отображение $\varphi : U \to [0,+\infty)$, удовлетворяющее двум условиям:

1. для каждой дуги сети $u \in U$ выполнено $\varphi(u) \le \rho(u)$;
2. для каждой промежуточной вершины сети $x \in X$ выполняется равенство, называемое условием неразрывности потока
$$\sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u) = \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u). \tag{1}$$

Определение 3. Дуга $u \in U$ сети G называется насыщенной потоком φ, если $\varphi(u) = \rho(u)$.

Определение 4. Ресурсной сетью $G(X,\ U,\ f,\ \rho)$ будем называть связный ориентированный граф без петель, в котором каждой дуге $u \in U$ поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число – пропускная способность дуги $\rho(u)$ – и заданы правила функционирования, приведенные ниже.

Функционирование ресурсной сети происходит в дискретном времени Z_+. На $X \times Z_+$ задана рекурсивно ресурсная функция $q(x,t)$, принимающая неотрицательные значения, её значение $q(x,t)$ называется количеством ресурса в вершине x в момент времени t.

Состоянием сети в момент времени t (≥ 0) будем называть вектор-функцию $Q(t) = (q(x,\ t))$, $x \in X$.

Начальным (задаваемым) распределением ресурса в сети называется состояние $Q(0)$. Суммарный ресурс, распределенный в сети, обозначают W, полагая $W = \sum_{x \in X} q(x,\ 0)$.

На $U \times Z_+$ задана рекурсивно потоковая функция $\varphi(u,t)$, принимающая неотрицательные значения, её значение $\varphi(u,t)$ называется потоком по дуге u в момент времени t. Полагают, что начальный поток на дугах ресурсной сети тождественно равен нулю, т. е. $\varphi(u,0) = 0,\ \forall u \in U$.

Дальнейшее функционирование ресурсной сети $(t \geq 1)$ удовлетворяет следующим предположениям:

- ресурс не поступает извне и не расходуется, т. е. $\sum_{x \in X} q(x,t) = W$ при любом $t > 0$;
- поток (потоковая функция) $\varphi(u,t)$ удовлетворяет условиям:
  1. $\varphi(u,t) \leq \rho(u)$;
  2. $\varphi(u,t) = \rho(u)$, если $q(x,t) \geq \sum_{v \in U_+(x)} \rho(v)$, $f(u) = (x,y)$ (правило 1), в противном случае $\varphi(u,t) = \frac{\rho(u)}{\sum_{v \in U_+(x)} \rho(v)} \cdot q(x,t)$, $f(u) = (x,y)$ (правило 2);
- считается, что поток $\varphi(u,\ t)$ по дуге u $(f(u) = (x,y))$ в момент времени t уменьшает количество ресурса в вершине x в момент времени $t+1$ на величину $\varphi(u,t)$ и увеличивает количество ресурса в вершине y в момент времени $t+1$ на величину $\varphi(u,\ t)$.

Таким образом, поток в ресурсных сетях зависит от дискретного времени t и удовлетворяет вместе с ресурсной функцией следующим балансовым соотношениям:

$$q(x,t+1) = q(x,t) - \sum_{u \in U_+(x)} \varphi(u,t) + \sum_{u \in U_-(x)} \varphi(u,t),\ \forall x \in X. \quad (2)$$

Определение 5. Состояние ресурсной сети $Q(t)$ называется устойчивым, если оно, начиная с какого-то момента времени T, не зависит от времени, т. е. выполняется условие $Q(t) = Q(t+1) = Q(t+2) = \cdots,\ t \geq T$.

Задача построения ресурсной сети, порождаемой классической сетью и потоком в ней

Ранее мы определили два типа сетей – обычные (классические) сети (с источником и стоком) и ресурсные сети. Общее для них то, что они являются ориентированными графами с заданной на дугах пропускной способностью, а их функционирование отличается принципиально. Для первых определен стационарный поток, а функционирование ресурсных сетей происходит в дискретном времени и является сложным процессом перераспределения ресурса, находящегося в вершинах сети, потоком, заданным на дугах, зависящем от времени и определяемым правилами 1 и 2 (см. выше).

Ясно, что стационарный поток в обычной сети тоже можно считать процессом переноса ресурса по вершинам сети, но в каждый момент времени ресурс должен поступать в источник извне и накапливаться в стоке сети (или выдаваться стоком из сети).

Естественным является вопрос о построении по исходной классической сети и стационарному потоку в ней такой ресурсной сети и начальном распределении ресурса в ней, которое обеспечит такое её функционирование, при котором поток ресурса (при выполнении правил 1 и 2 и балансового соотношения (2)) на её дугах совпадал с соответствующим стационарным потоком исходной сети.

Рассмотрим классическую сеть $G(X,\ U,\ f,\ \rho)$ и поток φ, заданный на её дугах.

По потоку φ построим ресурсную сеть $G_\varphi(X,\ U \cup \{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$ следующим образом:

1. Добавленная дуга u_{SI} соединяет сток с источником.
2. $f'|_U = f$.
3. $\rho'(u) = \varphi(u)$ для любой $u \in U$, $\rho'(u_{SI}) = \sum_{u \in U_-(x_S)} \varphi(u)$.

Пример 1. Рассмотрим сеть $G(X,U,f,\rho)$, изображенную на рисунке 1 (числа, стоящие около дуг, – их пропускные способности), и максимальный поток в ней (его значения указаны числами, стоящими в скобках около дуг).

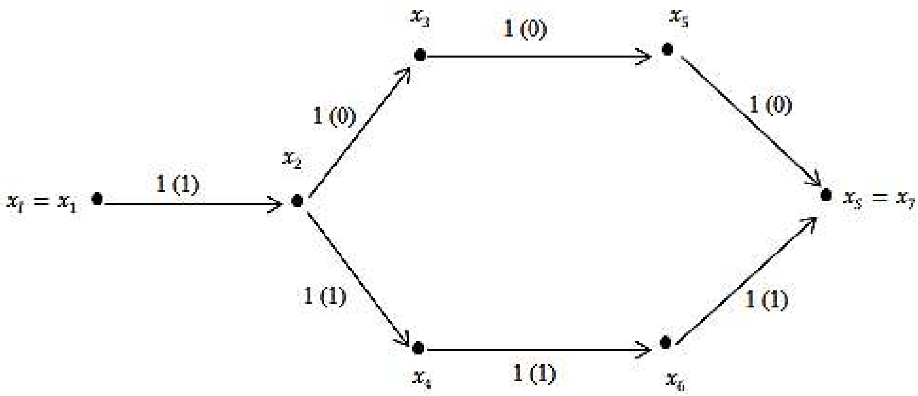

Рис. 1

На рисунке 2 изображена ресурсная сеть $G_\varphi(X,\ U \cup \{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$, построенная по сети с рис. 1. Числа, стоящие в скобках около вершин, – начальное распределение ресурса. Около дуг указаны их пропускные способности. Поток в этой ресурсной сети стационарен и совпадает с потоком в сети на рис. 1.

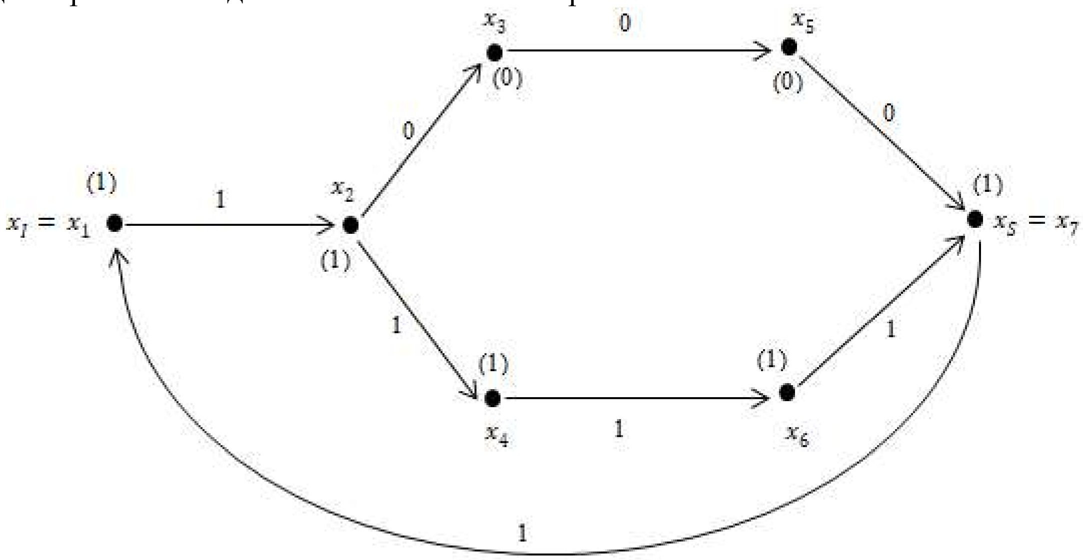

Рис. 2

Теорема 1. Для любого потока φ в классической сети $G(X, U, f,\ \rho)$ и построенной ресурсной сети $G_\varphi(X, U\ \cup \{u_{SI}\}, f', \rho')$ существует начальное распределение ресурса $Q_\varphi(0)$, при котором распределение ресурса стационарно с момента времени $T = 0$, и поток на дугах ресурсной сети совпадает со стационарным потоком φ в исходной сети.

Доказательство. Определим начальное распределение ресурса $Q_\varphi(0)$ в ресурсной сети $G_\varphi(X,\ U\ \cup\ \{u_{SI}\},\ f', \rho')$ следующим равенством:

$$q_\varphi(x,0) = \begin{cases} \sum\limits_{u \in U_+(x)} \varphi(u), & x \in X \setminus \{x_S\}; \\ \sum\limits_{u \in U_-(x)} \varphi(u), & x = x_S. \end{cases} \tag{3}$$

Ясно, что соотношение (3) и определение пропускных способностей ρ' дуг ресурсной сети таково, что в определении потока в ресурсной сети «работает» только правило 1, приводящее в этом случае к равенству потока на дугах в ресурсной сети $G_\varphi(X,\ U\ \cup\ \{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$ стационарному потоку φ исходной классической сети.

Выполнение для стационарного потока φ в классической сети условия неразрывности потока (условие (1)) в каждой из промежуточных вершин приводит к тому, что в балансовом соотношении (2) для ресурсной сети $G_\varphi(X,\ U\ \cup\ \{u_{SI}\}, f',\ \rho')$ «пропадают» два последних слагаемых при любом $t \geq 0$. Последнее и обеспечивает стационарность распределения ресурса в построенной ресурсной сети $G_\varphi(X,\ U\ \cup\ \{u_{SI}\}, f',\ \rho')$.

Очевидно, что справедлива теорема 2, названная нами необходимым условием для начального распределения ресурса.

Теорема 2. (Необходимое условие для начального распределения ресурса). Условие

$$\sum_{x\in X} q(x,0) \geq \sum_{u\in U} \varphi(u) \tag{4}$$

для начального распределение ресурса $Q(0) = \big(q(x,0)\big)$, $x \in X$ в ресурсной сети является необходимым условием реализуемости потока φ в классической сети потоком в соответствующей ресурсной сети.

Замечание 1. Построенная в теореме 1 ресурсная сеть $G_\varphi(X,\ U\ \cup\ \{u_{SI}\},\ f',\rho')$ является эйлеровой ресурсной сетью в смысле определения из [8] и соответствует доказанному в ней утверждению о функционировании эйлеровой ресурсной сети. Если поток φ максимален, то все её дуги насыщены потоком.

Замечание 2. Теорема 1 справедлива для любого начального распределения ресурса, удовлетворяющего более общему начальному условию (5):

$$Q_\varphi(x,0) \geq \begin{cases} \sum\limits_{u\in U_+(x)} \varphi(u), & x \in X\backslash\{x_S\}; \\ \sum\limits_{u\in U_-(x)} \varphi(u), & x = x_S. \end{cases} \tag{5}$$

Замечание 3. Для классических сетей, не содержащих циклов, теорема 1 будет справедлива и для других начальных состояний ресурсной сети $G_\varphi(X,\ U\ \cup\ \{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$, а именно

$$Q_\varphi(x,0) \geq \begin{cases} W, & x \neq x_I; \\ 0, & x = x_I. \end{cases}$$

При этом стационарность распределения ресурса и совпадение потока ресурса в сети $G_\varphi(X, U\ \cup\ \{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$ со стационарным потоком в исходной сети будет иметь место при $T_0 \geq |X|$.

Определение. По ресурсной сети $G_\varphi(X,\ U\ \cup\ \{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$ и произвольному набору вещественных чисел $\{k_x\}$, $x \in X$, $k_x \geq 1$ построим ресурсную сеть $\tilde{G}_{\varphi,k_x}(X,\ U \cup \{u_{SI}\},\ f', \tilde{\rho})$, положив $\tilde{\rho}(u) = k_x \cdot \rho'(u)$, $u \in U_+(x)$.

Ресурсную сеть $\tilde{G}_{\varphi,k_x}(X,\ U \cup \{u_{SI}\},\ f',\ \tilde{\rho})$ будем называть локально подобной ресурсной сети $G_\varphi(X,\ U \cup \{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$.

Говорят, что ресурсная сеть $\tilde{G}_{\varphi,k_x}(X,\ U\cup\{u_{SI}\},\ f',\tilde{\rho})$ нетривиально локально подобна ресурсной сети $G_{\varphi}(X,\ U\cup\{u_{SI}\}, f',\ \rho')$, если хотя бы один из коэффициентов k_x не равен единице.

Для локально подобных сетей справедлива

Теорема 3. Любая локально-подобная сеть $\tilde{G}_{\varphi,k_x}(X,\ U\cup\{u_{SI}\},\ f',\tilde{\rho})$ функционирует стационарно с момента времени $T=0$, и поток на её дугах совпадает со стационарным потоком φ в исходной классической сети $G(X,\ U,\ f,\ \rho)$, если начальное распределение ресурса $Q(0)$ задано в ней равенством (3).

В случае если сеть $\tilde{G}_{\varphi,\,k_x}(X,\ U\cup\{u_{SI}\},\ f',\ \tilde{\rho})$ нетривиально локально подобна ресурсной сети $G_{\varphi}(X,\ U\cup\{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$, то указанное выше начальное распределение ресурса является не только достаточным условием, но и необходимым.

Доказательство. Для дуг, выходящих из вершин, для которых $k_x=1$, это очевидно. Если вершина x такова, что $k_x>1$, то распределение ресурса, находящегося в ней, в поток по исходящим дугам определяется правилом 2 из определения функционирования ресурсной сети, которое в этом случае «создает» на этих дугах необходимый поток.

Ниже мы приводим несколько примеров, которые, на наш взгляд, иллюстрируют доказанное в теореме 1, а также демонстрируют в каком-то смысле не только её достаточность, но и необходимость.

Пример 2. Рассмотрим сеть $G(X,\ U,\ f,\ \rho)$ примера 1 (рис. 1) и в ней другой максимальный поток (его значения указаны в скобках около дуг на рис. 3).

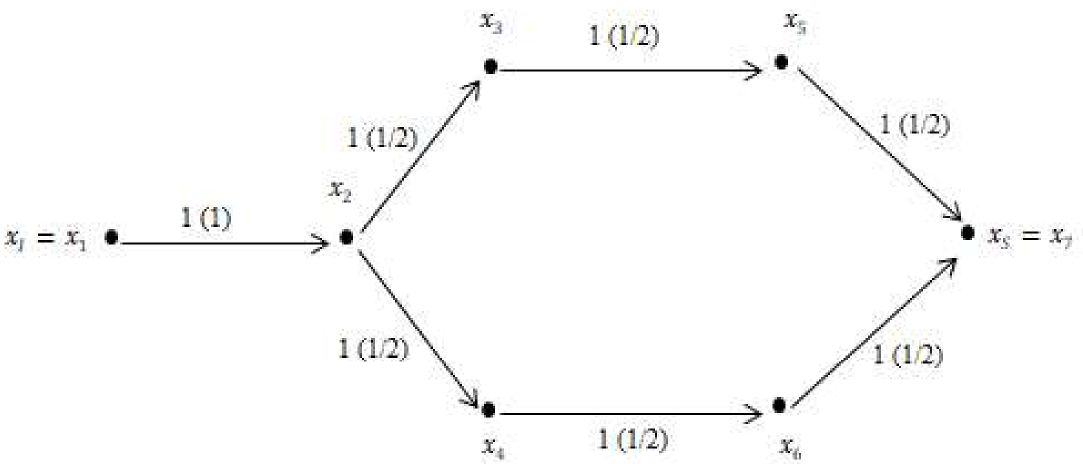

Рис. 3

На рис. 4 изображена ресурсная сеть, соответствующая максимальному потоку, приведенному на рис. 3.

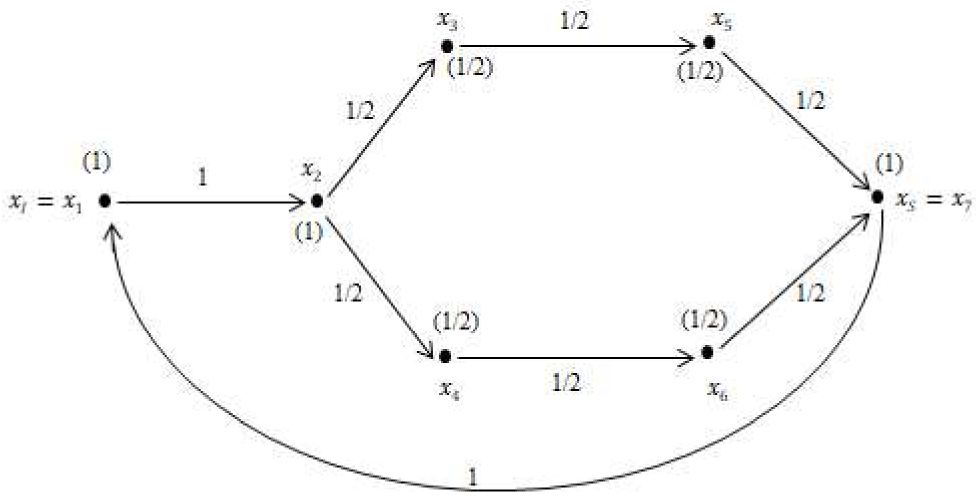

Рис. 4

Начальное распределение ресурса указано на рис. 4 в скобах около вершин.

Пример 3. На рис. 5 приведена ресурсная сеть нетривиально локально подобная ресурсной сети, приведенной на рис. 4.

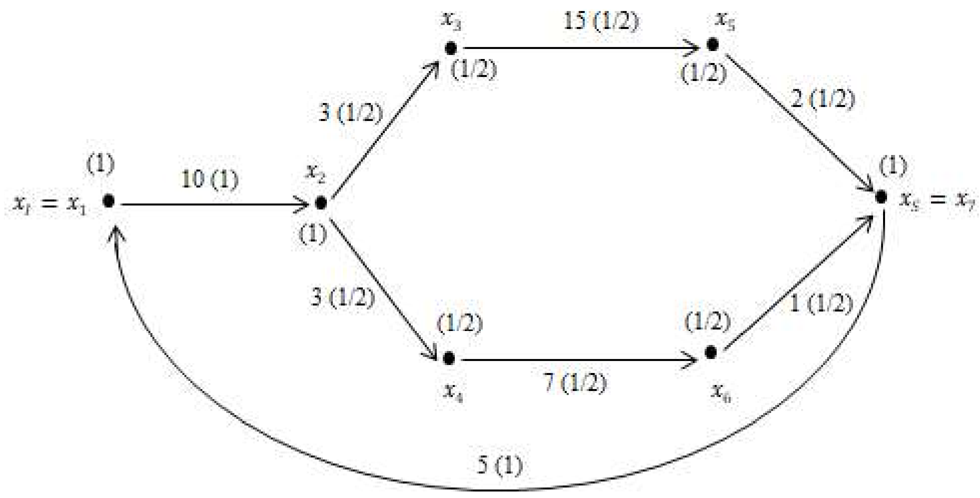

Рис. 5. Ресурсная сеть локально-подобной сети примера 2 (рис. 4)

На рис. 5 числа, указанные в скобках около вершин, – стационарное распределение ресурса, а числа, указанные в скобках около дуг, – стационарный поток.

Пример 4. На рис. 6 приведен пример, показывающий, что без изменения пропускных способностей сети примера 1 при построении ресурсной сети, а только задав начальное распределение ресурса, мы не сможем реализовать рассмотренный поток в виде потока в ресурсной сети.

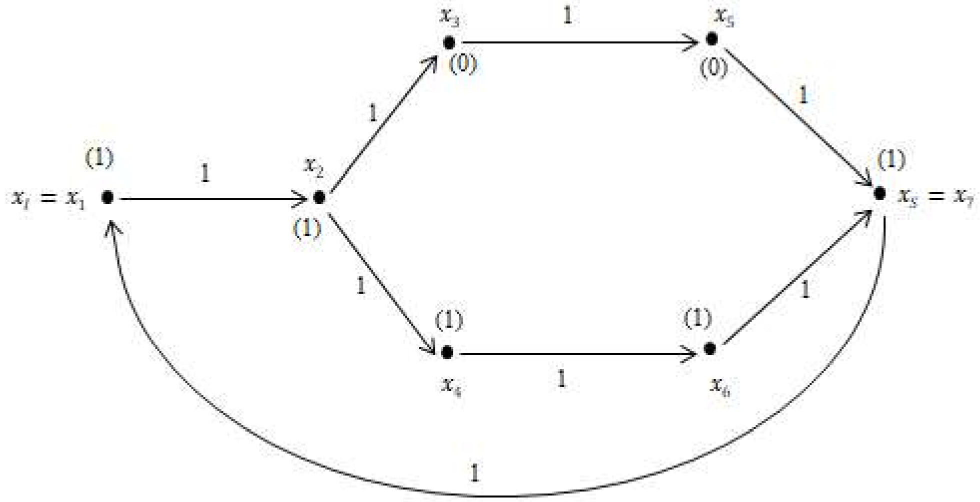

Рис. 6

Распределение ресурса в этой сети при $t = 1$ приведено на рис. 7, а состояния ресурсной сети при $t = 2, 3, 4, \ldots$ на рис. 8.

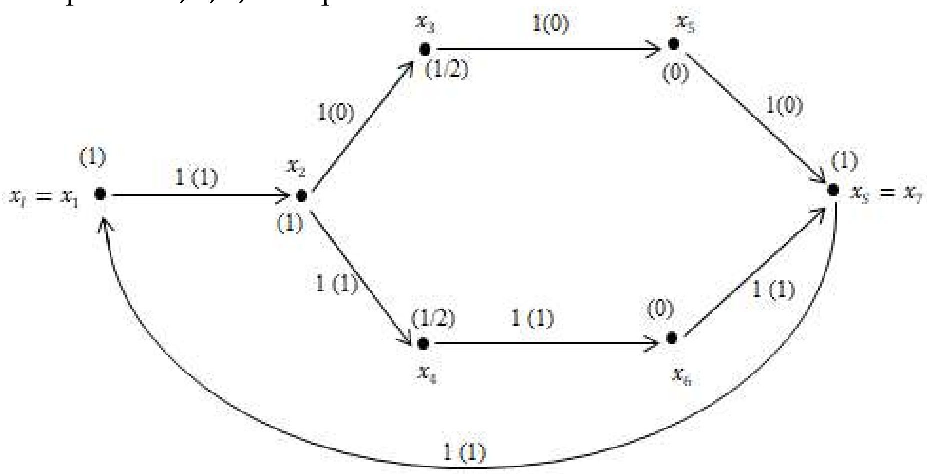

Рис. 7. Ресурсная сеть $G_\varphi(X,\ U \cup \{u_{SI}\},\ f',\ \rho'),\ t = 1$

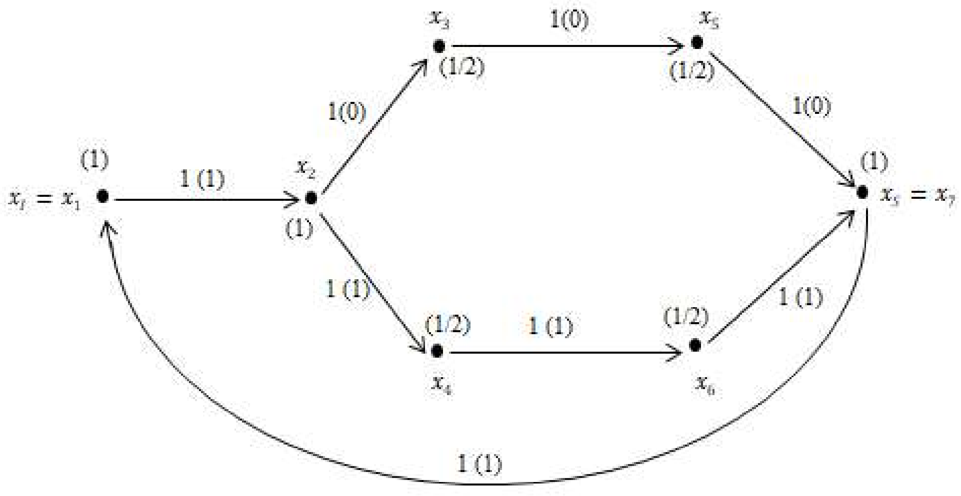

Рис. 8. Ресурсная сеть $G_\varphi(X,\ U \cup \{u_{SI}\},\ f',\ \rho'),\ t = 2,\ 3,\ 4,\ \ldots$

Пример 5. Рассмотрим сеть примера 2 (рис. 3) и ресурсную сеть с заданным начальным распределением ресурса, приведенную на рис. 9. В ней максимальный поток исходной сети реализуется как поток в ресурсной сети, начиная с $t = 5$.

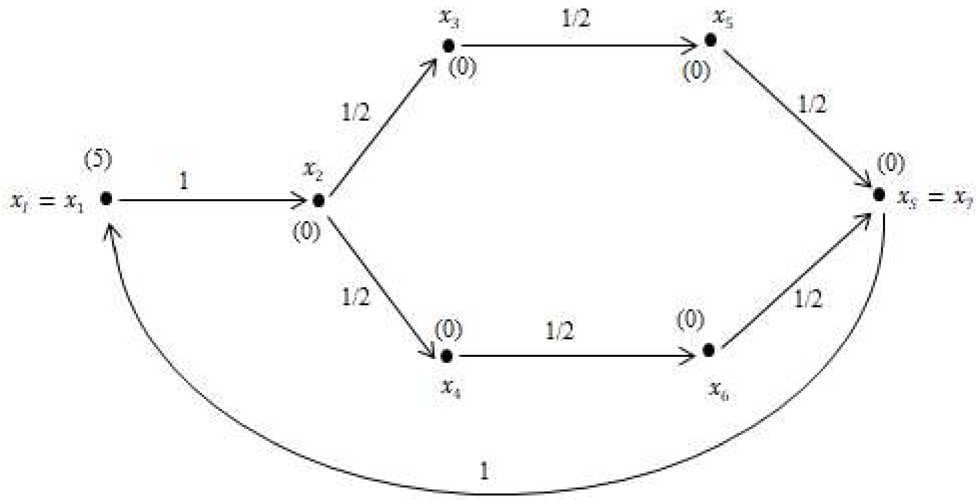

Рис. 9

На рис. 10 показаны состояния $Q(0)$, $Q(1)$, $Q(2)$, $Q(3)$, … в этой ресурсной сети $G_\varphi(X,\ U \cup \{u_{SI}\},\ f',\ \rho')$ (указаны в скобках около вершин) и значения потока на дугах (в скобках около дуг).

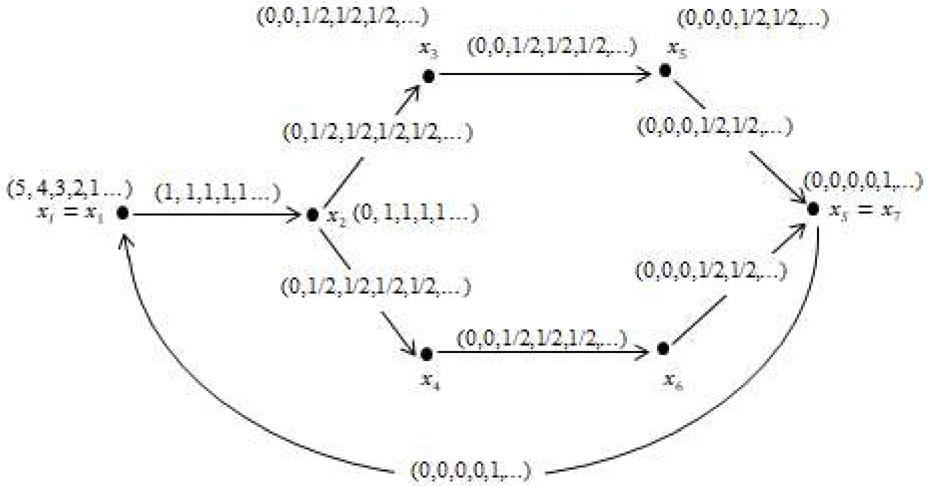

Рис. 10

Пример 6. На рис. 11 приведен пример сети и максимального потока в ней, для которой ресурсная сеть с исходным распределением ресурса, соответствующим теореме 1, воспроизводит этот максимальный поток, а никакое начальное распределение ресурса в ней, сосредоточенное в источнике, этот максимальный поток не реализует (даже начиная с какого-то момента времени).

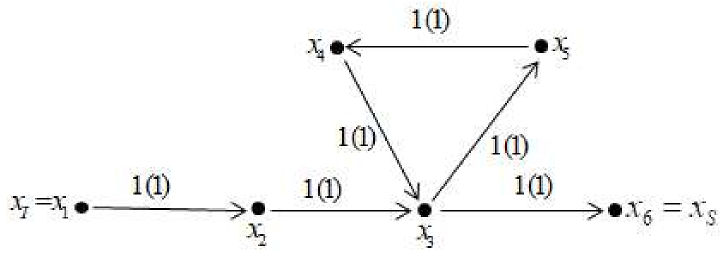

Рис. 11

Авторы выражают благодарность Людмиле Юрьевне Жиляковой за обсуждение полученных результатов и рецензентам за ценные замечания, улучшившие текст статьи.

Литература

1. *Кузнецов О.П., Жилякова Л.Ю.* Полные двусторонние ресурсные сети с произвольными пропускными способностями // Управление большими системами. – М.: ИПУ РАН, 2010. – С. 640–664.

2. *Кузнецов О.П., Жилякова Л.Ю.* Полные двусторонние ресурсные сети с произвольными пропускными способностями // Управление большими системами. Специальный выпуск 30.1 "Сетевые модели в управлении". – М.: РИОР; Инфра-М, 2017. – С. 640–664.

3. *Жилякова Л.Ю., Кузнецов О.П.* Теория ресурсных сетей: монография. – М.: РИОР: ИНФРА-М, 2017. – 283 с.

4. *Жилякова Л.Ю.* Несимметричные ресурсные сети. I. Процессы стабилизации при малых ресурсах // Автоматика и телемеханика. 2011. № 4. – С. 133–143.

5. *Жилякова Л.Ю.* Полные несимметричные ресурсные сети. Случай одного приемника // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2011. № 4 (164). – С. 14–18.

6. *Жилякова Л.Ю.* Управление предельными состояниями в поглощающих ресурсных сетях // Проблемы управления. 2013. № 3. – С. 51–59.

7. *Жилякова Л.Ю.* Графовые динамические модели и их свойства // Автоматика и телемеханика. 2015. № 8. – С. 115–139.

8. *Жилякова Л.Ю.* Исследование эйлеровых ресурсных сетей // Управление большими системами. Вып. 41. – М.: ИПУ РАН, 2013. – С. 28–50.

9. *Zhilyakova L.* Single-Threshold Model Resource Network and Its Double-Threshold Modifications // Mathematics. 2021. № 9 (12). – P. 1444.

10. *Zhilyakova L., Koreshkov V., Chaplinskaia N.* Some Properties of Stochastic Matrices and Non-Homogeneous Markov Chains Generated by Nonlinearities in the Resource Network Model. Mathematics. 2022. № 10 (21). – P. 4095.

11. *Ерзин А.И., Тахонов И.И.* Задача поиска сбалансированного потока // Сибирский журнал индустриальной математики. 2006, Т. IX, № 4 (28). – С. 50–63.

12. *Ерзин А.И., Тахонов И.И.* Равновесное распределение ресурсов в сетевой модели // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. VIII, № 3 (23). – С. 58–68.

13. *Ерусалимский Я.М.* Дискретная математика: теория, задачи, приложения. – М.: Вузовская книга, 2001. – 279 с.

14. *Скороходов, В.А., Чеботарева, А.С.* Задача о максимальном потоке в сети с особыми условиями распределения потока // Дискретный анализ и исследование операций. 2015. Т. 22, № 3. – С. 55–74.

15. *Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А., Кузьминова М.В., Петросян А.Г.* Графы с нестандартной достижимостью: задачи, приложения. – Ростов н/Д: Южный федеральный ун-т, 2009.
16. *Ерусалимский Я.М.* Потоки в сетях с нестандартной достижимостью // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. № 1. – С. 5–7.
17. *Ерусалимский Я.М., Логвинов С.Ю.* Некоторые задачи достижимости на графах с ограничениями // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 1996. № 2. – С. 14.
18. *Абдулрахман Х., Ерусалимский Я.М., Скороходов В.А.* Ресурсные сети с вентильной достижимостью // Инженерный вестник Дона. 2018. № 4. – 12 с. – Режим доступа: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4y2018/5264.
19. *Абдулрахман Х., Скороходов В.А.* Полные двухресурсные сети с петлями // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 2. – С. 10–16.
20. *Абдулрахман Х., Скороходов В.А.* Ресурсные сети с магнитной достижимостью // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2016. № 4. – С. 4–10.
21. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях: пер. с анг. – М.: Мир, 1966. – 276 с.

Поступила в редакцию 31 июля 2023 г.
Принята 15 августа 2023 г.

UDC 519.1

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-3-7-17

On the Realizability of Flows in Classical Networks by Flows in Resource Networks

H.N. Abdulrahman[1], I.M. Erusalimskiy[2]

[1] Rostov State Transport University (RSTU); Russia, Rostovskogo Strelkovogo Polka Narodnogo Opolcheniya Sq. 2, Rostov-on-Don, 344038; haidar_74@mail.ru
[2] Southern Federal University; Russia, Bolshaya Sadovaya st. 105/42, Rostov-on-Don, 344006; ymerusalimskiy@sfedu.ru

Abstract. The article deals with the problem of constructing a resource network in which the flow coincides with a given flow in the original classical network (i.e., a network containing a source and a drain).

It is proved that this problem has a solution (Theorem 1). The necessary condition for the amount of resource distributed at the vertices of the resource network is obtained (Theorem 2). The concept of local similarity of resource networks is introduced. This has made it possible to demonstrate the theorem 3, suggesting that the problem of constructing a resource network implementing a flow in a classical network is not uniquely determined.

The article contains many examples illustrating the results obtained.

Keywords: Network, resource network, flows in networks, capacity, maximum flow, initial state.

Received 31 July 2023
Accepted 15 August 2023