

УДК 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-1-55–65

М.Л. Амаева

Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы n обобщенных уравнений Бельтрами

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; markha15@mail.ru

Локальные характеристики математических моделей сильно неоднородных сред обычно описываются функциями вида $a(\varepsilon^{-1}x)$, где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, причем функция $a(x)$ имеет упорядоченную структуру (например, периодическую, почти периодическую и т. д.). Поэтому соответствующие математические модели есть дифференциальные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами, которые невозможно решить численными методами. В связи с этим математики переходят от дифференциального уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами к усредненному уравнению. Получены оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы n обобщенных уравнений Бельтрами при минимальных требованиях на коэффициенты – ограниченные измеримые периодические квадратные матрицы порядка n .

Ключевые слова: *уравнение Бельтрами, усреднение, G -сходимость.*

Введение

Теория усреднения – это раздел уравнений в частных производных, который развивается с 70-х годов XX века. Теория усреднения применяется в физике, механике сплошных сред и в других областях. В совместной работе [1] В.В. Жикова и С.Е. Пастуховой изложены методы, которые позволяют получить операторные оценки, а в работе [2] М.М. Сиражудинова асимптотическими методами получены операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами. В работах [3], [4] изучены вопросы усреднения и более общие вопросы G -сходимости обобщенных уравнений Бельтрами. Вопросы, связанные с оценкой погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы двух уравнений Бельтрами, рассмотрены в работе [5]. В статье анализируется оценка погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы n обобщенных уравнений Бельтрами. Аналогичные оценки для системы n уравнений Бельтрами получены в работе [6].

Обозначения:

$\mathbb{R}^2$ – плоскость; $Q \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей;

$\bar{Q}$ – замыкание области Q ;

$\partial_{\bar{z}} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2)$,

$\partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2)$;

$\mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, 2$;

i – мнимая единица;

$W_p^k(Q; \mathbb{C})$ – пространство Соболева комплекснозначных вектор-функций;

$L_2(Q; \mathbb{C})$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых компонентных вектор-функций;

$W_2^1(Q; \mathbb{C})$ – подпространство пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, состоящее из элементов с нулевым следом на границе;

$\square, \square_T$ – квадрат со стороной, параллельной оси координат (ячейка периодов); T – длина стороны;

$|\square| = T^2$ – площадь квадрата $\square$. Периодической будем называть функцию периода T по каждой переменной.

$\langle u \rangle$ – среднее значение периодической функции u , то есть

$$\langle u \rangle = |\square|^{-1} \int_{\square} u(x) dx.$$

$W_p^1(\square; \mathbb{C}), L_p(\square; \mathbb{C}), p \geq 1$ – пространства Соболева и Лебега периодических вектор-функций.

$W_2^{-1}(\square; \mathbb{C})$ – пространство, сопряженное с $W_2^1(\square; \mathbb{C})$.

Пространство, сопряженное с $L_2(\square; \mathbb{C})$, отождествляем с $L_2(\square; \mathbb{C})$, что возможно в силу теоремы Рисса.

$\rightarrow$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

Как известно, если $g(x)$ ($x \in \mathbb{R}^2$) – периодическая функция, $g \in L_p(\square; \mathbb{C}), p \geq 1$, то $g(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \langle g \rangle$ в пространстве $L_{p, \text{loc}}(Q; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, где Q – произвольная ограниченная область плоскости.

$W_0(Q)$ – подпространство пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют соотношениям

$$\operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \int_Q \operatorname{Im} u \, dx = 0.$$

В случае, когда это не вызывает недоразумений, как уравнение, так и оператор соответствующей краевой задачи обозначим одним и тем же символом.

$y_j = \varepsilon^{-1}x_j, j = 1, 2$ – «быстрые» переменные.

∇, ∇_y – градиент, y в индексе означает, что производные берутся по переменным y_1, y_2 .

Пространства, используемые в данной работе, – пространства над полем действительных чисел.

1. Формулировка результатов

1.1. Задача Римана–Гильберта

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта

$$\begin{cases} Au \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u + \nu \partial_{\bar{z}} \bar{u} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u \in W_0(Q) = \{u \in W_2^1(Q; \mathbb{C}) \mid \operatorname{Re} u|_{\partial Q} = 0, \int_Q \operatorname{Im} u \, dx = 0\}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где коэффициенты $\mu(x) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(x) & \cdots & \mu_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(x) & \cdots & \mu_{nn}(x) \end{pmatrix}, \nu(x) = \begin{pmatrix} \nu_{11}(x) & \cdots & \nu_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_{n1}(x) & \cdots & \nu_{nn}(x) \end{pmatrix}$ – ограниченные измеримые периодические квадратные матрицы порядка n , удовлетворяющие условию эллиптичности

$$\operatorname{vrai} \sup_{x \in Q} (\|\mu(x)\| + \|\nu(x)\|) \leq k_0 < 1, \quad (1.2)$$

$k_0 > 0$ – постоянная (константа эллиптичности), $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\|\mu(x)\|$ и

$\|v(x)\|$ – нормы матриц, которые рассматриваются как операторы умножения в $\mathbb{C}^n$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. Задача Римана–Гильберта (1.1) однозначно разрешима для любой правой части $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$, причем имеют место априорные оценки

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}^2 \leq \operatorname{Re} \int_Q Au \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx, u \in W_0(Q),$$

$$(1 - k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \|Au\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq (1 + k_0) \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, u \in W_0(Q),$$

где $Au \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u}$ – скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$.

Доказательство теоремы 1 приведено в [4].

Выражение

$$\|u\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}, u \in W_0(Q)$$

задает в подпространстве $W_0(Q)$ норму, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ (см. [4]), поэтому имеют место следующие оценки:

$$c_1 \|u\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq \|Au\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c_2 \|u\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad (1.3)$$

где $c_1, c_2 > 0$ – постоянные, зависящие только от константы эллиптичности k_0 и области Q .

1.2. G-сходимость

Обозначим через $\mathcal{A}(k_0; Q)$ множество систем обобщенных операторов Бельтрами (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Скажем, что последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$ G -сходится в области Q к оператору $A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ (обозначение: $A_k \xrightarrow{G} A$), если последовательность $\{A_k^{-1}\}$ слабо сходится к A^{-1} , где A_k^{-1} , A^{-1} – операторы, обратные к операторам A_k , A задачи Римана–Гильберта.

Это определение ввиду оценок (1.3) и компактности вложения $W_2^1(Q; \mathbb{C}) \subset L_2(Q; \mathbb{C})$ эквивалентно следующему: последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$ G -сходится в области Q к оператору $A \in \mathcal{A}(k_0; Q)$, если для любого $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$ последовательность $\{u_k\}$ решений задачи Римана–Гильберта $A_k u_k = f$, $u_k \in W_0(Q)$ сходится в $L_2(Q; \mathbb{C})$ к решению задачи Римана–Гильберта $Au = f$, $u \in W_0(Q)$.

G -предел определен единственным образом.

G -сходимость обладает свойством сходимости «произвольных» решений. Пусть $A_k \xrightarrow{G} A$, $u_k \rightarrow u$ в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, $f_k \rightarrow f$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ при $k \rightarrow \infty$ и $A_k u_k = f_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$, тогда $Au = f$ (см. [4]).

1.3. Усреднение

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon + \nu^\varepsilon \partial_{\bar{z}} \overline{u_\varepsilon} = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q), \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\text{где} \quad \mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x), \quad v^\varepsilon = v(\varepsilon^{-1}x); \quad \mu(x) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(x) & \cdots & \mu_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(x) & \cdots & \mu_{nn}(x) \end{pmatrix},$$

$$v(x) = \begin{pmatrix} v_{11}(x) & \cdots & v_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1}(x) & \cdots & v_{nn}(x) \end{pmatrix} - \text{ограниченные измеримые периодические квадратные}$$

матрицы порядка n , удовлетворяющие условию эллиптичности (1.2) на всей плоскости.

Очевидно, что оператор A_ε принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0; Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если для любой правой части f семейство решений u_ε задачи (1.4) сходится в $L_2(Q; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению аналогичной задачи с постоянными матрицами коэффициентов.

В вопросах усреднения важную роль играет ядро оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного оператору периодической задачи

$$\mathcal{A}u \equiv \partial_{\bar{z}}u + \mu(x)\partial_z u + v(x)\partial_{\bar{z}}\bar{u} = f \in L_2(\square; \mathbb{C}), \quad u \in W_2^1(\square; \mathbb{C}). \quad (1.5)$$

Сформулируем результаты по периодической задаче, необходимые в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 2. Справедливы следующие утверждения:

- Для периодической задачи (1.5) справедливо «неравенство острого угла»
 $(1 - k_0)\langle |\partial_{\bar{z}}u|^2 \rangle \leq \operatorname{Re}\langle \mathcal{A}u \cdot \partial_{\bar{z}}\bar{u} \rangle, \quad u \in W_2^1(\square; \mathbb{C}).$
- Периодическая задача (1.5) фредгольмова.
- Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*: L_2(\square; \mathbb{C}) \rightarrow W_2^{-1}(\square; \mathbb{C})$ определяется формулой

$$-\mathcal{A}^*\mathcal{P} = \partial_z\mathcal{P} + \partial_{\bar{z}}(\mu^*\mathcal{P} + v^t\bar{\mathcal{P}}), \quad \mathcal{P} \in L_2(\square; \mathbb{C}),$$

где производные понимаются в смысле распределений, μ^* – сопряженная μ матрица, то есть матрица, полученная из μ транспонированием и переходом к комплексно сопряженным элементам, v^t – транспонированная матрица.

• Ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$, $\operatorname{Ker} \mathcal{A} (= \mathbb{C}^n)$ – $2n$ -мерные подпространства соответствующих пространств (напомним, что пространства у нас – пространства над полем $\mathbb{R}$), причем один из базисов ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$, обозначим его

$$\mathcal{P}_{11} = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathcal{P}_{1n} = \begin{pmatrix} p_{1n} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}, \mathcal{P}_{1n+1} = \begin{pmatrix} q_{11} \\ \vdots \\ q_{n1} \end{pmatrix}, \dots, \mathcal{P}_{12n} = \begin{pmatrix} q_{1n} \\ \vdots \\ q_{nn} \end{pmatrix},$$

обладает следующими свойствами: пусть

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}^t, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}^t,$$

тогда средние значения этих матриц даются равенствами

$$\langle \mathcal{P}_1 \rangle = E, \quad \langle \mathcal{P}_2 \rangle = iE,$$

где E – единичная матрица порядка n .

Доказательство этой теоремы приведено в [7].

ТЕОРЕМА 3 (об усреднении). Для семейства операторов (1.4) $A_\varepsilon = \partial_{\bar{z}} + \mu^\varepsilon \partial_z + v^\varepsilon \partial_{\bar{z}}$ имеет место усреднение, причем коэффициенты μ^0 и v^0 усредненного оператора $A_0 = \partial_{\bar{z}} + \mu^0 \partial_z + v^0 \partial_{\bar{z}}$ есть постоянные матрицы, определяемые равенствами

$$\mu^0 = \langle \mathcal{L}\mu + \mathcal{F}\bar{v} \rangle, \quad (1.6)$$

$$v^0 = \langle \mathcal{F}\bar{\mu} + \mathcal{L}v \rangle, \quad (1.7)$$

$$\mathcal{F} = 2^{-1}(\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2), \quad \mathcal{L} = (\overline{\mathcal{P}_1} + i\overline{\mathcal{P}_2}),$$

где $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – матрицы, составленные из базисных векторов ядра $\text{Ker } \mathcal{A}^*$ (см. теорему 2). Здесь и далее $\bar{\partial}_z$ – оператор, определенный формулой $\bar{\partial}_z u = \partial_z \bar{u}$.

1.4. Задача на ячейке

Для применения асимптотических методов при усреднении системы n обобщенных уравнений Бельтрами нам потребуются периодические решения следующей задачи на ячейке:

$$\begin{cases} \mathcal{A}N_j \equiv \partial_z N_j + \mu \partial_z N_j + \nu \partial_z \bar{N}_j = \chi_j, \\ N_j \in W_2^1(\square; \mathbb{C}), \quad j = 1, 2, \end{cases} \quad (1.8)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1 &= 2^{-1}(\mu^0 + \nu^0 - \mu(x) - \nu(x)), \\ \chi_2 &= i2^{-1}(\mu^0 - \nu^0 - \mu(x) + \nu(x)), \end{aligned}$$

μ^0 и ν^0 – коэффициенты (1.6) и (1.7) усреднённой системы.

ТЕОРЕМА 4 (о задаче на ячейке). Периодическая задача (1.8) разрешима и ее решения представляются в виде $N_j + c_j$, $j = 1, 2$, где $c_j \in \mathbb{C}^{n \times n}$ – произвольная квадратная матрица порядка n с постоянными элементами, а N_j – квадратная матрица порядка n , среднее значение которой равно нулевой матрице.

Более того, найдется показатель повышенной суммируемости $p > 2$, зависящий только от k_0 , такой, что матрица N_j принадлежит пространству $W_p^1(\square; \mathbb{C})$, и для ее элементов N_{lk}^j справедливы неравенства

$$\|N_{lk}^j\|_{L_\infty(\square; \mathbb{C})} \leq c, \quad \|N_{lk}^j\|_{W_p^1(\square; \mathbb{C})} \leq c, \quad 1, k = 1, \dots, n, \quad j = 1, 2, \quad (1.9)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что для разрешимости (1.8) согласно теореме 2 необходимо и достаточно, чтобы χ_1 и χ_2 были ортогональны матрицам $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$. Если $\tilde{N}_j$, $j = 1, 2$, – решение (1.8), то и $N_j = \tilde{N}_j + c_j$, где c_j , $j = 1, 2$, – постоянная матрица, также решение (1.8). Следовательно, матрицу c_j можно подобрать так, чтобы среднее значение N_j было нулевой матрицей.

Утверждения, касающиеся показателя повышенной суммируемости $p > 2$, можно найти в работе [7]. Теорема 4 доказана.

1.5. Оценки усреднения

Пусть в правой части задачи (1.4) $f \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$, а u_ε – решение задачи Римана–Гильберта (1.4). В качестве первого приближения к решению исходной задачи (1.4) возьмем вектор-функцию

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon(N(y)\partial_z u^0(x) + M(y)\partial_z \bar{u}^0(x)), \quad (1.10)$$

где $u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ \vdots \\ u_n^0 \end{pmatrix}$ – решение усредненной задачи Римана–Гильберта для усредненной системы

$A_0 u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q)$; $N(y) = N_1(y) - iN_2(y)$, $M(y) = N_1(y) + iN_2(y)$; матрицы $N_1(y)$, $N_2(y)$ – периодические решения задачи на ячейке (см. теорему 4); $y = \varepsilon^{-1}x$. При этом справедливо соотношение

$$A_\varepsilon u_1^\varepsilon = f + \varepsilon r_\varepsilon, \quad (1.11)$$

где $r_\varepsilon = N(y)(\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x) + \mu(y)\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x) + \nu(y)\partial_{\bar{z}z}^2 \overline{u^0(x)}) + M(y)(\partial_{\bar{z}z}^2 \overline{u^0(x)} + \mu(y)\partial_{\bar{z}z}^2 \overline{u^0(x)} + \nu(y)\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x))$, $y = \varepsilon^{-1}x$.

ЛЕММА 1.

- Усредненный оператор A_0 принадлежит классу $A(k_0; Q)$.
- Пусть правая часть f системы обобщенных уравнений Бельтрами (1.4) принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ и область Q имеет гладкую (класса C^2) границу, тогда решение усредненной задачи $A_0 u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q)$, принадлежит $W_0(Q) \cap W_2^2(Q; \mathbb{C})$, первое приближение $u_1^\varepsilon \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$ и $r_\varepsilon \in L_2(Q; \mathbb{C})$.

Сформулируем основное утверждение работы.

ТЕОРЕМА 5. Пусть правая часть f системы обобщенных уравнений Бельтрами (1.4) принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, Q – односвязная область с гладкой (класса C^2) границей, тогда имеют место оценки

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad (1.12)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и области Q .

2. Доказательство леммы 1

2.1. О некоторых оценках

ЛЕММА 2. Пусть u^0 – произвольная вектор-функция из $W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$ и $f = A_0 u^0$. Тогда имеют место соотношения

$$\|A_\varepsilon u_1^\varepsilon - A_0 u^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (2.1)$$

$$\|A_\varepsilon u_1^\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})},$$

$$\|u_1^\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, u_1^\varepsilon \rightarrow u^0 \text{ в } W_2^1(Q; \mathbb{C}) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где $c = c(k_0) > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 ; u_ε – решение задачи Римана–Гильберта для системы обобщенных уравнений Бельтрами $A_\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in W_0(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (1.11) имеем

$$A_\varepsilon(u_1^\varepsilon - u_\varepsilon) = \varepsilon r_\varepsilon, \quad (2.3)$$

где $r_\varepsilon = N(y)(\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x) + \mu(y)\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x) + \nu(y)\partial_{\bar{z}z}^2 \overline{u^0(x)}) + M(y)(\partial_{\bar{z}z}^2 \overline{u^0(x)} + \mu(y)\partial_{\bar{z}z}^2 \overline{u^0(x)} + \nu(y)\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x))$, $y = \varepsilon^{-1}x$.

Согласно теореме 4 матрицы N_1 и N_2 ограничены постоянной, зависящей только от k_0 , поэтому $r_\varepsilon \in L_2(Q; \mathbb{C})$. Отсюда с учетом (2.3) и равенства $A_\varepsilon u_\varepsilon = f = A_0 u^0$ получим (2.1).

Докажем второе соотношение из (2.2). Первое из соотношений (2.2) следует из (1.10) и (1.9). Ввиду (1.10) имеем

$$\nabla u_1^\varepsilon = \nabla u^0(x) + \nabla_y N(y)\partial_z u^0(x) + \nabla_y M(y)\partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)} + \varepsilon(N(y)\nabla \partial_z u^0(x) + M(y)\nabla \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)}).$$

Отсюда и из (1.10), в силу свойства среднего значения $(\nabla g(\varepsilon^{-1}x) \rightarrow \langle \nabla g \rangle = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix})$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, $g = N_1$, $g = N_2$), получим: $u_1^\varepsilon \rightarrow u^0$ в $W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Лемма 2 доказана.

2.2. Доказательство леммы 1

Покажем, что оператор $A_0 = \partial_{\bar{z}} + \mu^0 \partial_z + \nu^0 \bar{\partial}_{\bar{z}}$ принадлежит классу $A(k_0; Q)$.

Пусть $\hat{A}$ – произвольная G -предельная точка семейства $\{A_\varepsilon\}$, т. е.

$$A_{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} \hat{A} \text{ в области } Q \text{ при } \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad (2.4)$$

где $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon\}$. Пусть $u^0 \in C^2(\bar{Q}; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, $f = A_0 u^0$. Тогда согласно (2.3), лемме 2 и $A_\varepsilon u_\varepsilon = f = A_0 u^0$ имеем

$$A_{\varepsilon_k} u_1^{\varepsilon_k} = f + \alpha_{\varepsilon_k}, \quad (2.5)$$

где $\alpha_{\varepsilon_k} = o(\varepsilon_k)$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ при $\varepsilon_k \rightarrow 0$. Ввиду (2.2) получим

$$u_1^{\varepsilon_k} \rightarrow u^0 \text{ в } W_2^1(Q; \mathbb{C}) \text{ при } \varepsilon_k \rightarrow 0.$$

Отсюда с учетом (2.4) и (2.5) и свойства сходимости произвольных решений (см. п. 1.2) получим $\hat{A} u^0 = f$. Поэтому имеем $A_0 u^0 = \hat{A} u^0$ для любого $u^0 \in C^2(\bar{Q}; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$. Следовательно, $A_0 = \hat{A} \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ в силу всюду плотности множества $C^2(\bar{Q}; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$ в $W_0(Q)$.

Итак, оператор A_0 является эллиптическим из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$. Пусть u^0 – решение усредненной задачи Римана–Гильберта для усредненной системы $A_0 u^0 = f \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$, $u^0 \in W_0(Q)$. В силу свойств регулярности решений эллиптических задач (см. [8]) решение u^0 принадлежит пространству $W_2^2(Q; \mathbb{C})$. Доказательство оставшихся утверждений леммы 1 аналогично доказательству утверждений из леммы 2. Лемма 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 5

В доказательстве теоремы 5 нам потребуется оценка интеграла по приграничной полосе области Q , которую будем обозначать через Q_ε , где ε – ширина полосы.

Пусть граница ∂Q области Q принадлежит классу C^1 , тогда для $\forall u \in W_2^1(Q; \mathbb{C})$ для достаточно малых ε с любым показателем $q > 1$ имеет место оценка

$$\|u\|_{L_q(Q_\varepsilon; \mathbb{C})} \leq c \sqrt[q]{\varepsilon} \|u\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.1)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u .

Действительно, для следа вектор-функции из пространства $W_2^1(Q; \mathbb{C})$ на гладкой (класса C^1) кривой Γ имеет место оценка

$$\|u\|_{L_q(\Gamma)} \leq c(\Gamma) \|u\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})},$$

где $c(\Gamma) > 0$ – норма оператора вложения $W_2^1(Q; \mathbb{C}) \subset L_q(\Gamma)$ с любым показателем $q > 1$, причем при малых гладких деформациях гладкой кривой Γ нормы операторов вложения равномерно ограничены (см. [9, гл. 2, § 2]). Отсюда легко следует оценка (3.1). Оценка (3.1) при $q = 2$ дается в [10, гл. 1, § 1].

Теперь мы займемся оценкой разности между точным решением u_ε задачи Римана–Гильберта (1.4) и первым приближением (1.10) u_1^ε . Пусть u^0 – решение усредненной задачи Римана–Гильберта для усредненной системы $A_0 u^0 = f$ и пусть u^0 принадлежит $W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$. Чтобы обеспечить такую гладкость u^0 (см. [8]), достаточно взять правую часть f задачи Римана–Гильберта из $W_2^1(Q; \mathbb{C})$.

Первое приближение u_1^ε не обязано принадлежать пространству $W_0(Q)$. Это вызывает определенные затруднения при оценке разности $u_\varepsilon - u_1^\varepsilon$. Чтобы обойти эти затруднения, введем в рассмотрение семейство функций

$$\theta^\varepsilon(x) = \omega(\varepsilon^{-1} \rho(x, \partial Q)), \quad (3.2)$$

где $\rho(x, \partial Q)$ – расстояние от x до ∂Q ,

$$\omega(t) = \begin{cases} t, & \text{если } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что семейство функций $\theta^\varepsilon(x)$ обладает следующими свойствами:

- 1°. $0 \leq \theta^\varepsilon(x) \leq 1$; $\theta^\varepsilon = 1$ вне окрестности границы области Q ;
- 2°. $\varepsilon |\nabla \theta^\varepsilon| \leq c$ в Q , причем константа c не зависит от ε ;
- 3°. $\theta^\varepsilon = 0$ на границе области Q .

Подправим первое приближение формулой

$$w_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon \theta^\varepsilon(x) (N(y) \partial_z u^0(x) + M(y) \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)}) - i\varepsilon |Q|^{-1} c_\varepsilon, \quad (3.3)$$

где $|Q|$ – площадь области Q ; $N(y) = N_1(y) - iN_2(y)$, $M(y) = N_1(y) + iN_2(y)$, N_1, N_2 – периодические решения из теоремы 4; $c_\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ – действительное число, определенное формулой

$$c_\varepsilon = \int_Q \operatorname{Im} \left(\theta^\varepsilon(x) (N(y) \partial_z u^0(x) + M(y) \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)}) \right) dx.$$

Очевидно, что семейство $\{c_\varepsilon\}$ равномерно ограничено по ε , и ввиду (1.9) имеем

$$|c_\varepsilon| \leq c \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.3')$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 .

Так как $u^0 \in W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, то согласно (3.3) и свойству 3° семейства (3.2) получим $w_1^\varepsilon(x) \in W_0(Q)$.

Подправленное первое приближение (3.3) можно представить в следующем виде:

$$w_1^\varepsilon(x) = u_1^\varepsilon(x) - \varepsilon (1 - \theta^\varepsilon(x)) (N(y) \partial_z u^0(x) + M(y) \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)}) - i\varepsilon |Q|^{-1} c_\varepsilon.$$

Оценим разность

$$u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x) = \varepsilon (1 - \theta^\varepsilon(x)) (N(y) \partial_z u^0(x) + M(y) \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)}) + i\varepsilon |Q|^{-1} c_\varepsilon. \quad (3.4)$$

Имеем

$$\begin{aligned} \nabla(u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x)) &= -\varepsilon \nabla \theta^\varepsilon(x) (N(y) \partial_z u^0(x) + M(y) \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)}) + (1 - \theta^\varepsilon(x)) (\nabla_y N(y) \partial_z u^0(x) + \nabla_y M(y) \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)}) + \\ &+ \varepsilon (1 - \theta^\varepsilon(x)) (N(y) \nabla \partial_z u^0(x) + M(y) \nabla \partial_{\bar{z}} \overline{u^0(x)}) \equiv \mathfrak{U}_1^\varepsilon + \mathfrak{U}_2^\varepsilon + \mathfrak{U}_3^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.4')$$

Каждое слагаемое справа здесь согласно свойству 1° функции θ^ε равно нулю вне окрестности границы. Отсюда в силу свойства 2° функции θ^ε и ограниченности N, M (см. (1.9)) с учетом (3.1) получим

$$\|\mathfrak{U}_1^\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c \left(\int_{Q_\varepsilon} |\partial_z u^0(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.5)$$

$$\|\mathfrak{U}_3^\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c \varepsilon \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.6)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 .

Оценим теперь $\|\mathfrak{U}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})}$. Согласно равенствам $N(y) = N_1(y) - iN_2(y)$, $M(y) = N_1(y) + iN_2(y)$ и неравенству Гельдера с показателями $\frac{p}{2}$ и $\frac{p}{p-2}$, где $p > 2$ – показатель повышенной суммируемости из (1.9), имеем

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{U}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} &\leq 2 \sum_{j=1}^2 \left(\int_{Q_\varepsilon} |\nabla_y N_j(y)|^2 |\partial_z u^0|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^2 \left(\int_{Q_\varepsilon} |\nabla_y N_j(y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{Q_\varepsilon} |\partial_z u^0|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{2p}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Очевидно, что границу ∂Q области Q (ввиду ее гладкости) можно покрыть кругами радиуса $2\varepsilon T$ с центрами на ∂Q так, чтобы это покрытие накрыло замыкание $\overline{Q_\varepsilon}$ и длины дуг между центрами соседних кругов равнялись εT . Опишем вокруг каждого круга квадрат, стороны которого параллельны осям координат, а длина стороны $4\varepsilon T$. В результате мы получим покрытие приграничной полосы Q_ε квадратами $\square_{4\varepsilon T}$, количество которых равно целой части $\left\lfloor \frac{L}{T\varepsilon} \right\rfloor$, где L – длина границы ∂Q . Это эквивалентно по-

крытию $\overline{Q_\varepsilon}$ квадратами $\square_{\varepsilon T}$ в количестве $16 \left[\frac{L}{T\varepsilon} \right]$. С учетом этого и периодичности N_j получим

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon} |\nabla_y N_j(y)|^p dx &\leq 16 \left[\frac{L}{T\varepsilon} \right] \int_{\square_{\varepsilon T}} |\nabla_y N_j(y)|^p dx = 16 \left[\frac{L}{T\varepsilon} \right] \varepsilon^2 \int_{\square} |\nabla_y N_j(y)|^p dy \leq \\ &\leq 16 \left(\frac{L}{T} + 1 \right) \varepsilon \|\nabla_y N_j\|_{L_p(\square; \mathbb{C})}^p, \quad y = \varepsilon^{-1}x, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом (1.9) получим

$$\left(\int_{Q_\varepsilon} |\nabla_y N_j(y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad j = 1, 2, \quad (3.8)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 , T и ∂Q .

Оценим второй интеграл справа в (3.7), используя (3.1), где $q = \frac{2p}{p-2}$, $u = \partial_z u^0$.

Имеем

$$\left(\int_{Q_\varepsilon} |\partial_z u^0|^{\frac{2p}{p-2}} dx \right)^{\frac{p-2}{2p}} \leq c \varepsilon^{\frac{p-2}{2p}} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}. \quad (3.9)$$

Из (3.9), (3.8) и (3.7) получим

$$\|\mathfrak{A}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.10)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 .

Из (3.5), (3.6), (3.10) в силу (3.4') вытекает

$$\|\nabla(u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x))\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.11)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 . Из (3.4), (3.3') и свойства 1° функции θ^ε следует оценка

$$\|u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x)\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\varepsilon \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}. \quad (3.12)$$

Из оценок (3.11) и (3.12) имеем

$$\|u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x)\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.13)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 .

Теперь найдем L_2 -оценку $f_\varepsilon := A_\varepsilon(u_\varepsilon - w_1^\varepsilon)$. Согласно (2.3) имеем

$$f_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon - u_1^\varepsilon) + A_\varepsilon(u_1^\varepsilon - w_1^\varepsilon) = -\varepsilon r_\varepsilon + \partial_{\bar{z}}(u_1^\varepsilon - w_1^\varepsilon) + \mu(y)\partial_z(u_1^\varepsilon - w_1^\varepsilon) + v(y)\partial_{\bar{z}}(\overline{u_1^\varepsilon} - \overline{w_1^\varepsilon}).$$

Отсюда с учетом L_2 -оценок производных (3.11) и соотношений (1.3), (2.1) получим оценку

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq \|A_\varepsilon(u_\varepsilon - u_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} + \|A_\varepsilon(u_1^\varepsilon - w_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}, \quad (3.14)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0 .

Заметим, что разность $u_\varepsilon - w_1^\varepsilon$ принадлежит $W_0(Q)$ и является решением задачи Римана–Гильберта $\partial_{\bar{z}}u + \mu(\varepsilon^{-1}x)\partial_zu + v(\varepsilon^{-1}x)\partial_{\bar{z}}\bar{u} = f_\varepsilon$, $u \in W_0(Q)$, поэтому из оценок (3.14), (1.3) получим

$$\|u_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})}. \quad (3.15)$$

Из оценок (3.13) и (3.15) следует оценка разности между точным решением u_ε и первым приближением u_1^ε :

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})} \quad (3.16)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от ε и u^0 . Отсюда с учетом (3.13) и леммы 2 получим оценку

$$\|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q; \mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon} \|u^0\|_{W_2^2(Q; \mathbb{C})} \quad (3.17)$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от ε . Так как u^0 – решение усредненной задачи, согласно эллиптическим оценкам [8] получим

$$\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \leq c\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $f \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$. Отсюда с учетом оценок (3.16) и (3.17) получим оценки (1.12). Теорема 5 доказана.

Литература

1. Жиков В.В., Пастухова С.Е. Об операторных оценках в теории усреднения // Успехи математических наук. 2016. Т. 71, вып. 3. – С. 27–122.
2. Сиражудинов М.М. Операторные оценки усреднения обобщенных уравнений Бельтрами // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. – С. 40–46.
3. Сиражудинов М.М. Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Математический сборник. 2017. Т. 208, № 4. – С. 87–110.
4. Сиражудинов М.М., Сиражудинов Р.М. О G -сходимости систем обобщенных уравнений Бельтрами // Труды МИАН. 2008. Т. 261. – С. 268–275.
5. Сиражудинов М.М., Тихомирова С.В., Джамалудинова С.П. Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы двух уравнений Бельтрами // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2020. Т. 35, вып. 1. – С. 43–52.
6. Сиражудинов М.М., Амаева М.Л. Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы n -уравнений Бельтрами // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2021. Т. 36, вып. 2. – С. 61–73.
7. Сиражудинов М.М. О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка // Математические заметки. 1990. Т. 48, вып. 5. – С. 153–155.
8. Солонников В.А. Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дагглиса–Л. Ниренберга II // Труды МИАН СССР. 1966. Т. 92. – С. 233–297.
9. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964.
10. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Высшая школа, 1987.

Поступила в редакцию 17 сентября 2022 г.

UDC 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-1-55–65

Error Estimation for the Riemann–Hilbert Problem Averaging for a System of n Generalized Beltrami Equations

M.L. Amaeva

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; markhal5@mail.ru

Local characteristics of mathematical models of highly non-homogeneous medium are usually described by the functions of the form $a(\varepsilon^{-1}x)$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, while the function $a(x)$ has an ordered structure (for example, it is periodic, almost periodic, etc.). Therefore, the corresponding mathematical models are differential equations with rapidly oscillating coefficients that cannot be solved by numerical methods. In this regard, mathematicians are moving from the differential equation with rapidly oscillating coefficients to the homogenized equation. The estimation of the error of averaging the Riemann–Hilbert problem for a system of n generalized Beltrami equations is obtained with minimal requirements for coefficients – the bounded measurable periodic square matrices of order n .

Keywords: *Beltrami equation, homogenization, G-convergence.*

Received 17 September 2022