

УДК 530.19

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-3-20-28

З.З. Алисултанов^{1,2}, Г.О. Абдуллаев¹, М.С. Хизриев²

Простой метод «частичной» диагонализации матрицы оператора и приложение к реальной физической задаче

¹ Институт физики Дагестанского научного центра РАН; Россия, 367003, г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 94;

² Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; zaur0102@gmail.com

Диагонализация матрицы оператора является одной из основных проблем в спектральной задаче. В общем случае диагонализировать матрицу оператора невозможно. Особенно трудной задача становится, когда элементы матрицы являются произвольными операторами. Традиционные методы позволяют существенно упрощать матрицы лишь некоторых типов.

Здесь мы представляем простую заметку об упрощении двумерной квадратной матрицы, элементами которой являются произвольные операторы. Такое упрощение играет ключевую роль при диагонализации. Сделанное нами наблюдение позволяет решить задачу на собственные значения двумерной квадратной матрицы с произвольными элементами. В качестве примера мы рассмотрели задачу об энергетическом спектре массивного двумерного релятивистского фермиона в скрещенных магнитном и электрическом полях. На этом же примере мы показали несостоятельность традиционного подхода для решения подобных задач.

Ключевые слова: *диагонализация матрицы, спектр, дираковский электрон, скрещенные поля.*

Введение

Многие задачи физики сводятся к нахождению собственных значений и собственных векторов эрмитовых матриц. Условие эрмитовости облегчает нахождение собственных значений, для такой матрицы всегда существует подобная матрица, преобразующая ее в диагональный вид.

Существует ряд стандартных методов для диагонализации матриц [1–4].

Для симметричной действительной матрицы A размерности n всегда существует ортогональная вещественная матрица S . В основном методы диагонализации направлены на выполнение определенных преобразований, переводящих матрицу A в матрицу специального вида. Условие эрмитовости позволяет использовать в качестве таких преобразований унитарные преобразования. Якоби одним из первых предложил довольно простой метод приведения таких матриц к диагональному методу. Суть метода Якоби заключается в том, что на каждом шаге мы отыскиваем наибольший по модулю недиагональный элемент a_{pq} и выполняем вращение в плоскости (p, q) [1]. Угол вращения выбирается таким образом, чтобы данный элемент обратился в нуль.

Метод Гивенса [2] основан на преобразованиях подобия, аналогично применяемым в методе Якоби. Данное преобразование состоит из $(n-2)$ шагов, причем на m -том шаге получаются нули в m -той строке и m -том столбце. На каждом шаге нули, полученные на предыдущих шагах, участвуют в преобразовании, но они заменяются на ли-

нейную комбинацию нулей, поэтому здесь элементы, обнуленные на предыдущих шагах, сохраняются. При этом на s -том шаге имеют дело только с матрицей порядка $(n-s-1)$ в нижнем правом углу исходной матрицы. Большим преимуществом данного метода является сравнительно малое число операций, однако недостаток состоит в том, что в конечном счете можно получить только трехдиагональную матрицу. Собственные же значения трехдиагональной матрицы находят с помощью других методов. Кроме того, точность собственных векторов ниже той, что дает метод Якоби.

Следует отметить, что существуют многочисленные методы нахождения собственных значений матрицы через решение характеристического уравнения:

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0. \quad (1)$$

Основное затруднение вызвано тем, что λ входит во все столбцы и строки. Однако существуют способы нахождения корней уравнения без раскрытия определителя (1), направленные на нахождение коэффициентов характеристического уравнения. Среди таких методов отметим методы Крылова, Данилевского, Левверье–Фадеева, Самуэльсона и др. [1–4].

Задача диагонализации становится особенно трудной, когда элементы матрицы являются произвольными операторами. В настоящей работе мы рассматриваем следующую спектральную задачу:

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Такого типа уравнения часто встречаются в квантовой электродинамике, спинтронике, электронике современных т. н. киральных материалов. Чтобы решить эту задачу, необходимо диагонализировать матрицу. Мы здесь предлагаем простой метод решения этой задачи. Этот метод оказался весьма эффективным для решения широкого класса различных задач типа (2).

Общая структура метода

Самой простой задачей типа (2) является, по-видимому, задача с коммутирующими операторами $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$. Здесь процесс решения задачи качественно не отличается от случая, когда элементами матрицы являются C -числа. Следующая по простоте задача типа (2) задается, по-видимому, следующими коммутационными соотношениями между элементами матрицы:

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \alpha, \quad \hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} = \beta, \quad \hat{A}\hat{D} - \hat{D}\hat{A} = \gamma, \quad (3)$$

$$\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B} = \chi, \quad \hat{B}\hat{D} - \hat{D}\hat{B} = \eta, \quad \hat{C}\hat{D} - \hat{D}\hat{C} = \mu. \quad (4)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \chi, \eta, \mu$ есть C -числа. Раскроем матрицу (2):

$$Bv = (\lambda - A)u, \quad (5)$$

$$Cu = (\lambda - D)v. \quad (6)$$

Действуя на первое уравнение слева оператором $\hat{C}$, а на второе – оператором $\hat{B}$ и используя коммутационные соотношения (4), получаем

$$\hat{C}\hat{B}v = (\lambda - \hat{A})\hat{C}u + \beta u, \quad (7)$$

$$\hat{B}\hat{C}u = (\lambda - \hat{D})\hat{B}v - \eta v. \quad (8)$$

Или, используя соотношения (5), (6), получаем

$$\hat{C}\hat{B}v = (\lambda - \hat{A})(\lambda - \hat{D})v + \beta u, \quad (9)$$

$$\hat{B}\hat{C}u = (\lambda - \hat{D})(\lambda - \hat{A})u - \eta v. \quad (10)$$

Раскрывая скобки и используя соотношения (3), (4), окончательно получаем

$$(BC - \chi - AD + \lambda(A + D))v - \beta u = \lambda^2 v, \quad (11)$$

$$(BC - AD + \gamma + \lambda(A + D))u + \eta v = \lambda^2 u \quad (12)$$

или

$$\begin{pmatrix} BC - AD + \gamma + \lambda(A + D) & \eta \\ -\beta & BC - \chi - AD + \lambda(A + D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Уже на этом этапе наша исходная задача существенно упростилась. Перепишем (13) в следующем виде:

$$(K + \hat{J}) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (14)$$

где $\hat{J} = BC - AD + \lambda(A + D)$, $K = \begin{pmatrix} \gamma & \eta \\ -\beta & -\chi \end{pmatrix}$.

Далее представим волновую функцию в виде

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = |\varphi\rangle \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \quad (15)$$

где $|\varphi\rangle$ – собственная функция оператора $\hat{J}$, а $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}$ – собственная функция K .

Тогда

$$(BC - AD + \lambda(A + D))|\varphi\rangle = \omega|\varphi\rangle, \quad (16)$$

$$\begin{pmatrix} \chi & \beta \\ -\alpha & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}. \quad (17)$$

т. е. исходная задача разделилась на две более простые. Далее получаем

$$\kappa_{\pm} = \frac{\chi - \gamma \pm \sqrt{(\gamma + \chi)^2 - 4\alpha\beta}}{2}. \quad (18)$$

Тогда решение задачи следующее:

$$\lambda_{\pm}^2 = \omega + \kappa_{\pm}. \quad (19)$$

Задача (16) в общем случае будет недиагональной по операторам. Диагонализация этой задачи может быть проделана с помощью известных канонических преобразований Боголюбова. Такая процедура хорошо известна. Однако в общем виде её нельзя привести. Необходимо знать явный вид операторов A, B, C, D . В конце этой работы мы рассмотрим конкретную физическую задачу с явно заданными операторами и продемонстрируем процедуру диагонализации.

В принципе, указанный здесь метод может быть перенесен на общую спектральную задачу с произвольной размерностью матрицы оператора. Однако это связано с громоздкими, хотя и нетрудными вычислениями.

Решенная выше задача без дополнительных вычислений может быть частично обобщена. В процессе решения мы использовали всего четыре из шести коммутационных соотношений (3), (4). Мы не использовали соотношения $\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \alpha$ и $\hat{C}\hat{D} - \hat{D}\hat{C} = \mu$. Следовательно, мы можем их записать в общем виде, предполагая, что α и μ не С-числа, а произвольные операторы. От этого решение задачи не изменится.

Пусть теперь помимо α и μ С-числами не являются и χ, γ . Тогда вместо (17) получим задачу

$$\begin{pmatrix} \hat{\chi} & \beta \\ -\alpha & -\hat{\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (20)$$

которая сводится к задаче

$$(\hat{\gamma}\hat{\chi} - \kappa(\hat{\gamma} - \hat{\chi}))u = (\kappa^2 + \alpha\beta)u. \quad (21)$$

Следующее усложнение задачи состоит в замене всех коммутаторов операторами

$$\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} = \hat{\alpha}, \quad \hat{A}\hat{C} - \hat{C}\hat{A} = \hat{\beta}, \quad \hat{A}\hat{D} - \hat{D}\hat{A} = \hat{\gamma}, \quad (22)$$

$$\hat{B}\hat{C} - \hat{C}\hat{B} = \hat{\chi}, \quad \hat{B}\hat{D} - \hat{D}\hat{B} = \hat{\eta}, \quad \hat{C}\hat{D} - \hat{D}\hat{C} = \hat{\mu}. \quad (23)$$

Причем коммутаторы операторов $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}, \hat{\chi}, \hat{\eta}, \hat{\mu}$ являются С-числами. Тогда описанная выше процедура приведет к уравнению

$$\left(\begin{pmatrix} \hat{\gamma} & \hat{\eta} \\ -\hat{\beta} & -\hat{\chi} \end{pmatrix} + JI \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \lambda^2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Представляя волновую функцию в виде (), приходим к новой задаче

$$\begin{pmatrix} \hat{\gamma} & \hat{\eta} \\ -\hat{\beta} & -\hat{\chi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (25)$$

к которой можно повторно применить описанный метод, что дает

$$\left(\begin{pmatrix} \alpha_{\gamma\chi} & \alpha_{\eta\chi} \\ -\alpha_{\gamma\beta} & -\alpha_{\eta\beta} \end{pmatrix} + (-\hat{\eta}\hat{\beta} + \hat{\gamma}\hat{\chi} + \kappa(\hat{\gamma} - \hat{\chi}))I \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \kappa^2 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (26)$$

которое дает спектр

$$\kappa^2 = \bar{\omega} + \frac{\alpha_{\gamma\chi} - \alpha_{\eta\beta} \pm \sqrt{(\alpha_{\gamma\chi} + \alpha_{\eta\beta})^2 - 4\alpha_{\eta\chi}\alpha_{\gamma\beta}}}{2}, \quad (27)$$

где $\alpha_{IJ} = [IJ] = IJ - JI$. Тогда

$$\lambda_{\pm}^2 = \omega + \sqrt{\bar{\omega} + \frac{\alpha_{\gamma\chi} - \alpha_{\eta\beta} \pm \sqrt{(\alpha_{\gamma\chi} + \alpha_{\eta\beta})^2 - 4\alpha_{\eta\chi}\alpha_{\gamma\beta}}}{2}}. \quad (28)$$

Наконец, сделаем следующее общее утверждение. Составим последовательность

$$\begin{pmatrix} \hat{A} & \hat{B} \\ \hat{C} & \hat{D} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} [\hat{A}\hat{D}] & [\hat{B}\hat{D}] \\ [\hat{A}\hat{C}] & [\hat{B}\hat{C}] \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} [[\hat{A}\hat{D}][\hat{B}\hat{C}]] & [[\hat{B}\hat{D}][\hat{B}\hat{C}]] \\ [[\hat{A}\hat{D}][\hat{A}\hat{C}]] & [[\hat{B}\hat{D}][\hat{A}\hat{C}]] \end{pmatrix} \Rightarrow \dots \quad (29)$$

Тогда существует конечное N число таких переходов, что матрица на N -том переходе будет состоять только из C -чисел. Таким образом, в общем случае произвольных элементов матрицы достаточно N раз выполнить процедуру, описанную выше, чтобы решить задачу.

Приложение к физической задаче: дираковский электрон в скрещенных магнитном и электрическом полях

Применим рассмотренный метод к реальной физической задаче. Рассмотрим релятивистскую задачу об энергетическом спектре двумерного заряженного фермиона в скрещенных магнитном и электрическом полях. В режиме скрещенных полей дираковские материалы проявляют интересные свойства [5–10]. В двумерном случае в качестве матриц Дирака достаточно взять матрицы Паули: $\alpha_x = \sigma_x$, $\alpha_y = \sigma_y$, $\beta = \sigma_z$. Гамильтониан электронов в скрещенных магнитном $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ и электрическом $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ полях запишется в виде:

$$\hat{\mathcal{H}} = v_F \begin{pmatrix} m + \frac{e}{v_F} E y & \hat{p}_x - i\hat{p}_y - \frac{e}{c} H y \\ \hat{p}_x + i\hat{p}_y - \frac{e}{c} H y & -m + \frac{e}{v_F} E y \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Заметим, что приводимые ниже расчеты справедливы и для трехмерного вейлевского электрона, т. к. для последнего гамильтониан имеет точно такой же вид (30) с той разницей, что в этом случае необходимо заменить m на $v_F p_z$. Представив волновую функцию в виде:

$$\psi = e^{\frac{i}{\hbar}(p_x x + p_z z)} \varphi(y), \quad (31)$$

получим

$$\hat{\mathcal{H}} = v_F \begin{pmatrix} p_z + \frac{e}{v_F} E y & p_x - i\hat{p}_y - \hbar l_H^{-2} y \\ p_x + i\hat{p}_y - \hbar l_H^{-2} y & -p_z + \frac{e}{v_F} E y \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Вводя новую переменную $p_x - \hbar l_H^{-2} y = -\hbar \bar{y} / l_H$ и переходя к операторам вторичного квантования $a = (\bar{y} + \partial / \partial \bar{y}) / \sqrt{2}$ и $a^+ = (\bar{y} - \partial / \partial \bar{y}) / \sqrt{2}$, получаем

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} v_F p_z + v_0 p_x + A(a + a^+) & Ba \\ Ba^+ & -v_F p_z + v_0 p_x + A(a + a^+) \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где $A = eEl_B/\sqrt{2}$, $B = \sqrt{2}\nu_F\hbar/l_B$, $\nu_0 = cE/H$. Применяя процедуру, описанную в предыдущей главе, получаем следующее волновое уравнение

$$(J\mathbf{I} + K)|\psi\rangle = (\bar{\varepsilon}^2 - m^2)|\psi\rangle, \quad (34)$$

где $J = -A^2(aa + a^+a^+) - 2\bar{\varepsilon}A(a + a^+) + (B^2 - 2A^2)a^+a$, $K = \begin{pmatrix} B^2 - A^2 & -AB \\ AB & -A^2 \end{pmatrix}$,

$\bar{\varepsilon} = \varepsilon - \nu_0 p_x$, $A = eEl_B/\sqrt{2}$, $B = \sqrt{2}\nu_F\hbar/l_B$, $\nu_0 = cE/H$. $a^+(a)$ есть оператор рождения (уничтожения). С помощью канонических преобразований

$$a = u(\gamma - \alpha) + v(\gamma^+ - \alpha), \quad a^+ = u(\gamma^+ - \alpha) + v(\gamma - \alpha) \quad (35)$$

гамильтониан $\hat{J}$ может быть приведен к диагональному виду

$$\hat{J} = \frac{1}{2}\left(\omega - (B^2 - 2A^2)\right) - \frac{4\bar{\varepsilon}^2 A^2 B^2}{\omega^2} + \omega\gamma^+\gamma, \quad (36)$$

где $\alpha = 2\bar{\varepsilon}A(u + v^*)/\omega$, $\omega = \sqrt{B^4 - 4B^2A^2}$. После этого решение уравнения (36) дает

$$\varepsilon_{n,p_x} = \text{sgn}(n)\sqrt{2\hbar^2\nu_F^2 l_H^{-2}n(1-\beta^2)^{3/2} + m^2(1-\beta^2)} + \nu_0 p_x, \quad (37)$$

где $\beta = cE/\nu_F H$.

Этот результат можно получить, используя метод лоренцевского сдвига. Используя калибровку Ландау $A = (-Hy, 0, 0)$, получим

$$\hat{H} = \nu_F \left(\sigma_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} By \right) + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z m - \frac{eEy}{\nu_F} \mathbf{I} \right). \quad (38)$$

Волновое уравнение имеет вид

$$\nu_F \left(\sigma_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} By \right) + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z m - \left(\frac{eEy}{\nu_F} + p_0 \right) \mathbf{I} \right) \psi = 0, \quad (39)$$

где $p_0 = \varepsilon/\nu_F$. Для решения поставленной задачи воспользуемся методом лоренцевского сдвига. Для случая графена этот метод был использован в работе [5]. Чтобы решить волновое уравнение (39), перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью cE/H , совпадающей со скоростью дрейфа электронов в направлении, перпендикулярном электрическому и магнитному полям. Этот переход необходимо осуществить с помощью следующих преобразований Лоренца [5, 11]:

$$p_\nu = g_{\nu\mu} \tilde{p}_\mu, \quad (40)$$

$$g_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta & 0 & 0 \\ \sinh \theta & \cosh \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (41)$$

где $\nu = t, x, y, z$, $\tanh \theta = \beta$. Волновое уравнение в новых переменных имеет вид:

$$\begin{aligned} & \nu_F \left[\sigma_x \left(-\hat{p}_t \sinh \theta + \hat{p}_x \cosh \theta - \frac{e}{c} H \tilde{y} \right) + \sigma_y \hat{p}_y + \right. \\ & \left. + \sigma_z m + I \left(\frac{e E \tilde{y}}{\nu_F} - \hat{p}_t \cosh \theta + \hat{p}_x \sinh \theta \right) \right] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Т. к. $\nu_F/c \ll 1$, то изменением полей мы пренебрегаем. Используя свойство матрицы Паули $\sigma_x \sigma_x = I$, а также следствие из этого свойства $I \cosh \theta - \sigma_x \sinh \theta = \exp(-\sigma_x \theta)$, получим

$$\nu_F \left(-e^{-\sigma_x \theta} \hat{p}_t + \sigma_x e^{-\sigma_x \theta} \left(\hat{p}_x - \frac{eB}{c \cosh \theta} \tilde{y} \right) + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z m \right) \Psi = 0. \quad (43)$$

Далее воспользуемся свойствами

$$e^{-\sigma_x \frac{\theta}{2}} \sigma_y e^{-\sigma_x \frac{\theta}{2}} = \sigma_y, \quad e^{-\sigma_x \frac{\theta}{2}} \sigma_z e^{-\sigma_x \frac{\theta}{2}} = \sigma_z, \quad (44)$$

$$\tilde{\Psi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}, \tilde{t}) = e^{-\sigma_x \frac{\theta}{2}} \Psi(x, y, z, t), \quad (45)$$

для стационарной задачи $\tilde{\Psi}(\tilde{r}, \tilde{t}) = \exp(-i \tilde{\epsilon} \tilde{t} / \hbar) \tilde{\psi}(\tilde{r})$ получаем окончательно

$$\nu_F \left(-\frac{\tilde{\epsilon}}{\nu_F} + \sigma_x \left(\hat{p}_x - \frac{e}{c} \tilde{H} \tilde{y} \right) + \sigma_y \hat{p}_y + \sigma_z m \right) \tilde{\psi} = 0, \quad (46)$$

где $\tilde{H} = H \sqrt{1 - \beta^2}$. Положив $\tilde{\psi} = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\tilde{p}_x \tilde{x} + \tilde{p}_z \tilde{z})\right] \psi(\tilde{y})$ и применяя обратные преобразования Лоренца, переходим в неподвижную систему отсчета и получаем

$$\varepsilon_{n, p_x, p_z} = \text{sgn}(n) \nu_F \sqrt{2 \hbar^2 l_H^{-2} n (1 - \beta^2)^{3/2} + m^2 (1 - \beta^2)} + \nu_0 p_x. \quad (47)$$

Несостоятельность стандартного подхода

Продemonстрируем, что стандартный подход не позволяет диагонализировать матрицу (33). Прежде всего рассмотрим более простой случай безмассового фермиона (вейлевский фермион). В этом случае гамильтониан запишется в виде:

$$\hat{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} A(a + a^+) & Ba \\ Ba^+ & A(a + a^+) \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Выберем в качестве матрицы подобия z-матрицу Паули. Тогда получим

$$\hat{\tilde{\mathcal{H}}} = \sigma_z \hat{\mathcal{H}} \sigma_z = \begin{pmatrix} A(a + a^+) & -Ba \\ -Ba^+ & A(a + a^+) \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Эта матрица имеет те же собственные значения, что и $\hat{\mathcal{H}}$, что доказывается в общей теории матриц. Понятно, что базис собственных векторов не совпадает с $|\psi\rangle$.

Составим следующую комбинацию $\mu(\hat{\mathcal{H}} + \hat{\bar{\mathcal{H}}}) + \nu\hat{\mathcal{H}}\hat{\bar{\mathcal{H}}}$ с произвольными коэффициентами μ, ν . Тогда

$$\left[\mu(\hat{\mathcal{H}} + \hat{\bar{\mathcal{H}}}) + \nu\hat{\mathcal{H}}\hat{\bar{\mathcal{H}}} \right] \psi = \left[\mu\bar{\varepsilon} + \mu\hat{\mathcal{H}} + \nu\bar{\varepsilon}\hat{\bar{\mathcal{H}}} \right] \psi. \quad (50)$$

Теперь выберем коэффициенты следующим образом: $\mu = \bar{\varepsilon}, \nu = -1$. Тогда

$$\left[\bar{\varepsilon}(\hat{\mathcal{H}} + \hat{\bar{\mathcal{H}}}) - \hat{\mathcal{H}}\hat{\bar{\mathcal{H}}} \right] \psi = \bar{\varepsilon}^2 \psi. \quad (51)$$

С другой стороны,

$$\bar{\varepsilon}(\hat{\mathcal{H}} + \hat{\bar{\mathcal{H}}}) - \hat{\mathcal{H}}\hat{\bar{\mathcal{H}}} = \mathbf{L} + \mathbf{K}. \quad (52)$$

Дальнейшие действия по решению задачи понятны. Однако для более сложных матриц этот традиционный метод неприменим. Например, усложним матрицу (48), восстановив массовый член. Тогда получится гамильтониан (33). Даже при таком элементарном усложнении диагонализировать эту матрицу традиционным методом невозможно.

Заключение

В статье мы продемонстрировали простой метод упрощения матрицы оператора для дальнейшей её диагонализации. Наш метод является более общим, чем стандартные подходы к указанной проблеме.

Работа поддержана грантами: Грант Президента РФ МК-2130.2017.2, РФФИ № 15-02-03311а, Грант Главы Республики Дагестан.

Литература

1. Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. – М.: Наука, 1970.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
3. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – 2-е изд. – М.–Л., 1963. – 656 с.
4. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. Т. 2. – М.: Физматгиз, 1959. – 620 с.
5. Lukose V., Shankar R., Baskaran G. Novel electric field effects on landau levels in graphene // Phys. Rev. Lett. – 2007. – V. 98. – P. 116802.
6. Peres N.M.R., Castro E.V. Algebraic solution of a grapheme layer in transverse electric and perpendicular magnetic fields // J. Phys.: Condens. Matter. – 2007. – V. 19. – P. 406231 (10).
7. Алисултанов З.З. О эффекте Нернста–Эттингсгаузена в графене // Письма в ЖЭТФ. – 2014. – Т. 99, № 12. – С. 813–816.
8. Алисултанов З.З. Осцилляции намагниченности в графене в скрещенных магнитном и электрическом полях // Письма в ЖЭТФ. – 2014. – Т. 99, № 4. – С. 258–262.
9. Alisultanov Z.Z., Reis M.S. Quantum capacitance oscillations in graphene under crossed magnetic and electric fields // Euro. Phys. Lett. – 2016. – V. 113. – P. 28004.

10. *Alisultanov Z.Z., Reis M.S.* Quantum capacitance oscillations in graphene under crossed magnetic and electric fields // *Solid State Communications*. – 2016. – V. 234–235. – P. 26–30.

11. *MacDonald A.H.* Quantized Hall conductance in a relativistic two-dimensional electron gas // *Phys. Rev.* – 1983. – V. 28. – P. 2235–2236.

Поступила в редакцию 29 июля 2017 г.

UDC 530.19

DOI: 10.21779/2542-0321-2017-32-3-20-28

A simple method of "partial" diagonalization of an operator matrix and its application to a real physical problem

Z.Z. Alisultanov^{1,2} G.O. Abdullaev¹, M.S. Khizriev²

¹ *Institute of Physics DSC RAS; Russia, 367003, Makhachkala, M. Yaragsky st., 94;*

² *Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; zaur0102@gmail.com*

Diagonalization of the operator matrix is one of the main problems in the spectral problem. In the general case, it is impossible to diagonalize the matrix of the operator. The problem becomes especially difficult when the elements of the matrix are arbitrary operators. Traditional methods make it possible to significantly simplify the matrix of special types only. Here we present a simple note on the simplification of a two-dimensional square matrix whose elements are arbitrary operators. This simplification plays a key role in diagonalization. The observation made allows to solve the eigenvalue problem for a two-dimensional square matrix with arbitrary elements. As an example, we considered the problem of the energy spectrum of a massive two-dimensional relativistic fermion in crossed magnetic and electric fields. The inconsistency of the traditional approach for solving similar problems was shown on the same example.

Keywords: *matrix diagonalization, spectrum, Dirac electron, crossed fields.*

Received 29 July, 2017