МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2025-40-4-67–74

Н. Н. Агаркова

Об одной краевой задаче для псевдодифференциального уравнения

Белгородский государственный национальный исследовательский университет; 308015, Белгородская область, г. Белгород, ул. Победы, 85; agarkova_n@bsuedu.ru

Аннотация: В статье рассматривается однородное эллиптическое псевдодифференциальное уравнение на плоскости с разрезами вдоль осей. В этом случае возникают четыре квадранта, в каждом из которых требуется определить решение. Нетривиальные решения уравнения в пространстве Соболева – Слободецкого находятся с помощью волновой факторизации эллиптического символа псевдодифференциального оператора. Выписывается общее решение рассматриваемого уравнения, и для выделения единственного решения используются граничные условия на сторонах разрезов. Единственность решения полученной краевой задачи сводится к единственности решения полученной системы линейных интегральных уравнений.

Ключевые слова: псевдодифференциальное уравнение, краевая задача, плоскость с разрезами.

Введение

Теория краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных уравнений была представлена в книге [1], однако в ней рассматривался случай многообразий с гладкой границей. Для случая негладкой границы новый подход был предложен в [2], где использовались специальная факторизация эллиптического символа и элементы многомерного комплексного анализа [3]. Дальнейшее развитие этого направления описано в работах [4–8], где рассматривались краевые задачи с различными граничными условиями.

Классические краевые задачи сопряжения теории аналитических функций рассматривались в известных монографиях [9;10] – один из вариантов обобщения этой задачи для модельного эллиптического псевдодифференциального уравнения в плоской области с углами.

Один из вариантов таких обобщений рассмотрен в работе [4]. В ней исследуется разрешимость эллиптических псевдодифференциальных уравнений

$$(Au)(x) = 0, \qquad x \in D, \tag{1}$$

где $D \subset \mathbb{R}^2$ является плоской областью с границей; оператор A – псевдодифференциальным оператором с символом $A(\xi)$, который определяется следующим образом:

$$(Au)(x) = \int\limits_{D} \int\limits_{\mathbb{R}^2} A(\xi)u(y)e^{i(y-x)\cdot\xi}dyd\xi\,, \qquad x \in D.$$

С учетом локального принципа исследуется уравнение в специальной канонической области.

Необходимо описать условия разрешимости и граничные условия, чтобы гарантировать однозначную разрешимость краевой задачи в некотором пространстве Соболева – Слободецкого.

1. Волновая факторизация символа

Для описания разрешимости уравнения (1) используется следующее определение [2] для выпуклого конуса C, не содержащего целую прямую. Обозначим $\overset{*}{C}$ – сопряженный к C конус, и $T\,(\overset{*}{C})$ – радиальную трубчатую область над $\overset{*}{C}$ [3].

Волновая факторизация символа $A(\xi)$ относительно C – это его представление в виде

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi)A_{=}(\xi),$$

где сомножители $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ определены для всех значений $\xi \in \mathbb{R}^2$, исключая точки $\overset{*}{C} \cup -\overset{*}{C}$;

2) $A_{\neq}(\xi), A_{=}(\xi)$ допускают аналитическое продолжение в радиальную трубчатую область $T(\overset{*}{C})\,, T(-\overset{*}{C})$ соответственно с оценками

$$c_1 \le |A_{\neq}(\xi + i\tau)|\,(1 + |\xi| + |\tau|)^{-æ} \le c_2,$$

$$c_3 \le |A_{=}(\xi - i\tau)|(1 + |\xi| + |\tau|)^{(æ-\alpha)} \le c_4, \qquad \forall \tau \in \overset{*}{C},$$

где $c_1, c_2, c_3, c_4 \ge 0$. Число $æ \in \mathbb{R}$ называется индексом волновой факторизации символа $A(\xi)$.

Функциональные пространства

Рассматривается символ $A(\xi)$, удовлетворяющий условию

$$c_1 < |A(\xi)(1 + |\xi|)^{-\alpha}| < c_2, \qquad \xi \in \mathbb{R}^2, \qquad c_1, c_2 > 0,$$

число $\alpha \in \mathbb{R}$ называется порядком оператора A.

Данный оператор является линейным ограничением оператора [1], действующим в пространстве Соболева – Слободецкого $H^s(\mathbb{R}^2)$ с нормой

$$\big|\big|u\big|\big|_s^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^2} |\tilde{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|)^{2s} d\xi,$$

где $\tilde{u}$ обозначает образ Фурье функции u

$$\tilde{u}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{iy\cdot\xi} u(y) dy.$$

Пространство $H^s(D)$ состоит из функций пространства $H^s(\mathbb{R}^2)$ с носителем в $\overline{D}$. Норма в пространстве $H^s(D)$ индуцируется нормой пространства $H^s(\mathbb{R}^2)$.

Рассматривается область D, которая имеет особенности на границе типа конической точки. Если область имеет только одну коническую точку, то такой случай подробно рассматривается в [2]. Наличие конической точки означает, что окрестность этой точки диффеоморфна выпуклому конусу. Это хорошо известно, как операция выпрямления границы.

Изучение модельного уравнения

Для рассматриваемого случая каноническая область состоит из четырех квадрантов. Используются следующие обозначения:

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), \quad x_1 > 0, \quad x_2 > 0\},$$
$$K_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), \quad x_1 < 0, \quad x_2 > 0\},$$
$$K_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), \quad x_1 < 0, \quad x_2 < 0\},$$
$$K_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 : x = (x_1, x_2), \quad x_1 > 0, \quad x_2 < 0\}.$$

Задача сводится к решению четырех уравнений

$$(Au)(x) = 0, \quad x \in K_j, \tag{2}$$

где сумма слагаемых

$$u = \sum_{j=1}^{4} u_j$$

является решением уравнения (1). Слагаемые таковы, что $u_j \in H^s(K_j)$, $j = \overline{1,4}$. Каждый образ Фурье $\tilde{u}_j \in \widetilde{H}^s(K_j)$ является граничным значением аналитической функции в радиальной трубчатой области $T(K_j)$ [3].

Обозначается волновая факторизация символа $A(\xi)$ относительно K_1, K_2 следующим образом:

$$A(\xi) = A_{n,\neq}(\xi) \cdot A_{n,=}(\xi), \qquad n = 1, 2.$$

Теорема 1. Пусть символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно K_1, K_2 с индексами $æ_1, æ_2$ соответственно такими, что $s + 1/2 < æ_1 < s + 3/2$, $s + 1/2 < æ_2 < s + 3/2$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\tilde{u}(\xi) = A_{1,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_0(\xi_1) + \tilde{b}_0(\xi_2)\right) + A_{1,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_0(\xi_1) + \tilde{d}_0(\xi_2)\right) +$$
$$+ A_{2,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_1(\xi_1) + \tilde{b}_1(\xi_2)\right) + A_{2,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_1(\xi_1) + \tilde{d}_1(\xi_2)\right), \tag{3}$$

где $\tilde{a}_0, \tilde{b}_0, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1 \in \widetilde{H}^{s_0}(\mathbb{R}_+)$, $\tilde{c}_0, \tilde{d}_0, \tilde{a}_1, \tilde{d}_1 \in \widetilde{H}^{s_0}(\mathbb{R}_-)$ являются произвольными функциями, $s_0 = s - æ_1 + 1/2$.

Доказательство. Рассматривается уравнение (2) в K_1, тогда

$$(Au_1)(x) = 0, \qquad x \in K_1,$$

далее вводится вспомогательная функция $v_1(x)$ такая, что

$$v_1(x) = \begin{cases} 0, & x \in K_1 \\ -(Au_1)(x), & x \notin \overline{K_1}. \end{cases}$$

Затем уравнение переписывается следующим образом

$$(Au_1)(x) + v_1(x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^2$$

и применяется преобразование Фурье

$$A(\xi)\tilde{u}_1(\xi) + \tilde{v}_1(\xi) = 0.$$

После волновой факторизации относительно K_1 получается

$$A_{1,\neq}(\xi)\tilde{u}_1(\xi) = -A_{1,=}^{-1}(\xi)\tilde{v}_1(\xi).$$

Применив обратное преобразование Фурье, получаем

$$F_{\xi\to x}^{-1}\left(A_{1,\neq}(\xi)\tilde{u}_1(\xi)\right) = -F_{\xi\to x}^{-1}\left(A_{1,=}^{-1}(\xi)\tilde{v}_1(\xi)\right).$$

Это означает, что левая и правая части равенства сосредоточены на ∂K_1 и, согласно теории обобщенных функций, это линейная комбинация – функции и ее производных следующего вида:

$$\sum_{k=0}^{l}\left(a_k(x_1)\delta^{(k)}(x_2) + b_k(x_2)\delta^{(k)}(x_1)\right)$$

с соответственным преобразованием Фурье

$$\sum_{k=0}^{l}\left(\tilde{a}_k(\xi_1)\xi_2^k + \tilde{b}_k(\xi_2)\xi_1^k\right).$$

Согласно сделанным предположениям о æ$_1$, допустимо только одно слагаемое, при $k = 0$, и

$$\tilde{u}_1(\xi) = A_{1,\neq}^{-1}(\xi)(\tilde{a}_0(\xi_1) + \tilde{b}_0(\xi_2).$$

Аналогичным образом могут быть рассмотрены и другие случаи (все подробности можно найти в [2]) и получена формула (3).

2. Краевая задача

С учетом формулы (3) задаются следующие граничные условия:

$$\begin{cases} u_{|_{x_1=0_-}} - u_{|_{x_1=0_+}} = f_1(x_2) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{|_{x_1=0_-}} - \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)_{|_{x_1=0_+}} = g_1(x_2) \\ u_{|_{2=0_-}} - u_{|_{x_2=0_+}} = f_2(x_1) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{|_{x_2=0_-}} - \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)_{|_{x_2=0_+}} = g_2(x_1). \end{cases} \tag{4}$$

Вводятся следующие обозначения:

$$A_{1,\neq}^{-1}(\xi) \equiv L(\xi), \qquad A_{2,\neq}^{-1}(\xi) \equiv M(\xi), \qquad A_{1,=}^{-1}(\xi) \equiv P(\xi), \qquad A_{2,=}^{-1}(\xi) \equiv Q(\xi),$$

и далее

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi)d\xi_1 = l_1(\xi_2), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi)d\xi_2 = l_2(\xi_1), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 L(\xi)d\xi_1 = l_3(\xi_2),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p\xi_2 L(\xi)d\xi_2 = l_4(\xi_1), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi)d\xi_1 = m_1(\xi_2), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi)d\xi_2 = m_2(\xi_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 M(\xi)d\xi_1 = m_3(\xi_2), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 M(\xi)d\xi_2 = m_4(\xi_1), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi)d\xi_1 = p_1(\xi_2),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi)d\xi_2 = p_2(\xi_1), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 P(\xi)d\xi_1 = p_3(\xi_2), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 P(\xi)d\xi_2 = p_4(\xi_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi)d\xi_1 = q_1(\xi_2), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi)d\xi_2 = q_2(\xi_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 Q(\xi)d\xi_1 = q_3(\xi_2), \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 Q(\xi)d\xi_2 = q_4(\xi_1).$$

С помощью данных обозначений выписывается следующая система линейных интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi)\tilde{a}_1(\xi_1)d\xi_1 + m_1(\xi_2)\tilde{b}_1(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi)\tilde{a}_0(\xi_1)d\xi_1 - l_1(\xi_2)\tilde{b}_0(\xi_2) = \tilde{f}_{11}(\xi_2) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi)\tilde{c}_0(\xi_1)d\xi_1 + p_1(\xi_2)d_0(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi)\tilde{c}_1(\xi_1)d\xi_1 - q_1(\xi_2)\tilde{d}_1(\xi_2) = \tilde{f}_{12}(\xi_2) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 M_{2,\neq}^{-1}(\xi)\tilde{a}_1(\xi_1)d\xi_1 + m_3(\xi_2)\tilde{b}_1(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 L(\xi)\tilde{a}_0(\xi_1)d\xi_1 - l_3(\xi_2)\tilde{b}_0(\xi_2) = \tilde{g}_{11}(\xi_2) \\ \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 P(\xi)\tilde{c}_0(\xi_1)d\xi_1 + p_3(\xi_2)\tilde{d}_0(\xi_2) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 Q(\xi)\tilde{c}_1(\xi_1)d\xi_1 - q_3(\xi_2)\tilde{d}_1(\xi_2) = \tilde{g}_{12}(\xi_2) \\ q_2(\xi_1)\tilde{c}_1(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} Q(\xi)\tilde{d}_1(\xi_2)d\xi_2 - l_2(\xi_1)\tilde{a}_0(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} L(\xi)\tilde{b}_0(\xi_2)d\xi_2 = \tilde{f}_{21}(\xi_1) \\ p_3(\xi_1)\tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} P(\xi)\tilde{d}_0(\xi_2)d\xi_2 - m_3(\xi_1)\tilde{a}_1(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} M(\xi)\tilde{b}_1(\xi_2)d\xi_2 = \tilde{f}_{22}(\xi_1) \\ q_4(\xi_1)\tilde{c}_1(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 Q(\xi)\tilde{d}_1(\xi_2)d\xi_2 - l_4(\xi_1)\tilde{a}_0(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 L(\xi)\tilde{b}_0(\xi_2)d\xi_2 = \tilde{g}_{21}(\xi_1) \\ p_4(\xi_1)\tilde{c}_0(\xi_1) + \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 P(\xi)\tilde{d}_0(\xi_2)d\xi_2 - m_4(\xi_1)\tilde{a}_1(\xi_1) - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 M(\xi)\tilde{b}_1(\xi_2)d\xi_2 = \tilde{g}_{22}(\xi_1). \end{cases} \quad (5)$$

Теорема 2. Пусть $s > 3/2$ и символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию относительно K_j с индексами $æ_j$ такими, что $s + 1/2 < æ_j < s + 3/2$, $j = 1,2$, $f_1, f_2 \in H^{s-1/2}(\mathbb{R})$, $g_1, g_2 \in H^{s-3/2}(\mathbb{R})$. Тогда однозначная разрешимость в пространстве $\sum_{j=1}^{4} \oplus H^s(K_j)$ задачи (1), (4) эквивалентна однозначной разрешимости системы линейных интегральных уравнений (5) относительно неизвестных функций $\tilde{a}_0, \tilde{b}_0, \tilde{c}_0, \tilde{d}_0 \in \widetilde{H}^{s-æ_1+1/2}(\mathbb{R})$, $\tilde{a}_1, \tilde{b}_1, \tilde{c}_1, \tilde{d}_1 \in \widetilde{H}^{s-æ_2+1/2}(\mathbb{R})$.

Доказательство.

Пусть для $j = 1, 2$

$$f_{j1}(x_{3-j}) = \begin{cases} f_j(x_{3-j}), & x_{3-j} > 0, \\ 0, & x_{3-j} < 0, \end{cases} \qquad f_{j2}(x_{3-j}) = \begin{cases} 0, & x_{3-j} > 0, \\ f_j(x_{3-j}), & x_{3-j} < 0, \end{cases}$$

и точно так же

$$g_{j1}(x_{3-j}) = \begin{cases} g_j(x_{3-j}), & x_{3-j} > 0, \\ 0, & x_{3-j} < 0, \end{cases} \qquad g_{j2}(x_{3-j}) = \begin{cases} 0, & x_{3-j} > 0, \\ g_j(x_{3-j}), & x_{3-j} < 0, \end{cases}$$

затем, используя хорошо известные свойства преобразования Фурье

$$F_{x\to\xi}\left(u_{|_{x_j=0\pm}}\right)(\xi_{3-j}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\xi_1,\xi_2)d\xi_j,$$

$$F_{x\to\xi}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)_{|_{x_j=0\pm}}\right)(\xi_{3-j}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_j\tilde{u}(\xi_1,\xi_2)d\xi_j\,, \qquad j=1,2,$$

переписываются условия (4) в следующей форме:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_2(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 = \tilde{f}_{11}(\xi_2),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_3(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_4(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 = \tilde{f}_{12}(\xi_2),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1\tilde{u}_2(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1\tilde{u}_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 = \tilde{g}_{11}(\xi_2),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1\tilde{u}_3(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1\tilde{u}_4(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 = \tilde{g}_{12}(\xi_2),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_4(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 = \tilde{f}_{21}(\xi_1),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_3(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}_2(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 = \tilde{f}_{22}(\xi_1),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2\tilde{u}_4(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2\tilde{u}_1(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 = \tilde{g}_{21}(\xi_1),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2\tilde{u}_3(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2\tilde{u}_2(\xi_1,\xi_2)d\xi_2 = \tilde{g}_{22}(\xi_1).$$

Подставляя $\tilde{u}_k, k=1,2,3,4$ в граничные условиях

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{2,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_1(\xi_1)+\tilde{b}_1(\xi_2)\right)d\xi_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{1,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_0(\xi_1)+\tilde{b}_0(\xi_2)\right)d\xi_1 = \tilde{f}_{11}(\xi_2),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{1,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_0(\xi_1)+\tilde{d}_0(\xi_2)\right)d\xi_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{2,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_1(\xi_1)+\tilde{d}_1(\xi_2)\right)d\xi_1 = \tilde{f}_{12}(\xi_2),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 A_{2,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_1(\xi_1)+\tilde{b}_1(\xi_2)\right)d\xi_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 A_{1,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_0(\xi_1)+\tilde{b}_0(\xi_2)\right)d\xi_1 = \tilde{g}_{11}(\xi_2),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 A_{1,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_0(\xi_1)+\tilde{d}_0(\xi_2)\right)d\xi_1 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} i\xi_1 A_{2,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_1(\xi_1)+\tilde{d}_1(\xi_2)\right)d\xi_1 = \tilde{g}_{12}(\xi_2),$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{2,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_1(\xi_1)+\tilde{d}_1(\xi_2)\right)d\xi_2 - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_{1,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_0(\xi_1)+\tilde{b}_0(\xi_2)\right)d\xi_2 = \tilde{f}_{21}(\xi_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A_{1,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_0(\xi_1)+\tilde{d}_0(\xi_2)\right)d\xi_2 - \int_{-\infty}^{+\infty} A_{2,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_1(\xi_1)+\tilde{b}_1(\xi_2)\right)d\xi_2 = \tilde{f}_{22}(\xi_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 A_{2,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_1(\xi_1)+\tilde{d}_1(\xi_2)\right)d\xi_2 - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 A_{1,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_0(\xi_1)+\tilde{b}_0(\xi_2)\right)d\xi_2 = \tilde{g}_{21}(\xi_1),$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 A_{1,=}^{-1}(\xi)\left(\tilde{c}_0(\xi_1)+\tilde{d}_0(\xi_2)\right)d\xi_2 - \int_{-\infty}^{+\infty} i\xi_2 A_{2,\neq}^{-1}(\xi)\left(\tilde{a}_1(\xi_1)+\tilde{b}_1(\xi_2)\right)d\xi_2 = \tilde{g}_{22}(\xi_1).$$

и используя введенные обозначения, завершаем доказательство.

Заключение

Были рассмотрены простые граничные условия. Это связано со значениями индексов $æ_j$, $j = 1, 2$. Для других значений æ можно рассматривать более общие граничные условия, которые будут рассмотрены в дальнейшем.

Литература

1. Эскин, Г. И. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений / Г. И. Эскин. – Москва: Наука, 1973. – 238 с.

2. Васильев, В. Б. Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи / В. Б. Васильев. – Москва: КомКнига, 2010. – 136 с.

3. Владимиров, В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных / В. С. Владимиров. – Москва: Наука, 1964. – 305 с.

4. Васильев, В. Б. Задача сопряжения для эллиптических псевдодифференциальных уравнений на плоскости / В. Б. Васильев, Н. В. Эберлейн // Итоги науки и техники. Современная математика и её приложения. Тематические обзоры. 2022. Т. 207. – С. 10–15.

5. Васильев, В. Б. О некоторых эллиптических краевых задачах в конических областях / В. Б. Васильев // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 8. – С. 1309–1315.

6. Агаркова, Н. Н. О задаче Дирихле в плоской области с разрезом / Н. Н. Агаркова, В. Б. Васильев, Х. Гебресласи // Прикладная математика & Физика. 2023. Т. 55, № 3. – С. 258–264.

7. Agarkova, N. N. On an elliptic problem in a half-plane with a cut along a ray / N. N. Agarkova, V. B. Vasil'ev, H. F. Gebreslasie // Differ. Equ. 2024. Vol. 60, no. 11. – Pp. 1534–1543.

8. Gebreslasie, H. F. On elliptic pseudo-differential equations with an integral condition in a special multidimensional cone / H. F. Gebreslasie, V. B. Vasilyev // Lobachevskii J. Math. 2024. Vol. 45, no. 11. – Pp. 5487–5496.

9. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – Москва: Наука, 1977. – 640 с.

10. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения // Н. И. Мусхелишвили. – Москва: Наука, 1968. – 511 с.

Поступила в редакцию 30 сентября 2025 г.
Принята 21 октября 2025 г.

UDC 517.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2025-40-4-67–74

On a Boundary Value Problem for a Pseudodifferential Equation

N. N. Agarkova

Belgorod National Research University; Russia, 308015, Belgorod region, city of Belgorod, Pobedy st., 85; agarkova_n@bsuedu.ru

Abstract. A homogeneous elliptic pseudodifferential equation on a plane with sections along the axes is considered. In this case, four quadrants arise, in each of which it is necessary to determine the solution. Nontrivial solutions of the equation in the Sobolev-Slobodetsky space are found using the wave factorization of the elliptic symbol of the pseudodifferential operator. A general solution to the equation under consideration is written out, and boundary conditions on the sides of the sections are used to identify a single solution. The uniqueness of the solution of the obtained boundary value problem is reduced to the uniqueness of the solution of the obtained system of linear integral equations.

Keywords: pseudodifferential equation, boundary value problem, plane with sections.

Received 30 September, 2025
Accepted 21 October, 2025