УДК 517.906

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-2-66-72

***Э.Г. Оруджев*[1], *Н.М. Намазова*[2]**

Об одной смешанной задаче для уравнения колебания стержня, содержащей в граничных условиях производные по времени

[1] *Бакинский государственный университет; Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23; elsharorucov63@mail.ru;*

[2] *Нахичеванский государственный университет; Азербайджан, AZ7012, г. Нахичевань, Университетский городок; Namazova1790@scientifictext.ru*

В работе для уравнения колебания стержня исследуется смешанная задача, содержащая в нераспадающихся граничных условиях производные по времени. Смешанной задаче сопоставлены спектральная задача для двучленного уравнения 4-го порядка с несоизмеримыми степенями параметра в граничных условиях и задача Коши для уравнения 2-го порядка со спектральным параметром относительно переменной времени. Найдено явное представление смешанной задачи в виде полного интегрального вычета от решений спектральной задачи и задачи Коши. При определенных условиях доказано существование классического решения изучаемой смешанной задачи.

Ключевые слова: *уравнение колебания стержня, смешанные задачи, вычеты, собственные значения, функция Грина.*

Введение и постановка задачи

Рассмотрим смешанную задачу для уравнения колебаний неоднородного стержня [1]

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial^4 u(x,t)}{\partial x^4}=f(x,t),\quad x\in(0,1),\ t\in[0,T],\ T>0 \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u(x,0)=\Phi_0(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\Phi_1(x), \tag{2}$$

при граничных условиях

$$u(0,t)=0,\quad u'_x(0,t)=0,\quad u''_x(0,t)+\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{x=1}=0,\ u'''_x(0,t)+\left.\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial t^2\partial x}\right|_{x=1}=0, \tag{3}$$

где $f(x,t)$ – неоднородная часть уравнения (1), определяющая внешнее воздействие на стержень, достаточно гладкая функция по обеим переменным; $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$ – функции, определяющие начальное положение оси стержня, достаточно гладкие.

Решением смешанной задачи (1)–(3) является функция $u(x,t)$, если она непрерывна по совокупности переменных *x* и *t*, где $x\in[0,1]$, $t\in[0,T]$ и удовлетворяет следующим условиям:

1) $\dfrac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k}$, $k=\overline{1,2}$ существуют и являются непрерывными в $D\{0\le t\le T,\ 0\le x\le 1\}$ для любого конечного $T>0$;

2) $\dfrac{\partial^k u(x,t)}{\partial x^k}$, $k=\overline{1,4}$ существуют и являются непрерывными в D;

3) $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1), начальным (2) и краевым (3) условиям.

Как известно, при решении смешанной задачи (1)–(3) можно использовать метод преобразования Лапласа [2–5, 8]. Согласно этому методу на поставленную задачу (1)–(3) действует оператор $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}u(x,t)dt$, где λ – комплексный параметр. По определению оператора $Y(x,\lambda)=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}u(x,t)dt$, от $u(x,t)$ потребуется, чтобы существовало такое вещественное число α_0, для которого $u_x^{(k)}(x,t)e^{-\alpha_0 t}$, $k=\overline{0,4}$ равномерно ограничено по x при $t\to\infty$. Эти требования обеспечивают существование интеграла $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}u(x,t)dt$ при $\operatorname{Re}\lambda=\alpha>\alpha_0$. После изучения полученной спектральной задачи применяется обратное преобразование Лапласа. Но описанная процедура нахождения классического решения смешанной задачи (1)–(2) приводит к громоздким аналитическим вычислениям.

Применим легко проверяемую и эффективную схему [6], не использующую технику метода преобразования Лапласа, что было успешно реализовано при исследовании решений смешанной задачи для волнового уравнения с производным 3-го порядка по времени в одном из граничных условий [7].

Решение смешанной задачи (1)–(3)

Согласно [6] смешанной задаче (1)–(3) сопоставляются две вспомогательные задачи:

1) спектральная задача нахождения решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^4Y}{dx^4}-\lambda^4Y=-\lambda^2\Phi_0(0)-\Phi_1(x)-\int\limits_0^\infty e^{-\lambda^2 t}f(x,t)dt \tag{4}$$

при граничных условиях

$$L_1(Y)=Y(0)=0,\ L_2(Y)=Y'(0)=0,\ L_3(Y)=Y''(0)+\lambda^2Y(1)=\Phi_0(1),$$
$$L_4(Y)=Y'''(0)+\lambda^4Y'(1)=-\Phi_1'(1)-\lambda^2\Phi_0'(1); \tag{5}$$

2) задача Коши для уравнения

$$\frac{d^2Z(x,t)}{\partial t^2}+\lambda^4Z(x,t)=f(x,t),\ t\in(0,T) \tag{6}$$

при начальных условиях

$$\left.\frac{\partial^k Z(x,t)}{\partial t^k}\right|_{t=0}=\Phi_k(x),\quad k=0,1. \tag{7}$$

Единственное решение задачи (4)–(5) можно представить в виде

$$Y(x,\lambda,f)=\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)\left[-\lambda^2\Phi_0(0)-\Phi_1(\xi)-\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}f(\xi,t)dt\right]+N(x,\lambda,\Phi_0,\Phi_1,f) \qquad (8)$$

Здесь $G(x,\xi,\lambda)=\dfrac{\Delta(\lambda,\xi,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ является функцией Грина задачи (4)–(5)

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} L_1(y_1) & L_1(y_2) & L_1(y_3) & L_1(y_4) \\ L_2(y_1) & L_2(y_2) & L_2(y_3) & L_2(y_4) \\ L_3(y_1) & L_3(y_2) & L_3(y_3) & L_3(y_4) \\ L_4(y_1) & L_4(y_2) & L_4(y_3) & L_4(y_4) \end{vmatrix} \qquad (9)$$

$$\Delta(x,\xi,\lambda)=\begin{vmatrix} g(x,\xi,\lambda) & y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & y_3(x,\lambda) & y_4(x,\lambda) \\ L_1(g)_x & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ L_2(g)_x & \vdots & & \Delta(\lambda) & \\ L_3(g)_x & \vdots & & & \\ L_4(g)_x & \vdots & & & \end{vmatrix}, \qquad (10)$$

$$y_1(x,\lambda)=e^{\lambda x},\ y_2(x,\lambda)=e^{-\lambda x},\ y_3(x,\lambda)=e^{i\lambda x},\ y_4(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}, \qquad (11)$$

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{\sum_{k=1}^{4}W_{4k}(\xi,\lambda)y_k(x,\lambda)}{2W(\xi,\lambda)},\qquad \begin{matrix} + \ \textit{при}\ \ 0\le\xi\le x \\ - \ \textit{при}\ \ 0\le x\le\xi \end{matrix}, \qquad (12)$$

$W(\xi,\lambda)$ – определитель Вронского от системы (11), $W_{4k}(\xi,\lambda)$ – алгебраическое дополнение элемента $(4,k)$ в определителе $W(\xi,\lambda)$:

$$N(x,\lambda,\Phi_0,\Phi_1,f)=\frac{\Delta_1(x,\lambda,\Phi_0,\Phi_1,f)}{\Delta(\lambda)}$$

$$\Delta_1(x,\lambda,\Phi_0,\Phi_1,f)=\begin{vmatrix} 0 & e^{\lambda x} & e^{i\lambda x} & e^{-i\lambda x} & e^{-\lambda x} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ F_1 & \vdots & & \Delta(\lambda) & \\ F_2 & \vdots & & & \\ 0 & \vdots & & & \end{vmatrix}$$

$$F_1=\Phi_0(1),\ F_2=-\Phi_1'(1)-\lambda^2\Phi_0'(1).$$

Для $g(x,\xi,\lambda)$, $L_i(g)_x$, $i=\overline{1,4}$ имеют место следующие аналитические представления:

$$g(x,\xi,\lambda)=\pm\frac{1}{2\lambda^3}\left[\frac{1}{4}e^{\lambda(x-\xi)}-\frac{1}{4}e^{-\lambda(x-\xi)}-\frac{1}{4i}e^{i\lambda(x-\xi)}+\frac{1}{4i}e^{-i\lambda(x-\xi)}\right],\quad \begin{matrix} + & \xi\le x \\ - & \xi\ge x \end{matrix},$$

$$L_1(g)_x=-\frac{1}{8\lambda^3}\left[e^{-\lambda\xi}-e^{\xi\lambda}-\frac{1}{i}e^{-i\lambda\xi}+\frac{1}{i}e^{i\lambda\xi}\right],$$

$$L_2(g)_x=-\frac{1}{8\lambda^2}\left[e^{-\lambda\xi}+e^{\xi\lambda}-e^{-i\lambda\xi}-e^{i\lambda\xi}\right],$$

$$L_3(g)_x=-\frac{1}{8\lambda}\left[e^{-\lambda\xi}-e^{\xi\lambda}-ie^{-i\lambda\xi}+ie^{i\lambda\xi}\right]+\frac{1}{8\lambda}\left[e^{\lambda(1-\xi)}-e^{-\lambda(1-\xi)}+ie^{i\lambda(1-\xi)}-ie^{-i\lambda(1-\xi)}\right],$$

$$Y_4(g)_x = -\frac{1}{8}\left[e^{-\lambda\xi} + e^{\xi\lambda} + e^{-i\lambda\xi} + e^{i\lambda\xi}\right] + \frac{\lambda^4}{8}\left[e^{\lambda(1-\xi)} + e^{-\lambda(1-\xi)} - e^{i\lambda(1-\xi)} - e^{-i\lambda(1-\xi)}\right].$$

Корни определителя $\Delta(\lambda)$ являются полюсами функции Грина спектральной задачи (4)–(5). В работе [11] непосредственным вычислением найдено выражение для $\Delta(\lambda)$:

$$\Delta(\lambda) = 4i\lambda^6\left\{\left[4\lambda^2+8\right] + \left[-2\lambda^2-2\right]e^{-i\lambda} + \left[-2\lambda^2-2\right]e^{i\lambda} + \left[2\lambda^2+2\right]e^{-\lambda} + \left[2\lambda^2+2\right]e^{\lambda} - \right.$$
$$\left. -\lambda^2 e^{-\lambda(1+i)} + \lambda^2 e^{\lambda(1+i)} - \lambda^2 e^{\lambda(1-i)} - \lambda^2 e^{-\lambda(1-i)}\right\}. \quad (13)$$

Запишем $\Delta(\lambda)$ в виде $\Delta(\lambda) = \sum_{k=1}^{9} P_k(\lambda)e^{\alpha_k\lambda}$. Корни $\Delta(\lambda)$, как показано в работах [9, 10], расположены вдоль логарифмических цепей, идущих по длине нормалей к сторонам многоугольника, построенного из выпуклой оболочки точек $\overline{\alpha_1}, ..., \overline{\alpha_9}$, и для них при $n \to \infty$ справедливы асимптотические представления

$$\lambda_n \approx \frac{2\pi in}{\alpha_{s+1} - \alpha_s}\left\{1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_k(\ln n)}{n^k}\right\}, \quad n = 1, 2, \ ...,$$

где $R_k(\ln n) = \sum_{l=0}^{k} r_l^k \ln^l n$, r_l^l, $0 \le l \le k$ – некоторые числа.

В [11] доказано, что осями λ-плоскости и биссектрисами координатных углов вся плоскость комплексного параметра λ разбивается на 8 секторов. Если из λ-плоскости выбросить внутренности малых кругов $K_\delta(\lambda_\nu)$ радиуса δ с центрами в нулях $\Delta(\lambda)$, то в оставшейся части в каждом из секторов плоскости выполняется соотношение

$$G(x,\xi,\lambda) = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \ |\lambda| \to \infty. \quad (14)$$

Как и в приведенной схеме в работе [7], вне малых окрестностей собственных значений имеет место и такая оценка

$$\frac{\Delta_1(x,\lambda,\Phi_0,\Phi_1,f)}{\Delta(\lambda)} = O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right), \ |\lambda| \to \infty. \quad (15)$$

Эти соотношения показывают, что спектральная задача (4)–(5) регулярна [6]. Следовательно, для всякой непрерывной функции $h(x)$ имеет место формула разложения

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_\nu \int_{C_\nu}\lambda^s d\lambda \int_0^1 G(x,\xi,\lambda)h(\xi)d\xi = \begin{cases} h(x), & s = 3 \\ 0, & s < 3 \end{cases} \quad (16)$$

$$-\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_\nu \int_{C_\nu}\lambda^3 \frac{\Delta_1(x,\lambda,\Phi_0,\Phi_1,f)}{\Delta(\lambda)}d\lambda = 0,$$

где C_ν – простой замкнутый контур, окружающий только один из корней $\Delta(\lambda)$, и сумма по ν распространена на все полюсы функции Грина.

Нетрудно установить, что решение задачи Коши (6)–(7) представляется в виде

$$Z(t,\lambda,x) = \Phi_0(x)\cos\lambda^2 t + \frac{1}{\lambda^2}\Phi_1(x)\sin\lambda^2 t + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t \sin\lambda^2(t-\tau)f(x,\tau)d\tau. \quad (17)$$

Теорема. *Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) Производные $\frac{d^m\Phi_0(x)}{dx^m}$ $\left(m=\overline{0,6}\right)$, $\frac{d^m\Phi_1(x)}{dx^m}$ $\left(m=\overline{0,4}\right)$ *непрерывны на интервале [0,1];*

2) $$\left.\frac{d^m\Phi_0(x)}{dx^m}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^m\Phi_0(x)}{dx^m}\right|_{x=1}=0, \quad \left(m=\overline{0,5}\right)$$

$$\left.\frac{d^m\Phi_1(x)}{dx^m}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^m\Phi_1(x)}{dx^m}\right|_{x=1}=0, \quad \left(m=\overline{0,3}\right);$$

3) $f(x,t)$ *при всех* $x\in[0,1]$ *дважды непрерывно дифференцируема по* t *в интервале* $[0,T]$ *и имеет непрерывную производную до четвертого порядка включительно по* $x\in[0,1]$ *при всех* $t\in[0,T]$.

Тогда существует единственное решение смешанной задачи (1)–(3), представленное в виде полного интегрального вычета

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\sum_{\nu}\int_{C_\nu}\lambda^3 d\lambda\int_0^1 G(x,\xi,\lambda)Z(t,\xi,\lambda)d\xi. \tag{18}$$

Доказательство. Представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t). \tag{19}$$

Обозначим $A_n=\Phi_{0n}$, $B_n=\frac{1}{\lambda_n^2}\Phi_{1n}$, $C_n=\frac{1}{\lambda_n^2}f_{1n}$,

где $\Phi_{0n}=\int_0^1 G(x,\xi,\lambda_n)\Phi_0(\xi)d\xi$, $\Phi_{1n}=\int_0^1 G(x,\xi,\lambda_n)\Phi_1(\xi)d\xi$, $f_{1n}=\int_0^t \sin\lambda_n^2(t-\tau)f(\xi,\tau)d\tau$.

Тогда из оценки $|u_n(x,t)|\le|A_n|+|B_n|+|C_n|$ получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|+|B_n|+|C_n|$ является мажорантом написанного выше ряда и $\frac{\partial^{k+m}u(x,t)}{\partial x^k\partial t^m}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^{k+m}u(x,t)}{\partial x^k\partial t^m}$, $k=\overline{0,4}$; $m=\overline{0,2}$.

Следовательно, имеет место эквивалентное соотношение

$$\frac{\partial^{k+m}u(x,t)}{\partial x^k\partial t^m}\sim\lambda_n^{k+m}\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|+|B_n|+|C_n|.$$

Дифференцировать два раза по t, четыре раза по x возможно, если ряды в правых частях последнего соотношения будут сходиться равномерно. Поэтому для решения $u(x,t)$ достаточно потребовать, чтобы функция $\Phi_0(x)$ имела непрерывные производные до 6-го порядка включительно, производные до 5-го порядка на концах интервала $(0,1)$ обращались в нуль, а функция $\Phi_1(x)$ имела производные до 5-го порядка и обращалась в нуль на концах интервала как сама, так и её производные до 4-го порядка. Подобным образом проверяются достаточные условия (3) на функции $f(x,t)$. Единственность решения $u(x,t)$ получается непосредственно из (18). Теорема доказана.

Заключение

Исследование доказало, что изучаемая смешанная задача для уравнения колебания стержня, содержащая в граничных условиях производные по времени первого и второго порядков на правом конце двух нераспадающихся краевых условий, при определённых условиях имеет классическое решение. Это решение представлено в виде полного интегрального вычета и выражено через решения построенных специальным образом спектральной задачи и задачи Коши. Оно является практически легко применимым и относительно эффективным разложением, не использующим техники классических методов интегральных преобразований, обобщенного метода Фурье, а также метода характеристики.

Литература

1. *Болотин В.В.* Вибрации в технике: справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / под ред. В.В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978.

2. *Вагабов А.И.* Об условиях корректности двумерных смешанных задач для гиперболических систем // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 3. – С. 531–533.

3. *Оруджев Э.Г.* О краевых задачах для дифференциального уравнения 4-го порядка, полиномиально зависящего от спектрального параметра // ДАН АзССР. – 1989. – Т. 45 (10). – С. 7–12.

4. *Оруджев Э.Г.* Прямые спектральные задачи для обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка, полиномиально зависящего от спектрального параметра // ДАН Азербайджана. – 1998. – № 54 (1). – С. 9–15.

5. *Оруджев Э.Г.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений четного порядка с кратными характеристиками // ДАН. – 1999. – № 368 (1). – С. 14–17.

6. *Расулов М.Л.* Разложение функции в ряд полного интегрального вычета и решение смешанных задач // ДАН СССР. – 1986. – Т. 286, № 1. – С. 42–46.

7. *Зульфугарова Р.Т.* О смешанных задачах для волнового уравнения, содержащих в граничных условиях производные по времени // Journal of Contemporary Applied Mathematics. – 2015. – V. 5 (1). – С. 29–34.

8. *Намазова Н.М.* Исследование одной смешанной задачи для уравнения 4-го порядка с кратными характеристиками // Научные труды Нахичеванского государственного университета. – 2015. – № 5 (73). – С. 32–39.

9. *Лидский В.Б., Садовничий В.А.* Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Математический сборник. – 1968. – Т. 75 (117), № 4. – С. 558–566.

10. *Вагабов А.И.* Асимптотика нулей степенно-показательного многочлена // ДАН СССР. – 1985. – Т. 285, № 5. – С. 1037–1041.

11. *Намазова Н.М.* Кратное разложение по решению краевой задачи с параметром в краевых условиях // Проблемы современной науки и образования. – 2017. – № 8 (90). – С. 12–18.

Поступила в редакцию 3 июня 2019 г.

UDC 517.906

DOI: 10.21779/2542-0321-2019-34-2-66–72

On a mixed problem for the equation of vibration of a rod containing time derivatives in the boundary conditions

E.G. Orudzhev[1], N.M. Namazova[2]

[1] Baku State University; Republic of Azerbaijan, AZ1148, Baku, Academic Zahid Khalilov st., 23; elsharorucov63@mail.ru;
[2] Nakhchivan State University; Republic of Azerbaijan, AZ7012, Nakhchivan, University campus; Namazova1790@scientifictext.ru

The paper considers the equation of the vibration of a rod, a mixed problem containing time derivatives in non-decaying boundary conditions. The mixed problem is associated with a spectral problem for a 4th order two-term equation with incommensurable powers of the parameter in the boundary conditions and Cauchy problem for a second-order equation with a spectral parameter with respect to the time variable. Explicit representation of the mixed problem in the form of a complete integral residue from the solutions of the spectral problem and Cauchy problem is found. Under certain conditions on the function of external influence and the functions which determine the initial position of the axis of the rod the existence of a classical solution of the mixed problem has been proved.

Keywords: *rod vibration equation, mixed problems, residues, eigenvalues, Green function*.

Received 3 June, 2019