МАТЕМАТИКА

УДК 519.62+519.65; 517.51

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-1-33–39

***А.-Р.К. Рамазанов*[1, 2], *В.Г. Магомедова*[1]**

О решении начальной задачи для нормальной системы с помощью рациональных сплайн-функций

[1] *Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ar-ramazanov@rambler.ru*

[2] *Дагестанский федеральный исследовательский центр (ДФИЦ) РАН; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45*

В развитие исследований по эффективным приложениям сплайн-функций по рациональным интерполянтам, построенных ранее авторами, к решению дифференциальных уравнений и их систем представлены методы построения гладких решений в виде рациональных сплайн-функций специального вида для начальной задачи в случае нормальной системы двух дифференциальных уравнений.

Структура применяемых рациональных сплайн-функций допускает построение сравнительно простых алгоритмов поиска гладких решений дифференциальных уравнений.

При этом рассматриваемые рациональные сплайн-функции (в отличие от классических полиномиальных сплайнов) обладают свойством равномерной сходимости в случае произвольной непрерывной на отрезке функции для любой последовательности сеток узлов с диаметром, стремящимся к нулю.

Более того, достаточно высокая скорость равномерной сходимости интерполяционных рациональных сплайн-функций на рассматриваемых классах искомых решений обеспечивает сходимость приближенных решений в виде рациональных сплайн-функций к точному решению системы дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *интерполяционные сплайны, рациональные сплайны, нормальные системы уравнений.*

Введение

Полиномиальные сплайны и их важные приложения в самых разных областях науки и техники исследованы многими авторами (см., напр., [1–6] и цитированную в них литературу).

Рассматривались также приложения рациональных сплайн-функций различных видов в основном для решения задач о формосохраняющих интерполяциях дискретных данных (см., напр., [3; 7–9]).

Много научных работ посвящено численным решениям дифференциальных уравнений и их систем с использованием полиномиальных сплайнов (см., напр., [1–3; 5]).

Определенный интерес представляют вопросы численного решения систем нормальных дифференциальных уравнений с помощью гладких рациональных сплайн-функций специального вида. Дело в том, что структура этих сплайн-функций позволяет построить сравнительно более простые алгоритмы поиска гладких решений систем дифференциальных уравнений.

Гладкостные свойства таких рациональных сплайн-функций, вопросы их сходимости, приложения к решению некоторых дифференциальных уравнений рассмотрены в [10–12].

В данной работе речь идет о начальной задаче вида

$$\frac{dy}{dx} = F_1(x, y, z), \tag{1}$$

$$\frac{dz}{dx} = F_2(x, y, z), \tag{2}$$

$$y(a) = A_1, \;\; z(a) = A_2. \tag{3}$$

Будем считать, что задача (1)–(3) имеет единственное решение $(y(x), z(x))$ класса C^1 на рассматриваемом промежутке [a, b] или [a, b), а функции $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ имеют ограниченные частные производные первого порядка по переменным y и z в некоторой трехмерной области *T*, определяемой промежутком изменения аргумента x и области изменения функций $y(x)$ и $z(x)$.

1. Основные конструкции и вспомогательные результаты

В случае, когда функции $y(x), z(x) \in C^1_{[a,b]}$, как известно [10], для любой сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_N = b \;\; (N \geq 2)$ и набора полюсов $g = \{g_1, g_2, ..., g_{N-1}\}$ таких, что для $\lambda > 0$ имеем

$$g_i = \begin{cases} x_{i+1} + \lambda h_{i+1} & \text{при } h_{i+1} \leq h_i, \\ x_{i-1} - \lambda h_i & \text{при } h_{i+1} > h_i \quad (i = 1, 2, ..., N-1), \end{cases}$$

существуют рациональные сплайн-функции $R_{N,1}(x, y)$ и $R_{N,1}(x, z)$, для которых при $u(x) = y(x)$ и отдельно при $u(x) = z(x)$ выполняются неравенства

$$\left| R_{N,1}(x, u) - u(x) \right| \leq \left(4 + \frac{2}{\lambda} \right) \Delta_i \, \omega(\Delta_i, u'), \tag{4}$$

$$\left| R'_{N,1}(x, u) - u'(x) \right| \leq \left(12 + \frac{2}{\lambda} \right) \omega(\Delta_i, u'), \tag{5}$$

где $\Delta_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}$, $\lambda > 0$, $x \in [a, b]$, $\omega(t, u')$ – модуль непрерывности производной $u'(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Сплайн-функции $R_{N,1}(x, u) = R_{N,1}(x, u, \Delta, g)$ при $x \in [x_{i-1}, \; x_i]$ $(i = 1, 2, ..., N)$ удовлетворяют равенствам

$$R_{N,1}(x, u) = R_i(x, u) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + R_{i-1}(x, u) \frac{x_i - x}{x_i - x_{i-1}},$$

где для $i = 1, 2, ..., N-1$ рациональные интерполянты

$$R_i(x, u) = \alpha_{i,u} + \beta_{i,u}(x - x_i) + \gamma_{i,u} \frac{1}{x - g_i}$$

определяются равенствами $R_i(x_j, u) = u(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$, а также полагаем $R_0(x, u) \equiv R_1(x, u),\ R_N(x, u) \equiv R_{N-1}(x, u)$.

Тогда из условий интерполяции для $i = 1, 2, ..., N-1$ получим равенства

$$\alpha_{i,u} = u(x_i) - u(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_{i+1} - g_i),$$

$$\beta_{i,u} = u(x_{i-1}, x_{i+1}) + u(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_i - g_i),$$

$$\gamma_{i,u} = u(x_{i-1}, x_i, x_{i+1})(x_{i-1} - g_i)(x_i - g_i)(x_{i+1} - g_i).$$

Всюду ниже для $x \in [a, b]$ обозначим также

$$G_1(x) = R'_{N,1}(x, y) - F_1(x, R_{N,1}(x, y), R_{N,1}(x, z)),$$

$$G_2(x) = R'_{N,1}(x, z) - F_2(x, R_{N,1}(x, y), R_{N,1}(x, z)).$$

Тогда найдется некоторая точка c_1 между значениями $y(x)$ и $R_{N,1}(x, y)$ и точка c_2 между $z(x)$ и $R_{N,1}(x, z)$ такие, что

$$\begin{aligned} G_1(x) &= R'_{N,1}(x, y) - y'(x) + F_1(x, y, z) - F_1(x, R_{N,1}(x, y), R_{N,1}(x, z)) = \\ &= [R'_{N,1}(x, y) - y'(x)] + [F_1(x, y, z) - F_1(x, R_{N,1}(x, y), z)] + \\ &+ [F_1(x, R_{N,1}(x, y), z) - F_1(x, R_{N,1}(x, y), R_{N,1}(x, z))] = \\ &= [R'_{N,1}(x, y) - y'(x)] + \frac{\partial F_1(x, c_1, z)}{\partial y}[y(x) - R_{N,1}(x, y)] + \\ &+ \frac{\partial F_1(x, R_{N,1}(x, y), c_2)}{\partial z}[z(x) - R_{N,1}(x, z)]. \end{aligned}$$

Так как по условию частные производные $\frac{\partial F_1}{\partial y}$ и $\frac{\partial F_1}{\partial z}$ ограничены в рассматриваемой области T, отсюда и из неравенств (4) и (5) вытекает, что $\max\limits_{a \le x \le b} | G_1(x) | \to 0$ при $\|\Delta\| \to 0$.

Аналогично показываем, что $\max\limits_{a \le x \le b} | G_2(x) | \to 0$ при $\|\Delta\| \to 0$.

С использованием соотношений $\max\limits_{a \le x \le b} | G_1(x) | \to 0$ и $\max\limits_{a \le x \le b} | G_2(x) | \to 0$ (при $\|\Delta\| \to 0$) можно доказать сходимость приближенного решения в виде рациональных сплайн-функций к точному решению задачи (1)–(3).

Введем неизвестные $Y = \{y_0, y_1, ..., y_N\}$ и $Z = \{z_0, z_1, ..., z_N\}$, в выражениях интерполянтов $R_i(x, y)$ значения $y(x_j)$ заменим на y_j (с соответствующими индексами $j = 0, 1, ..., N$), а в выражениях $R_i(x, z)$ значения $z(x_j)$ заменим на z_j.

В результате получим новые рациональные функции $R_i(x, Y)$ и $R_i(x, Z)$ и, соответственно, новые сплайн-функции $R_{N,1}(x, Y) = R_{N,1}(x, Y, \Delta, g)$ и $R_{N,1}(x, Z) = R_{N,1}(x, Z, \Delta, g)$, для которых при $x \in [x_{i-1},\ x_i]$ $(i = 1, 2, ..., N)$ имеем

$$R_{N,1}(x,Y)=R_i(x,Y)\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}+R_{i-1}(x,Y)\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}, \tag{6}$$

$$R_{N,1}(x,Z)=R_i(x,Z)\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}+R_{i-1}(x,Z)\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}. \tag{7}$$

Для нахождения неизвестных значений $Y=\{y_0,y_1,...,y_N\}$ и $Z=\{z_0,z_1,...,z_N\}$, а значит, и искомых сплайн-функций $R_{N,1}(x,Y)$ и $R_{N,1}(x,Z)$ вместо начальной задачи (1)–(3) рассмотрим следующую систему алгебраических уравнений относительно $y_0,y_1,...,y_N$ и $z_0,z_1,...,z_N$:

$$\begin{aligned} &R'_{N,1}(x_i,Y)=F_1(x_i,R_{N,1}(x_i,Y),R_{N,1}(x_i,Z)), \quad i=1,2,...,N,\\ &R'_{N,1}(x_i,Z)=F_1(x_i,R_{N,1}(x_i,Y),R_{N,1}(x_i,Z)), \quad i=1,2,...,N,\\ &R_{N,1}(a,Y)=A_1, \quad R_{N,1}(a,Z)=A_2. \end{aligned} \tag{8}$$

Приближенное решение подобной системы (8) построим двояко в зависимости от того, решение принадлежит классу $C^1_{[a,b]}$ или классу $C^1_{[a,b)}$.

2. Решение начальной задачи в классе $C^1_{[a,b]}$

Для краткости записи для заданного натурального $N\ge 2$ рассмотрим случай равномерных сеток узлов $x_i=a+ih$, $i=0,1,...,N$, где шаг $h=(b-a)/N$; при этом для заданного значения $\lambda>0$ в качестве полюсов рациональных интерполянтов возьмем числа $g_i=x_{i+1}+\lambda h$, $i=1,2,...,N-1$.

Тогда получим следующие группы равенств:

1) при $i=0,1,...,N$ имеем

$R_{N,1}(x_i,Y)=R_i(x_i,Y)=y_i$, $R_{N,1}(x_i,Z)=R_i(x_i,Z)=z_i$;

2) при $i=1,2,...,N-1$ имеем

$$\begin{aligned} &R'_{N,1}(x_i,Y)=R'_i(x_i,Y)=\alpha\, y_{i-1}+\beta\, y_i+\gamma\, y_{i+1},\\ &R'_{N,1}(x_i,Z)=R'_i(x_i,Z)=\alpha\, z_{i-1}+\beta\, z_i+\gamma\, z_{i+1}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\alpha=-\dfrac{\lambda+2}{2(\lambda+1)h}$, $\beta=\dfrac{1}{(\lambda+1)h}$, $\gamma=\dfrac{\lambda}{2(\lambda+1)h}$;

3) обозначив $\alpha_0=-\dfrac{3\lambda+4}{2(\lambda+2)h}$, $\beta_0=\dfrac{2(\lambda+1)}{(\lambda+2)h}$, $\gamma_0=-\dfrac{\lambda}{2(\lambda+2)h}$, имеем

$$\begin{aligned} &R'_{N,1}(x_0,Y)=R'_1(x_0,Y)=\alpha_0\, y_0+\beta_0\, y_1+\gamma_0\, y_2,\\ &R'_{N,1}(x_0,Z)=R'_1(x_0,Z)=\alpha_0\, z_0+\beta_0\, z_1+\gamma_0\, z_2, \end{aligned} \tag{10}$$

4) обозначив $\alpha_N=\dfrac{\lambda+2}{2\lambda h}$, $\beta_N=-\dfrac{2(\lambda+1)}{\lambda h}$, $\gamma_N=\dfrac{3\lambda+2}{2\lambda h}$, имеем

$$\begin{aligned} &R'_{N,1}(x_N,Y)=R'_{N-1}(x_N,Y)=\alpha_N\, y_{N-2}+\beta_N\, y_{N-1}+\gamma_N\, y_N,\\ &R'_{N,1}(x_N,Z)=R'_{N-1}(x_N,Z)=\alpha_N\, z_{N-2}+\beta_N\, z_{N-1}+\gamma_N\, z_N. \end{aligned} \tag{11}$$

Следовательно, для нахождения $Y = \{y_0, y_1, ..., y_N\}$ и $Z = \{z_0, z_1, ..., z_N\}$ из (8), (9) и (11) получим следующую систему, вообще говоря, нелинейных уравнений:

$$\alpha\, y_{i-1} + \beta y_i + \gamma\, y_{i+1} = F_1(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, ..., N-1, \tag{12}$$

$$\alpha_N\, y_{N-2} + \beta_N\, y_{N-1} + \gamma_N\, y_N = F_1(x_N, y_N, z_N), \tag{13}$$

$$\alpha\, z_{i-1} + \beta z_i + \gamma z_{i+1} = F_2(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, ..., N-1, \tag{14}$$

$$\alpha_N\, z_{N-2} + \beta_N\, z_{N-1} + \gamma_N\, z_N = F_2(x_N, y_N, z_N), \tag{15}$$

$$y_0 = A_1, \quad z_0 = A_2.$$

Заметим, что в случае линейности функций $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ относительно y и z система алгебраических уравнений (12)–(15) легко сводится к трехдиагональному виду.

3. Решение начальной задачи в классе $C^1_{[a,b)}$

В этом случае возьмем точку $c \in [a, b)$ в любой близости от правого конца промежутка $[a, b)$ и натуральное число $N > (b-a)/(b-c)$.

Положим $h = (c-a)/(N-1)$ и рассмотрим равномерную сетку $x_i = a + ih$ ($i = 0, 1, ..., N$), для которой в качестве полюсов рациональных интерполянтов возьмем точки $g_i = x_{i+1} + \lambda h$ с произвольным значением параметра $\lambda > 0$.

Мы ввели дополнительный вспомогательный узел x_N, а для построения приближенного решения на отрезке $[a, c] \subset [a, b)$ получим следующую существенно более простую для разрешения систему алгебраических уравнений (с учетом $y_0 = A_1$, $z_0 = A_2$):

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 y_0 + \beta_0 y_1 + \gamma_0 y_2 = F_1(x_0, y_0, z_0),\\
&\alpha\, y_{i-1} + \beta y_i + \gamma\, y_{i+1} = F_1(x_i, y_i, z_i), \quad i = 1, 2, ..., N-1,\\
&\alpha_0 z_0 + \beta_0 z_1 + \gamma_0 z_2 = F_2(x_0, y_0, z_0),\\
&\alpha z_{i-1} + \beta z_i + \gamma z_{i+1} = F_2(x_i, y_i, z_i), \ i = 1, 2, ..., N-1.
\end{aligned} \tag{16}$$

Возьмем первое уравнение из этой системы совместно со вторым уравнением при $i = 1$ и исключим из полученных двух уравнений y_2.

Аналогично уравнение в третьей строке возьмем совместно с уравнением в четвертой строке при $i = 1$ и исключим из них z_2.

В результате получим следующую систему из двух, вообще говоря, нелинейных алгебраических уравнений относительно y_1 и z_1:

$$\begin{aligned}
&Ay_0 + By_1 = \gamma_0 F_1(x_1, y_1, z_1) - \gamma F_1(x_0, y_0, z_0),\\
&Az_0 + Bz_1 = \gamma_0 F_2(x_1, y_1, z_1) - \gamma F_{21}(x_0, y_0, z_0),
\end{aligned} \tag{17}$$

где $A = \alpha\gamma_0 - \alpha_0\gamma$, $B = \beta\gamma_0 - \beta_0\gamma$.

К системе (17) можно применить метод итераций. После нахождения y_1 и z_1 (y_0 и z_0 уже известны) значения всех остальных неизвестных $y_2, y_3, ..., y_{N-1}$ и

$z_2, z_3, \ldots, z_{N-1}$ можно найти из (16) последовательной подстановкой предыдущих пар найденных их значений.

Решение начальной задачи в виде рациональных сплайн-функций класса C^1 строится с использованием найденного дискретного решения по соответствующим формулам (6) и (7), приведенным выше.

Литература

1. *Алберг Дж., Нилсон Э., Уолш Дж.* Теория сплайнов и ее приложения. – М.: Мир, 1972. – 319 с.
2. *Стечкин С.Б., Субботин Ю.Н.* Сплайны в вычислительной математике. – М.: Наука, 1976. – 248 с.
3. *Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л.* Методы сплайн-функций. – М.: Наука, 1980. – 352 с.
4. *Корнейчук Н.П.* Сплайны в теории приближения. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
5. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам. – М.: Радио и связь, 1985. – 304 с.
6. *Малоземов В.Н., Певный А.Б.* Полиномиальные сплайны. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1986. – 120 с.
7. *Schaback R.* Spezielle rationale Splinefunktionen // J. Approx. Theory. 1973. Vol. 7, no. 2. – Pp. 281–292.
8. *Tian R. and Geng H.L.* Error analysis of a rational interpolation spline // Intern. J. of Mathematical Analysis. 2011. Vol. 5, no. 26. – Pp. 1287–1294.
9. *Edeoa A., Gofeb G., Tefera T.* Shape preserving C^2 rational cubic spline interpolation // American Scientific Research Journal for Engineering, Technology and Sciences. 2015. Vol. 12, no. 1. – Pp. 110–122.
10. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Сплайны по трехточечным рациональным итерполянтам с автономными полюсами // Дагестанские электронные математические известия. 2017. Вып. 7. – С. 16–28.
11. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Безусловно сходящиеся интерполяционные рациональные сплайны // Мат. заметки. 2018. Т. 103, № 4. – С. 588–599.
12. *Магомедова В.Г., Рамазанов А.-Р.К.* О приближенном решении дифференциальных уравнений с помощью рациональных сплайн-функций // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 4. – С. 579–586.

Поступила в редакцию 28 января 2023 г.

UDC 519.62+519.65; 517.51

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-1-33–39

On Solving the Initial Problem for a Normal System Using Rational Spline Functions

***A.-R.K. Ramazanov*[1, 2], *V.G. Magomedova*[1]**

[1] *Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; ar-ramazanov@rambler.ru*

[2] *DFRC RAS; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45.*

The methods for constructing smooth solutions in the form of rational spline functions of a special form for the initial problem in the case of a normal system of two differential equations, developing the prior studies on the effective applications of spline functions on the rational interpolants to the solution of the differential equations and their systems are presented.

The structure of the applied rational spline functions allows the construction of relatively simple algorithms for finding smooth solutions to differential equations.

The considered rational spline functions (in contrast to the classical polynomial splines) have the property of uniform convergence in the case of an arbitrary function continuous on a segment for any sequence of grids of nodes with a diameter tending to zero.

Moreover, a sufficiently high rate of uniform convergence of interpolation rational spline functions on the considered classes of desired solutions ensures the convergence of approximate solutions in the form of rational spline functions to the exact solution of a system of differential equations.

Keywords: *Interpolation splines, rational splines, normal systems of equations.*

Received 28 January 2023