УДК 517.97

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-1-49–54

Х.И. Сейфуллаева

Задача граничной управляемости для уравнения колебаний тонкой пластины

Сумгаитский государственный университет; AZ 5008 Азербайджанская Республика, г. Сумгаит, 43-й квартал; xeyaleseyfullayeva82@mail.com

В статье рассматривается краевая задача с граничным управлением для уравнения колебаний тонкой пластины. Известно, что многие практические задачи описываются уравнением колебаний тонкой пластины, но проблемы управляемости этим уравнением мало изучались. Один из таких вопросов поднят в статье. После определения управляемости, с помощью введения вспомогательной краевой задачи и с использованием результатов теоремы Хана–Банаха доказана управляемость рассматриваемой системы.

Ключевые слова: *уравнение колебаний, тонкая пластина, граничное управление, слабое решение, управляемость, наблюдаемость.*

Введение

Известно, что ряд процессов физики и техники описывается дифференциальными уравнениями с частными производными четвертого порядка. Например, уравнения колебаний стержня, камертона, упругой пластины, тонкой пластины и т. д. являются такими уравнениями [1; 2]. Поэтому исследования задач оптимального управления и управляемости в процессах, описываемых такими уравнениями, – это важные задачи [3]. Когда управляющие функции являются граничными функциями, изучение задач управления слишком усложняется. Но отметим, что задача граничного управления с теоретической и практической точек зрения более естественна по сравнению с задачами с распределенными управлениями.

Отметим, что в работах [4; 7] освещены некоторые близкие задачи управления. А именно, в [4] рассмотрена задача точной управляемости трехмерной линейно-упругой тонкой пластины с управлением на границе и внутри пластины, в [5] – задача управления поперечными колебаниями тонкой пластины (управляющие воздействия применяются к границе пластины, которая заполняет некоторую ограниченную область на плоскости), а в [6; 7] изучена задача граничного оптимального управления для линейного уравнения колебаний тонкой пластины, доказана теорема существования и единственности оптимального управления.

Следует отметить, что в последнее время задача управляемости колебаний пластин интенсивно исследуется [8; 13].

В рассмотренной работе исследуется одна задача управляемости для уравнения колебаний тонкой пластины.

Постановка задачи

Пусть управляемый процесс описывается уравнением колебаний тонкой пластины:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a^2 \Delta^2 u = 0 \text{ в } Q = \Omega \times (0, T),\ \Omega = (0, l_1) \times (0, l_2) \qquad (1)$$

с начальными

$$u(x_1, x_2, 0) = \phi_0(x_1, x_2)\,,\ \frac{\partial u(x_1, x_2, 0)}{\partial t} = \phi_1(x_1, x_2)\,,\ (x_1, x_2) \in \Omega \qquad (2)$$

и граничными условиями

$$\begin{gathered} u(0, x_2, t) = \upsilon_1^0(x_2, t),\ u(l_1, x_2, t) = \upsilon_2^0(x_2, t), \\ \frac{\partial u(0, x_2, t)}{\partial x_1} = \upsilon_1^1(x_2, t),\ \frac{\partial u(l_1, x_2, t)}{\partial x_1} = \upsilon_2^1(x_2, t), \\ (x_2, t) \in (0, l_2) \times (0, T), \\ u(x_1, 0, t) = \upsilon_3^0(x_1, t),\ u(x_1, l_2, t) = \upsilon_4^0(x_1, t), \\ \frac{\partial u(x_1, 0, t)}{\partial x_2} = \upsilon_3^1(x_1, t),\ \frac{\partial u(x_1, l_2, t)}{\partial x_2} = \upsilon_4^1(x_1, t), \\ (x_1, t) \in (0, l_1) \times (0, T), \end{gathered} \qquad (3)$$

где $a^2, l_1, l_2, T-$ заданные положительные числа, $\Delta-$ оператор Лапласа по x_1, x_2, $\varphi_0(x_1, x_2) \in H^2(\Omega)$, $\varphi_1(x_1, x_2) \in L_2(\Omega)$-заданные функции, $\upsilon_1^0(x_2, t)$, $\upsilon_2^0(x_2, t)$, $\upsilon_3^0(x_1, t)$, $\upsilon_4^0(x_1, t)$, $\upsilon_1^1(x_2, t)$, $\upsilon_2^1(x_2, t)$, $\upsilon_3^1(x_1, t)$, $\upsilon_4^1(x_1, t)-$ граничные управляющие функции.

За класс допустимых управлений берется пространство

$$\begin{gathered} U = \Big\{ \upsilon_1^0(x_2, t), \upsilon_2^0(x_2, t), \upsilon_3^0(x_1, t), \upsilon_4^0(x_1, t), \upsilon_1^1(x_2, t),\ \upsilon_2^1(x_2, t),\ \upsilon_3^1(x_1, t),\ \upsilon_4^1(x_1, t), \\ \upsilon_i^0, \upsilon_i^1 \in L_2((0, l_2) \times (0, T)),\ i = 1,2,\ \upsilon_i^0, \upsilon_i^1 \in L_2((0, l_1) \times (0, T)),\ i = 3,4 \Big\}. \end{gathered}$$

Слабое решение этой задачи определяется с помощью транспонирования [3]: существует единственная функция $u(\upsilon) \in L_2(Q)$, для которой

$$\int_Q u(\upsilon) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + a^2 \Delta^2 \varphi \right) dx_1 dx_2 dt =$$

$$\begin{aligned} = a^2 \Bigg(& \int_0^T \int_0^{l_2} \upsilon_1^0(x_2, t) \frac{\partial \Delta \varphi(0, x_2, t)}{\partial x_1} dx_2 dt - \int_0^T \int_0^{l_2} \upsilon_2^0(x_2, t) \frac{\partial \Delta \varphi(l_1, x_2, t)}{\partial x_1} dx_2 dt + \\ & + \int_0^T \int_0^{l_2} \upsilon_1^1(x_2, t) \Delta \varphi(0, x_2, t) dx_2 dt - \int_0^T \int_0^{l_2} \upsilon_2^1(x_2, t) \Delta \varphi(l_1, x_2, t) dx_2 dt + \\ & + \int_0^T \int_0^{l_1} \upsilon_3^0(x_1, t) \frac{\partial \Delta \varphi(x_1, 0, t)}{\partial x_2} dx_1 dt - \int_0^T \int_0^{l_1} \upsilon_4^0(x_1, t) \frac{\partial \Delta \varphi(x_1, l_2, t)}{\partial x_2} dx_1 dt + \\ & + \int_0^T \int_0^{l_1} \upsilon_3^1(x_1, t) \Delta \varphi(x_1, 0, t) dx_1 dt - \int_0^T \int_0^{l_2} \upsilon_4^1(x_1, t) \Delta \varphi(x_1, l_2, t) dx_1 dt \Bigg),\ \forall \varphi \in \Phi, \end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered} \Phi = \Big\{ \varphi \Big| \ D_x^p \varphi \in L_2(Q),\ |p| \le 4,\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in L_2(Q),\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} L_2(Q), \\ \varphi(x_1, x_2, T) = 0,\ \frac{\partial \varphi(x_1, x_2, T)}{\partial t} = 0,\ \varphi(0, x_2, t) = 0, \\ \varphi(l_1, x_2, t) = 0,\ \varphi(x_1, 0, t) = 0,\ \varphi(x_1, l_2, t) = 0, \end{gathered}$$

$$\frac{\partial\varphi(0,x_2,t)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial\varphi(l_1,x_2,t)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial\varphi(x_1,0,t)}{\partial x_2}=0,$$
$$\left.\frac{\partial\varphi(x_1,l_2,t)}{\partial x_2}=0,\ (x_1,x_2)\in\Omega\right\}.$$

Определение. Система, состояние которой определяется как решение задачи (1)–(3), называется управляемой, если наблюдение

$$\left(u(x_1,x_2,T),\ \frac{\partial u(x_1,x_2,T)}{\partial t}\right)$$

заметает пространство $L_2(\Omega)\times H^{-2}(\Omega)$, когда управление

$$\upsilon=(\upsilon_1^0(x_2,t),\ \upsilon_2^0(x_2,t),\ \upsilon_3^0(x_1,t),\ \upsilon_4^0(x_1,t),\ \upsilon_1^1(x_2,t),\ \upsilon_2^1(x_2,t),\ \upsilon_3^1(x_1,t),$$
$$\upsilon_4^1(x_1,t))$$

пробегает пространство U, где $H^{-2}(\Omega)$ является сопряженным пространством к пространству $H_0^2(\Omega)$, а

$$H_0^2(\Omega)=\left\{\chi(x_1,x_2)\,\middle|\,\chi\in H^2(\Omega),\ \chi|_{\Gamma}=0,\ \left.\frac{\partial\chi}{\partial\nu}\right|_{\Gamma}=0\right\},$$

Γ является границей прямоугольника Ω, ν – внешняя нормаль к границе Γ.

Теорема. При выше налагаемых условиях на данные задачи (1)–(3) эта система управляема.

Доказательство. Пусть вектор $\left(\psi_0(x_1,x_2),\ \psi_1(x_1,x_2)\right)$ ортогонален к образу U при отображении

$$\upsilon\to\left(u(x_1,x_2,T),\ \frac{\partial u(x_1,x_2,T)}{\partial t}\right),$$

т. е.

$$\int_\Omega u(x_1,x_2,T)\psi_0(x_1,x_2)dx_1dx_2+\int_\Omega\frac{\partial u(x_1,x_2,T)}{\partial t}\psi_1(x_1,x_2)dx_1dx_2=0, \qquad (4)$$

где $\psi_0(x_1,x_2)\in H_0^2(\Omega)$, $\psi_1(x_1,x_2)\in L_2(\Omega)$.

Мы хотим выяснить, будет ли отсюда следовать, что $\psi_0(x_1,x_2)\equiv 0$, $\psi_1(x_1,x_2)\equiv 0$ [14].

Предположим, что функция $\xi(x_1,x_2,t)$ является решением следующей вспомогательной задачи:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+a^2\Delta^2\xi=0,\ Q=\Omega\times(0,T),\ \Omega=(0,l_1)\times(0,l_2), \qquad (5)$$

$$\xi(x_1,x_2,T)=-\psi_1(x_1,x_2),\ \frac{\partial\xi(x_1,x_2,T)}{\partial t}=\psi_0(x_1,x_2),\ (x_1,x_2)\in\Omega, \qquad (6)$$

$$\xi(0,x_2,t)=0,\ \xi(l_1,x_2,t)=0,\ \frac{\partial\xi(0,x_2,t)}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial\xi(l_1,x_2,t)}{\partial x_1}=0$$
$$(x_2,t)\in(0,l_2)\times(0,T), \qquad (7)$$
$$\xi(x_1,0,t)=0,\ \xi(x_1,l_2,t)=0,\ \frac{\partial\xi(x_1,0,t)}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial\xi(x_1,l_2,t)}{\partial x_2}=0,$$

$$(x_1,t)\in(0,l_1)\times(0,T).$$

Тогда, применяя формулы интегрирования по частям и используя условия (6), имеем

$$\int_Q\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}+a^2\Delta^2\xi\right)u(\upsilon)dx_1dx_2dt=$$

$$=\int_\Omega u(x_1,x_2,T)\psi_0(x_1,x_2)dx_1dx_2+\int_\Omega\psi_1(x_1,x_2)\frac{\partial u(x_1,x_2,T)}{\partial t}dx_1dx_2+$$
$$+a^2\left(\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_1^0(x_2,t)\frac{\partial\Delta\xi(0,x_2,t)}{\partial x_1}dx_2dt-\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_2^0(x_2,t)\frac{\partial\Delta\xi(l_1,x_2,t)}{\partial x_1}dx_2dt+\right.$$
$$+\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_1^1(x_2,t)\Delta\xi(0,x_2,t)dx_2dt-\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_2^1(x_2,t)\Delta\xi(l_1,x_2,t)dx_2dt+\qquad(8)$$
$$+\int_0^T\int_0^{l_1}\upsilon_3^0(x_1,t)\frac{\partial\Delta\xi(x_1,0,t)}{\partial x_2}dx_1dt-\int_0^T\int_0^{l_1}\upsilon_4^0(x_1,t)\frac{\partial\Delta\xi(x_1,l_2,t)}{\partial x_2}dx_1dt+$$
$$\left.+\int_0^T\int_0^{l_1}\upsilon_3^1(x_1,t)\Delta\xi(x_1,0,t)dx_1dt-\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_4^1(x_1,t)\Delta\xi(x_1,l_2,t)dx_1dt\right)+$$
$$+\int_Q\xi\left(\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+a^2\Delta^2u\right)u(\upsilon)dx_1dx_2dt.$$

Используя (4), из (8) получаем

$$a^2\left(\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_1^0(x_2,t)\frac{\partial\Delta\xi(0,x_2,t)}{\partial x_1}dx_2dt-\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_2^0(x_2,t)\frac{\partial\Delta\xi(l_1,x_2,t)}{\partial x_1}dx_2dt+\right.$$
$$+\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_1^1(x_2,t)\Delta\xi(0,x_2,t)dx_2dt-\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_2^1(x_2,t)\Delta\xi(l_1,x_2,t)dx_2dt+$$
$$+\int_0^T\int_0^{l_1}\upsilon_3^0(x_1,t)\frac{\partial\Delta\xi(x_1,0,t)}{\partial x_2}dx_1dt-\int_0^T\int_0^{l_1}\upsilon_4^0(x_1,t)\frac{\partial\Delta\xi(x_1,l_2,t)}{\partial x_2}dx_1dt+$$
$$\left.+\int_0^T\int_0^{l_1}\upsilon_3^1(x_1,t)\Delta\xi(x_1,0,t)dx_1dt-\int_0^T\int_0^{l_2}\upsilon_4^1(x_1,t)\Delta\xi(x_1,l_2,t)dx_1dt\right)=0,$$
$$\forall\upsilon_i^0,\upsilon_i^1\in L_2((0,l_2)\times(0,T)),\ i=1,2,$$
$$\forall\upsilon_i^0,\upsilon_i^1\in L_2((0,l_1)\times(0,T)),\ i=3,4.$$

Отсюда из произвольности

$$\upsilon_i^0,\upsilon_i^1\in L_2((0,l_2)\times(0,T)),\ i=1,2,$$
$$\upsilon_i^0,\upsilon_i^1\in L_2((0,l_1)\times(0,T)),\ i=3,4$$

получаем, что

$$\Delta\xi(0,x_2,t)=0,\ \ \Delta\xi(l_1,x_2,t)=0,\ \ \frac{\partial\Delta\xi(0,x_2,t)}{\partial x_1}=0,\ \ \frac{\partial\Delta\xi(l_1,x_2,t)}{\partial x_1}=0,$$
$$(x_2,t)\in(0,l_2)\times(0,T),\qquad(9)$$

$$\Delta\xi(x_1,0,t)=0,\ \Delta\xi(x_1,l_2,t)=0,\ \frac{\partial\Delta\xi(x_1,0,t)}{\partial x_2}=0,\ \frac{\partial\Delta\xi(x_1,l_2,t)}{\partial x_2}=0,$$
$$(x_1,t)\in(0,l_1)\times(0,T).$$

Тогда из уравнения (5) и из условий (7), (9) в силу результатов из [15] следует, что

$$\xi(x_1,x_2,t)=0,\ (x_1,x_2,t)\in Q.$$

Отсюда получается

$$\psi_0(x_1,x_2)\equiv 0,\ \psi_1(x_1,x_2)\equiv 0,$$

и система управляема.

Теорема доказана.

Чтобы все выше сделанные преобразования были законными, надо сначала сгладить все функции

$$\varphi_0(x_1,x_2)\in H^2(\Omega),\ \varphi_1(x_1,x_2)\in L_2(\Omega),$$
$$\upsilon_i^0,\upsilon_i^1\in L_2((0,l_2)\times(0,T)),\ i=1,2,$$
$$\upsilon_i^0,\upsilon_i^1\in L_2((0,l_1)\times(0,T)),\ i=3,4,$$
$$\psi_0(x_1,x_2)\in H_0^2(\Omega),\ \psi_1(x_1,x_2)\in L_2(\Omega),$$

провести указанные преобразования для гладких решений соответствующих сглаженных краевых задач, а затем перейти к пределу по параметру сглаживания и прийти к требуемым соотношениям для слабых решений краевых задач [16]. Мы подразумеваем, что при проведении выше сделанных преобразований такая процедура уже выполнена.

Вывод

Рассматриваемая система (1)–(3) является управляемой.

Литература

1. *Комков В.* Теория оптимального управления демпфированием колебаний простых упругих систем. – М.: Мир, 1975. – 158 с.

2. *Арман Ж.-Л.П.* Приложения теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. – М.: Мир, 1977. – 144 с.

3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. – М.: Мир, 1972. – 416 с.

4. *Isabel Narra Figueiredo, Enrique Zuazua.* Exact controllability and asymptotic limit for thin plates // Asymtotic Analysis. April 1996. Vol. 12. – Pp. 213–252.

5. *Romanov I.V., Shamaev A.S.* Suppression of oscillations of thin plate by bounded control acting to the boundary // Journal of Computer and Systems Sciences International. May 2020. Vol. 59, iss. 3. – Pp. 371–380.

6. *Guliyev H.F., Mehdiyev A.A., Seyfullayeva Kh.I.* Boundary control problem for the equation of the thin plate vibrations // Transactions of Pedagogical University. Series of Mathematics and Natural sciences. 2014. no. 4. – Pp. 3–10.

7. *Guliyev H.F., Seyfullayeva Kh.I.* On a boundary control problem for a thin plate oscillations equation // Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences. 2015. Vol. XXXV, no 1. – Pp. 133–141.

8. *Shilin Xie X.N. Zhang J.H. Zhang L.Yu.* H∞ Robust vibration control of a thin Platp covered with a controllable constrained damping layer // Journal of Vibration and Control. January 2004.

9. *Guy Bouchitte, Ilaria Fragala*. Optimality conditions for mass design problems and applications ti thin plates // Archive Rational Mechanics and Analysis. 2007. Vol. 184. – Pp. 257–284.

10. *Xiongtao Cao, Gregor Tanner, Dimitrios Chronopoulos*. Active vibration control of thin constrained composite damping plates with double piezoelectric layers // Wave Motion. January 2020. Vol. 92.

11. *L. Vishnu Pradeesh, Shaikh Faruque Ali.* Active vibration control of thin plate using optimal dynamic inversion technique // IFAC-Papers OnLine. 2016. Vol. 49, iss. 1. – Pp. 326–331.

12. *Fengyan Yang, Bandar Bin-Mohsin, Goong Chen, Pengfei Yao*. Exact-approximate boundary controllability of the thermoelastic plate with a curved middle surface // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 1 July 2017. Vol. 451, iss. 1. – Pp. 405–433.

13. *Сейфуллаева Х.И.* Одна задача управления для уравнения колебаний тонкой пластины // СГУ, Научные известия. Серия: Естественные и технические науки. 2021. – Т. 21, № 2. С. 12–16.

14. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 280 с.

15. *Tanabe H.* On differentiability and analyticity of solutions of weighted elliptic boundary value problems // Osaka J. Math. 1965. no. 2. – Pp. 163–190.

16. *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981. – 399 с.

Поступила в редакцию 21 января 2023 г.

UDC 517.97

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-1-49–54

Boundary Control Problem for the Oscillation of a Thin Plate Equation

X.I. Seyfullayeva

Sumgayit State University; AZ5008 Republic of Azerbaijan, Sumgayit city, dis. 43; xeyaleseyfullayeva82@mail.com

In this paper, we consider a boundary-value problem with boundary control for the oscillation of the thin-plate equation. It is known that many practical problems are described by the equation of oscillation of a thin plate, but the controllability problems with this equation have almost never been studied. One of these questions is investigated in the present work. After the determination of the controllability, by introducing an auxiliary boundary value problem and using the result of the Han–Banach theorem, the controllability of the system under consideration is proved.

Keywords: *oscillation equation, thin plate, boundary control, weak solution, controllability, observability.*

Received 21 January 2023