УДК 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-1-40–48

***Р.И. Кадиев*[1, 2]*, З.И. Шахбанова*[1]**

К вопросу об устойчивости по части компонент решений линейных непрерывно-дискретных систем Ито с последействием

[1] *Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а*

[2] *Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН*; *Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45; kadiev_r@mail.ru*

В статье поднимаются вопросы устойчивости относительно части компонент для линейных стохастических систем Ито с запаздыванием, которые содержат как непрерывные, так и дискретные компоненты. Для изучения этих вопросов предложен и обоснован модифицированный метод регуляризации, основанный на выборе модельной или вспомогательной системы. Для детерминированных функционально-дифференциальных уравнений аналог этого метода ранее был разработан Н.В. Азбелевым и его учениками.

Ключевые слова: *устойчивость решений относительно части компонент, уравнения Ито с последействием, метод регуляризации.*

Введение

Системы линейных дифференциальных и разностных уравнений Ито являются важным подклассом так называемых «гибридных систем». Эти системы отличаются от других систем наличием в пространстве состояний компонент с непрерывным и дискретным временем. Такие системы естественным образом возникают, в частности, при моделировании различных экологических и биологических процессов.

При составлении математической модели развития некоторых процессов природы и техники приходится учитывать состояние этого процесса не только в текущий момент времени, но и в предшествующие моменты. С другой стороны, результаты исследований показывают, что поведение решений систем дифференциальных уравнений без учета запаздывания может сильно отличаться от поведения решений тех же систем с запаздыванием, даже при его небольшом значении. Отмеченное обстоятельство указывает на необходимость и важность изучения поведения решений систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Исследования по качественной теории для детерминированных систем, содержащих дифференциальные и разностные уравнения с запаздыванием, в том числе и по устойчивости их решений, были начаты в работах В.М. Марченко и его соавторов [1; 2]. В последующем эти исследования были продолжены в статье [3]. В упомянутых трудах детерминированные системы, содержащие дифференциальные и разностные уравнения, названы «гибридными системами». Однако, как справедливо указано в [4], последний термин в англоязычной литературе обычно используется в несколько другом контексте. В связи с отмеченным в этой статье системы, содержащие дифференциальные и разностные уравнения, нами также названы непрерывно-дискретными системами, что согласуется с более поздними публикациями по этой тематике (см., например, статью [5], а также приведённые в ней ссылки).

Важной частью реалистичного подхода к моделированию любого процесса является учет случайных эффектов, влияющих на развитие этого процесса. Например, при составлении математической модели развития различных популяций приходится учитывать демографическую и экологическую стохастичности, которые возникают из-за изменения во времени факторов, внешних по отношению к системе, но влияющих на выживание популяции. А при управлении различными системами приходится учитывать случайности, например, связанные с неточностями в измерениях. В связи с отмеченным исследование поведения решений стохастических непрерывно-дискретных систем привлекает в последнее время внимание многих отечественных и зарубежных специалистов (см., например, [6], а также ссылки, использованные в этой статье).

В данной статье освещаются вопросы моментной устойчивости решений по части компонент для стохастических систем, содержащих как линейные дифференциальные, так и линейные разностные уравнения Ито с запаздываниями. Эти вопросы, по-видимому, другими авторами ранее не изучались. Исследования проводились методом регуляризации, также известным как метод модельных (вспомогательных) уравнений или «W-метод Н.В. Азбелева» [7; 8]. Суть этого метода заключается в преобразовании исходной системы в другую эквивалентную систему с использованием «модельной'» системы, обладающей заданным свойством устойчивости. Устойчивость последнего проверяется с учётом оценки нормы определённого интегрального оператора. Для систем, содержащих линейное дифференциальное и линейное разностное уравнения Ито с последействием, в статье [9] были освещены вопросы моментной устойчивости решений по первой компоненте. Настоящая статья является продолжением исследований упомянутой работы.

Обозначения и постановка задачи

В дальнейшем мы будем систематически использовать следующие обозначения:

– $(\Omega, \Im, (\Im_t)_{t\geq 0}, P)$ – стохастический базис с множеством элементарных событий Ω, σ-алгеброй событий $\Im$ на Ω, непрерывной справа потоком σ-алгебр $(\Im_t)_{t\geq 0}$ на Ω и полной вероятностной мерой, P на $\Im$;

– k^n – линейное пространство n-мерных $\Im_0$-измеримых случайных величин;

– $B_i, i = 2, ..., m$ – скалярные стандартные независимые винеровские процессы;

– $1 \leq p < \infty$;

– $1 \leq q < \infty$;

– E – обозначение для математического ожидания;

– $|.|$ – норма вектора в евклидовом пространстве R^n;

– $\|.\|$ – норма $k \times n$-матрицы, согласованная с нормой вектора в R^n;

– $\|.\|_X$ – норма в нормированном пространстве X;

– $[t]$ – целая часть числа t;

– μ – мера Лебега на $[0,\infty)$;

– N – множество натуральных чисел;

– $N_+ = \{0\} \cup N$;

– $\overline{E}$ – единичная матрица размерности $k \times k$.

В дальнейшем для описания систем, содержащих дифференциальные и разностные уравнения Ито, будет зафиксировано натуральное число l ($1 \le l < n$). Компоненты вектора состояний системы с непрерывным временем обозначим через $x_1(t), ..., x_l(t)$, $(t \ge 0)$, а компоненты вектора состояний системы с дискретным временем обозначим через $x_{l+1}(s), ..., x_n(s)$, $(s \in N_+)$. В векторных обозначениях это будет выглядеть так: $\overline{x}(t) = col(x_1(t), ..., x_l(t))$, $\overline{\overline{x}}(s) = col(x_{l+1}(s), ..., x_n(s))$, и $x(t) = col(x_1(t), ..., x_l(t), x_{l+1}([t]), ..., x_n([t])$, $(t \ge 0)$.

В статье будут исследованы вопросы моментной устойчивости решений по непрерывным и по дискретным компонентам системы вида

$$
\begin{aligned}
&d\overline{x}(t) = -\sum_{j=1}^{m_1} A_{1j}(t)x(h_{1l}(t))dt + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i} A_{ij}(t)x(h_{ij}(t))dB_i(t) \quad (t \ge 0),\\
&\overline{\overline{x}}(s+1) = \overline{\overline{x}}(s) - \sum_{j=-\infty}^{s} A_1(s, j)x(j)h + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{s} A_i(s, j)x(j)\big(B_i((s+1)h) - B_i(sh)\big) \quad (s \in N_+)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

по отношению к начальным условиям

$$x(\zeta) = \varphi(\zeta) \quad (\zeta < 0), \tag{1a}$$

$$x(0) = b, \tag{1b}$$

где:

– $x(t) = col(x_1(t), ..., x_l(t), x_{l+1}([t]), ..., x_n([t])$ – неизвестный случайный процесс;

– A_{ij}, – $l \times n$-матрица при $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., m_i$, причем элементами матриц A_{1j}, $j = 1, ..., m_1$ являются некоторые прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, заданные на $[0, \infty)$, траектории которых, почти наверно, локально суммируемы, а элементами матриц A_{ij}, $i = 2, ..., m$, $j = 1, ..., m_i$ являются некоторые прогрессивно измеримые скалярные случайные процессы, заданные на $[0, \infty)$, траектории которых п.н. локально суммируемы с квадратом;

– h_{ij}, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., m_i$ – некоторые функции, заданные на полуоси $[0, \infty)$, измеримые по Борелю и удовлетворяющие неравенству $h_{ij}(t) \le t$ $(t \in [0, \infty))$ μ – почти всюду при $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., m_i$;

– h – некоторое достаточно малое положительное действительное число;

– $A_i(s, j)$ – $(n-l) \times n$ – матрица, элементами которой являются некоторые $\Im_s$-измеримые скалярные случайные величины при $i = 1, ..., m$, $j = -\infty, ..., s$, $s \in N_+$;

– $\phi(\zeta) = col(\phi_1(\zeta), ..., \phi_1, \phi_{1+1}([\zeta]), ..., \phi_n([\zeta]))$ $(\zeta < 0)$ – некоторый $\Im_0$-измеримый случайный процесс с п. н. ограниченными в существенном траекториями;

– $b \in k^n$.

Под решением задачи (1), (1a), (1b) понимается случайный процесс $x(t) = \mathrm{col}(\overline{x}(t), \overline{\overline{x}}([t]))$ $(t \in (-\infty, \infty))$, являющийся прогрессивно измеримым при $t \ge 0$ относительно заданного стохастического базиса, п.н. удовлетворяющий равенствам $x(\zeta) = \varphi(\zeta)$ $(\zeta < 0)$, $x(0) = col(\overline{x}(0), \overline{\overline{x}}(0)) = b$, а также P – почти всюду системе

$$\bar{x}(t)=\bar{x}(0)-\sum_{j=1}^{m_1}\int_0^t A_{1j}(s)x(h_{1l}(s))ds+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{m_i}\int_0^t A_{ij}(s)x(h_{ij}(s))dB_i(s)\quad(t\ge 0),$$

$$\bar{\bar{x}}(s+1)=\bar{\bar{x}}(s)-\sum_{j=-\infty}^{s}A_1(s,j)x(j)h+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{s}A_i(s,j)x(j)\big(B_i((s+1)h)-B_i(sh)\big)\quad(s\in N_+),$$

где первый интеграл понимается в смысле Лебега, а второй – в смысле Ито.

Очевидно, при нулевых начальных условиях задача (1), (1a), (1b) имеет нулевое решение. В силу результатов работы [10] нетрудно убедиться, что при сделанных допущениях задача (1), (1a), (1b) имеет единственное решение с точностью P – почти всюду. В дальнейшем решение задачи (1), (1a), (1b) обозначим через $x(t,b,\phi)=col\ (\bar{x}(t,b,\phi),\ \bar{\bar{x}}([t],b,\phi))\quad(t\in(-\infty,\infty))$.

Моментная устойчивость решений по части компонент для систем линейных дифференциальных уравнений Ито с последействием изучена в работе [11]. Для этих систем моментную устойчивость решений по части любых компонент можно свести к моментной устойчивости решений по некоторым первым компонентам эквивалентной системы, полученной из исходной системы представлением уравнений этой системы. В случае системы (1) моментная устойчивость решений по части компонент редко можно свести к моментной устойчивости решений по некоторым первым компонентам такой же эквивалентной системы. В связи с этим для системы (1) приходится рассматривать различные определения моментной устойчивости решений по части компонент, к которым сводится моментная устойчивость решений по части любых компонент для этой системы. Кроме того, в каждом случае метод регуляризации имеет свои особенности. Для системы (1) необходимо отдельно изучить моментную устойчивость решений: по всем непрерывным компонентам; по всем дискретным компонентам; по некоторым первым непрерывным компонентам; по некоторым первым дискретным компонентам; по всем непрерывным и по некоторым первым дискретным компонентам; по некоторым первым непрерывным и по всем дискретным компонентам; по некоторым первым непрерывным и дискретным компонентам. К этим видам устойчивости сводится моментная устойчивость решений по любым компонентам для системы (1).

В рамках этой статьи остановимся на изучении моментной устойчивости решений системы (1) по всем непрерывным и по всем дискретным компонентам.

В дальнейшем нам также понадобятся следующие обозначения:

– L^n – линейное пространство n-мерных случайных процессов, заданных на $(-\infty,0)$, которые не зависят от винеровских процессов $B_i, i=2,...,m$ и имеют п.н. ограниченные в существенном траектории;

– $k_q^n=\{\alpha:\alpha\in k^n,\|\alpha\|_{k_q^n}\overset{def}{=}\left(E|\alpha|^q\right)^{1/q}<\infty\}$;

– $L_q^n=\{\varphi:\varphi\in L^n,\|x\|_{L_q^n}\overset{def}{=}vrai\sup\limits_{\zeta<0}\left(E|\varphi(\zeta))|^q\right)^{1/q}<\infty\}$.

Определение 1. Нулевое решение системы (1) или систему (1) назовем:

– q-*устойчивым* по непрерывным (по дискретным) компонентам, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для любых $b\in k_q^n$, $\varphi\in L_q^n$ и $\|b\|_{k_q^n}+\|\varphi\|_{L_q^n}<\delta$ будет выполнено неравенство $\left(E\left|\overline{x}(t,b,\varphi)\right|^q\right)^{1/q} \le \varepsilon$ $\left(\left(E\left|\overline{\overline{x}}([t],b,\varphi)\right|^q\right)^{1/q} \le \varepsilon\right)$ для любого $t \ge 0_+$;

– *асимптотически* q*-устойчивым* по непрерывным (по дискретным) компонентам, если оно p-устойчиво по непрерывным (по дискретным) компонентам относительно начальных данных, и, кроме того, для любых $b \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ и $\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n} < \delta$ будет выполнено соотношение $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(E\left|\overline{x}(t,b,\varphi)\right|^q\right)^{1/q} = 0$ $\left(\left(\lim\limits_{t\to+\infty} E\left|\overline{\overline{x}}([t],b,\varphi)\right|^q\right)^{1/q} = 0\right)$;

- *экспоненциально* q*-устойчивым* по непрерывным (по дискретным) компонентам, если найдутся такие числа $\overline{c} > 0$, $\beta > 0$, что для решения $x(t,b,\varphi)\,(t \in (-\infty,\infty))$ задачи (1), (1*a*), (1*b*) при любых $b \in k_q^n$, $\varphi \in L_q^n$ выполнено неравенство

$$\left(E\left|\overline{x}(t,b,\varphi)\right|^q\right)^{1/q} \le \overline{c}\left(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}\right)\exp\{-\beta t\} \qquad (t \ge 0)$$

$$\left(\left(E\left|\overline{\overline{x}}([t],b,\varphi)\right|^q\right)^{1/q} \le \overline{c}\left(\|b\|_{k_q^n} + \|\varphi\|_{L_q^n}\right)\exp\{-\beta t\}\,(t \ge 0)\right).$$

Аналогично дается определение моментной устойчивости любого решения системы (1) по непрерывным (по дискретным) компонентам. Для системы (1) моментная устойчивость тривиального решения по непрерывным (по дискретным) компонентам эквивалентна моментной устойчивости любого решения системы (1) по непрерывным (по дискретным) компонентам.

Метод регуляризации. Как отмечалось ранее, моментную устойчивость системы (1) относительно непрерывных (дискретных) компонент будем исследовать методом преобразования этой системы в систему, для которой легко можно установить необходимое свойство, обусловливающее изучаемую устойчивость.

В дальнейшем, если B – $l \times n$-матрица, то B^1, B^2 – матрицы, полученные из матрицы B после зачеркивания $n-l$ последних и l первых столбцов соответственно, если B – $(n-l)\times n$-матрица, то B^3, B^4 – матрицы, полученные из матрицы B после зачеркивания $n-l$ последних и l первых столбцов соответственно.

Далее будем пользоваться следующим представлением для решения задачи (1), (1a), (1b): $x(t,b,\varphi) = col\,(\hat{x}(t), \breve{x}([t])) + \hat{\varphi}(t)$, где $\hat{x}(t)$ – неизвестный l-мерный случайный процесс, заданный на $(-\infty,\infty)$, такой, что $\hat{x}(t) = 0$ при $t < 0$, $\hat{x}(t) = \overline{x}(t)$ при $t \ge 0$, где $\breve{x}(t)$ – неизвестный $n-l$-мерный случайный процесс, заданный на $(-\infty,\infty)$, такой, что $\breve{x}(t) = 0$ при $t < 0$, $\breve{x}(t) = \overline{\overline{x}}(t)$ при $t \ge 0$ и $\hat{\varphi}(t)$ – известный n-мерный случайный процесс на $(-\infty,\infty)$, такой, что $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t)$ при $t < 0$ и $\hat{\varphi}(t) = 0$ при $t \ge 0$. Тогда задача (1), (1a), (1b) эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) &= ((V_1\hat{x})(t) + (V_2\breve{x})(t) + (F_1\varphi)(\mathrm{t})\,)dZ(t)\ (t \ge 0), \\ \breve{x}(s+1) &= \breve{x}(s) + (V_3\hat{x})(s) + (V_4\breve{x})(s) + (F_2\,\varphi)(\mathrm{s})\ \ (s \in N_+) \end{aligned} \tag{2}$$

$$x(0) = b, \tag{3}$$

где

$$(V_1\hat{x})(t)=\left(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^1\hat{x}(h_{1l}(t)),\sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t))^1\hat{x}(h_{2j}(t)),...,\sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^1\hat{x}(h_{mj}(t))\right),$$

$$(V_2\breve{x})(t)=\left(-\sum_{j=1}^{m_1}(A_{1j}(t))^2\breve{x}([h_{1l}(t)]),\sum_{j=1}^{m_2}(A_{2j}(t))^2\breve{x}([h_{2j}(t)]),...,\sum_{j=1}^{m_m}(A_{mj}(t))^2\breve{x}([h_{mj}(t)])\right),$$

$$(V_3\hat{x})(s)=\left(-\sum_{j=0}^{s}(A_1(s,j))^3\hat{x}(j)h,\ \sum_{j=0}^{s}(A_2(s,j))^3\hat{x}(j)\int_{sh}^{(s+1)h}dB_2(\zeta),..,\sum_{j=0}^{s}(A_m(s,j))^3\hat{x}(j)\int_{sh}^{(s+1)h}dB_m(\zeta)\right),$$

$$(V_4\breve{x})(s)=\left(-\sum_{j=0}^{s}(A_1(s,j))^4\breve{x}(j)h,\ \sum_{j=0}^{s}(A_2(s,j))^4\breve{x}(j)\int_{sh}^{(s+1)h}dB_2(\zeta),..,\sum_{j=0}^{s}(A_m(s,j))^4\breve{x}(j)\int_{sh}^{(s+1)h}dB_m(\zeta)\right),$$

$$(\mathrm{F}_1\phi)(\mathrm{t})=\left(-\sum_{j=1}^{m_1}A_{1j}(t)\hat{\phi}(h_{1j}(t)),\sum_{j=1}^{m_2}A_{2j}(t)\hat{\phi}(h_{2j}(t)),...,\sum_{j=1}^{m_m}A_{mj}(t)\hat{\phi}(h_{mj}(t))\right),$$

$$(\mathrm{F}_2\varphi)(\mathrm{s})=-\sum_{j=-\infty}^{-1}A_1(s,j)\hat{\varphi}(j)h+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=-\infty}^{-1}A_i(s,j)\hat{\varphi}(j)\int_{sh}^{(s+1)h}dB_i(\zeta)\ ,$$

$$\mathrm{Z}(\mathrm{t})=col(t,B_2(t),...,B_m(\mathrm{t}))\ .$$

В дальнейшем также будем пользоваться следующими обозначениями:

– D^k – линейное пространство k-мерных случайных процессов, заданных на $(-\infty,-\infty)$, равных нулю при $t<0$, прогрессивно измеримых при $t\geq 0$, траектории которых п. н. непрерывны справа и имеют пределы слева;

– $\overline{L}^l$ – линейное пространство $l\times m$-матриц, заданных на $[0,+\infty)$, строки которых есть l-мерные прогрессивно измеримые случайные процессы, локально суммируемые по случайному процессу Z;

– $\gamma:[0,\infty)\to R^1$ – положительная непрерывная функция;

– $M_q^\gamma=\{x:x\in D^l,\|x\|_{M_q^\gamma}\overset{def}{=}\sup_{t\in(-\infty,+\infty)}\left(E|\gamma(t)x(t)|^q\right)^{1/q}<\infty\}(M_q^1=M_q)$;

– $m_q^\gamma=\{x:x\in D^{n-l},\|x\|_{m_q^\gamma}\overset{def}{=}\sup_{t\in(-\infty,+\infty)}\left(E|\gamma(t)x(t)|^q\right)^{1/q}<\infty\}(m_q^1=m_q)$.

Очевидно, что в системе (2) V_1,V_2 являются линейными операторами, действующими из пространств D^l,D^{n-l} соответственно в пространство $\overline{L}^l$, и $F_1\varphi$ принадлежит пространству $\overline{L}^l$.

Определение 2. Систему (1) назовем M_q^γ-устойчивой (m_q^γ-устойчивой), если для решения задачи (2), (3) при любых $b\in k_q^n$, $\varphi\in L_q^n$ выполняются соотношение $\hat{x}\in M_q^\gamma$ ($\breve{x}\in m_q^\gamma$) и неравенство $\|\hat{x}\|_{M_q^\gamma}\leq c\left(\|b\|_{k_q^n}+\|\varphi\|_{L_q^n}\right)$ $\left(\|\breve{x}\|_{m_p^\gamma}\leq c\left(\|b\|_{k_q^n}+\|\varphi\|_{L_q^n}\right)\right)$ для некоторого положительного числа c.

Очевидно, что:

1) если система (1) M_q^γ-устойчива (m_q^γ-устойчива), то она и q-устойчива по непрерывным (по дискретным) компонентам при $\gamma(t)=1$ ($t\geq 0$);

2) если система (1) M_q^γ-устойчива (m_q^γ-устойчива), то она и асимптотически q-устойчива по непрерывным (по дискретным) компонентам при $\gamma(t) \geq \delta$ $(t \geq 0)$ для некоторого $\delta > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \gamma(t) = +\infty$;

3) если система (1) M_q^γ-устойчива (m_q^γ-устойчива), то она и экспоненциально q-устойчива по непрерывным (по дискретным) компонентам при $\gamma(t) = \exp\{\beta t\}$ $(t \geq 0)$ для некоторого $\beta > 0$.

Используя результаты работ [12], [13], уравнение (2) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \overline{X}(t)\hat{x}(0) + (C_1(V_2\breve{x} + F_1\varphi))(t)\ (t \geq 0), \\ \breve{x}(s) &= \overline{\overline{X}}(s,0)\breve{x}(0) + (C_2(V_3\hat{x} + F_2\ \varphi))(\mathrm{s})\ (s \in N_+), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\overline{X}(t)$ $(\overline{X}(0) = \overline{\mathrm{E}})$ – $l \times l$-матрица, столбцами которой являются решения уравнения $d\hat{x}(t) = (V_1\hat{x})(t)\, dZ(t)\ (t \geq 0)$, C_1 – линейный оператор, который действует из пространства $\overline{L}^l$ в пространство $\overline{D}^l$, $\overline{\overline{X}}(s,0)$ $(\overline{\overline{\mathrm{X}}}(0,0) = \overline{\mathrm{E}})$ – $(n-l)\times(n-l)$-матрица, столбцами которой являются решения уравнения $\breve{x}(s+1) = \breve{x}(s) + (V_4\breve{x})(s)$ $(s \in N_+)$, $(C_2(V_3\hat{x} +\ F_2\ \phi))(\mathrm{s})\ = \sum\limits_{\tau=0}^{s-1} \overline{\overline{X}}(s, \tau+1)((V_3\hat{x})(s) +\ (F_2\ \phi)(\mathrm{s}))$.

Рассмотрим вспомогательную систему вида

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) &= ((Q_1\hat{x})(t) + f_1(\mathrm{t}))dZ(t)\ (t \geq 0), \\ \breve{x}(s+1) &= \breve{x}(s) + (Q_2\breve{x})(s) + f_2(\mathrm{s})\ (s \in N_+), \end{aligned} \tag{5}$$

где Q_1, Q_2 – некоторые операторы вида V_1, V_4 соответственно, $f_1(t)$ – $l \times m$-матрица, заданная на $[0,+\infty)$, строки которой есть l-мерные прогрессивно измеримые случайные процессы, локально суммируемые по случайному процессу Z, $f_2(s)$ – некоторая скалярная $\Im_s$-измеримая случайная величина при $s \in N_+$.

Тогда в силу результатов работ [12], [13] решение системы (5) $col\,(\hat{x}(t), \breve{x}(t))$ можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \hat{X}(t)\hat{x}(0) + (C_3 f_1)(t)\ (t \geq 0), \\ \breve{x}(s) &= \breve{X}(s,0)\breve{x}(0) + (C_4 f_2)(\mathrm{s})\ (s \in N_+), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\hat{X}(t)$ $(\hat{\mathrm{X}}(0) = \overline{\mathrm{E}})$ – $l \times l$ – матрица, столбцами которой являются решения уравнения $d\hat{x}(t) = (Q_1\hat{x})(t)\, dZ(t)\ (t \geq 0)$, C_3 – линейный оператор, действующий из $\overline{L}^l$ в $\overline{D}^l$, $\breve{X}(s,0)$ $(\breve{X}(0,0) = \overline{\mathrm{E}})$ – $(n-l)\times(n-l)$-матрица, столбцами которой являются решения уравнения $\breve{x}(s+1) = \breve{x}(s) + (Q_2\breve{x})(s)$ $(s \in N_+)$, $(C_2(V_3\hat{x} +\ F_2\ \phi))(\mathrm{s})\ = \sum\limits_{\tau=0}^{s-1} \overline{\overline{X}}(s, \tau+1)((V_3\hat{x})(s) +\ (F_2\ \phi)(\mathrm{s}))$.

Используя формулы (4), (6) для непрерывных и дискретных компонент решения задачи (1), (1a), (1b), получим уравнения

$$\hat{x}(t) = X_1(t)b + (\Theta_1\hat{x})(t) + (K_1\varphi)(t) \ \ (t \geq 0), \tag{7}$$

$$\breve{x}(s) = X_2(s)b + (\Theta_2\breve{x})(s) + (K_2\varphi)(s) \ \ (s \in N_+), \tag{8}$$

где $X_1(t) = \left(\hat{X}(t) \ (V_2\overline{\overline{X}})(t)\right)$ – $l \times n$-матрица, образованная матрицами $\hat{X}(t)$ и $(V_2\overline{\overline{X}})(t)$, $(\Theta_1\hat{x})(t) = (C_3(V_1 - Q_1 + V_2C_2V_3)\hat{x})(t)$, $(K_1\varphi)(t) = (C_3(V_2C_2F_2 + F_1)\varphi)(t)$, $X_2(s) = \left(\breve{X}(s,0) \ (V_3\overline{X})(s)\right)$ – $(n-l)\times n$-матрица, образованная матрицами $\breve{X}(s,0)$ и $(V_3\overline{X})(s)$, $(\Theta_2\breve{x})(s) = (C_4(V_4 - Q_2 + V_3C_1V_2)\breve{x})(s)$, $(K_2\varphi)(s) = (C_4(V_3C_1F_1 + F_2)\varphi)(s)$.

В силу представлений (7) и (8) для непрерывных и дискретных компонент решения задачи (1), (1a), (1b) соответственно легко можно убедиться в справедливости следующих теорем.

Теорема 1. Пусть для любых $\hat{x} \in M_p^\gamma$, $\varphi \in L_p^n$, $b \in k_p^n$ имеем, что $X_1b \in M_p^\gamma$, $\Theta_1\hat{x} \in M_p^\gamma$, $K_1\varphi \in M_p^\gamma$, $\| X_1b \|_{M_p^\gamma} \leq c_1 \| b \|_{k_p^n}$, $\| \Theta_1\hat{x} \|_{M_p^\gamma} \leq c_2 \| \hat{x} \|_{M_p^\gamma}$, $\| K_1\varphi \|_{M_p^\gamma} \leq c_3 \| \varphi \|_{L_p^n}$, где c_1, c_2, c_3 – некоторые положительные числа и $c_2 < 1$. Тогда система (1) M_p^γ-устойчива.

Теорема 2. Пусть для любых $\breve{x} \in m_p^\gamma$, $\varphi \in L_p^n$, $b \in k_p^n$ имеем, что $X_2b \in M_p^\gamma$, $\Theta_2\breve{x} \in M_p^\gamma$, $K_2\varphi \in m_p^\gamma$, $\| X_2b \|_{m_p^\gamma} \leq c_1 \| b \|_{k_p^n}$, $\| \Theta_2\breve{x} \|_{M_p^\gamma} \leq c_2 \| \breve{x} \|_{M_p^\gamma}$, $\| K_2\varphi \|_{m_p^\gamma} \leq c_3 \| \varphi \|_{L_p^n}$, где c_1, c_2, c_3 – некоторые положительные числа и $c_2 < 1$. Тогда система (1) m_p^γ-устойчива.

Отметим, что в работе [9] были получены достаточные признаки моментной устойчивости решений по непрерывной компоненте для конкретной системы, состоящей из линейного дифференциального и линейного разностного уравнений Ито с последействием в терминах параметров уравнений этой системы.

Литература

1. *Марченко В.М., Поддубная О.Н.* Представление решений гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнения. 2006. Т. 42, № 6. – С. 741–755.

2. *Марченко В.М., Луазо Ж.Ж.* Об устойчивости гибридных дифференциально-разностных систем // Дифференц. уравнения. 2009. Т. 45, № 5. – С. 728–740.

3. *Ларионов А.С., Симонов П.М.* Устойчивость гибридных функционально-дифференциальных систем с последействием (ГФДСП) // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 13, № 4. – С. 34–37.

4. *Chudov A., Maksimov V.* Linear boundary value problems and control problems for a class of functional differential equations with continuous and discrete times // Functional Differential Equations. 2012. Vol. 19, no. 1–2. – Pp.49–62.

5. *Li X., Mao X.* Stabilisation of highly nonlinear hybrid stochastic differential delay equations by delay feedback control //Automatica. 2020. Vol. 12, no. 108657.

6. *Mao X.R.* Stochastic Differential Equations and Applications. – Horwood Publishing Ltd., 1997.

7. *Azbelev N.V., Simonov P.M.* Stability of Differential Equations With Aftereffect. – London, Taylor and Francis. 2002.

8. *Azbelev N.V., Maksimov V.P., Rakhmatulina L.F.* Introduction to the Theory of Functional Differential Equations. Methods and Applications. – New York: Hindawi, 2007.

9. *Кадиев Р.И., Шахбанова З.И.* Устойчивость решений одной гибридной системы Ито с последействием по части переменных относительно начальных данных // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2022. Т. 37, вып. 3. – С. 7–17.

10. *Кадиев Р.И.* Существование и единственность решения задачи Коши для функционально-дифференциальных уравнений по семимартингалу // Изв. вузов. Математика. 1995. Т. 10. – С. 35–40.

11. *Kadiev R.I., Ponosov A.V.* Partial Lyapunov stability of linear stochastic functional differential equations with to initial values // Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems. Ser. A: Mathematical Analysis, 2008. Vol. 15, no. 5. – Pp. 727–754.

12. *Kadiev R., Ponosov A.* The W-transform in stability analysis for stochastic linear functional difference equations // J. Math. Analysis and Appl. 2012. Vol. 389, iss. 2. – Pp. 1239–1250.

13. *Кадиев Р.И.* Устойчивость решений линейных разностных уравнений Ито с последействием // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 3. – С. 293–301.

Поступила в редакцию 2 февраля 2023 г.

UDC 517.929.4+519.21

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-1-40–48

Revisiting the Question of Stability with Respect to the Solution Components of the Linear Continuous-discrete Ito Systems with Aftereffect

R.I. Kadiyev[1, 2], Z.I. Shakhbanova[1]

[1] Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a
[2] Dagestan Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45; kadiev_r@mail.ru

The paper studies the issues of stability with respect to a part of the components for linear stochastic Ito systems with a delay, which contain both continuous and discrete components. To study these issues, a modified regularization method based on the choice of a model or auxiliary system is proposed and justified. For deterministic functional differential equations, an analogue of this method was previously developed by N.V. Azbelev and his students.

Keywords: *stability of solutions with respect to a part of the components, differential and difference Ito equations, regularization method.*

Received 2 February 2023