

УДК 519.676

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-54–60

Т.А. Аверина

Статистическое моделирование распределения решения стохастических дифференциальных уравнений

*Институт вычислительной математики и математической геофизики
СО РАН (ИВМиМГ СО РАН); Россия, 630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лав-
рентьева, 6; ata@osmf.sccc.ru*

Аннотация. В математической статистике и численном статистическом моделировании для оценки функциональных зависимостей используются, в частности, различные варианты проекционного разложения по системам полиномов, ортонормированных с заданным весом. В данной статье для численно-статистической оценки плотности вероятности решения стохастического дифференциального уравнения (СДУ) предложена проекционная оценка с использованием полиномов Лежандра. Построен алгоритм моделирования оценки плотности вероятности решения СДУ в требуемый момент времени. Проведено сравнение полученных проекционных оценок и гистограммы. Предлагаемая методика успешно апробирована на тестовых СДУ, имеющих стационарное решение с заданным одномерным распределением и экспоненциальной корреляционной функцией.

Ключевые слова: стохастические дифференциальные уравнения, проекционная оценка, полиномы Лежандра.

*Исследование выполнено в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН
№ 0251-2021-0002.*

Введение

Большой интерес для математиков представляет метод решения краевых задач математической физики с помощью СДУ вида

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dw(t), \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – n -мерный векторный случайный процесс, $t \in [0, T]$; f – векторная функция, σ – матричная функция; $w(t)$ – m -мерный стандартный случайный винеровский процесс. Закон распределения начального вектора x_0 задан. Начальный вектор x_0 и винеровский процесс $w(t)$ независимы. Метод основан на вероятностном представлении решения краевой задачи в виде функционала от решения соответствующей системы СДУ [1] и на разностной схеме для статистического моделирования траекторий этого решения [2–4].

В задаче фильтрации случайных процессов в динамических системах [5], математическая модель которых описывается СДУ, требуется оценка плотности вероятности решения, дающая максимальную информацию о процессе. Численные методы решения СДУ [2–4] позволяют найти приближенное решение СДУ, а также дают возможность оценить плотность вероятности решения. В качестве такой оценки обычно используется гистограмма.

В статье излагается альтернативный способ оценки плотности вероятности решения СДУ. Использовать статистические проекционные оценки в методе Монте-

Карло впервые предложил Н.Н. Ченцов [6], разработавший общую методику их оптимизации, которая требует доработки в конкретных задачах [7; 8]. В статье построены рандомизированные проекционные оценки на основе полиномов Лежандра [9]. Предлагаемая методика успешно апробирована на тестовых примерах. Проведено сравнение полученных проекционных оценок и гистограмм.

Проекционные разложения функционалов решения СДУ

Обозначим $p(z)$ – маргинальную плотность вероятности решения СДУ (1). Для построения функции $p \in L_2([0, H])$ используется ее разложение по полиномам Лежандра [9] $\psi_i(z)$, ортонормированным на заданном интервале $[0, H]$

$$p(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \psi_i(z) \approx p_m(z) = \sum_{i=0}^m a_i \psi_i(z), \quad a_i = (p, \psi_i) = \int_0^H p(z) \psi_i(z) dz, \quad (2)$$

где

$$\psi_i(z) = \sqrt{\frac{2i+1}{H}} \varphi_i\left(\frac{2z}{H} - 1\right),$$

а $\{\varphi_i(z)\}_{i=0}^{\infty}$ – ненормированные полиномы Лежандра, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$

$$\varphi_i(z) = \frac{1}{i! 2^i} \left[(z^2 - 1)^i \right]^{(i)},$$

для которых выполняется рекуррентная формула

$$(i+1)\varphi_{i+1}(z) - (2i+1)z\varphi_i(z) + i\varphi_{i-1}(z) = 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Для ортонормированных полиномов Лежандра на отрезке $[0, H]$ выполняется следующая рекуррентная формула:

$$\frac{2i+1}{\sqrt{2i+1}} \left(\frac{2z}{H} - 1 \right) \psi_i(z) = \frac{i+1}{\sqrt{2i+3}} \psi_{i+1}(z) + \frac{i}{\sqrt{2i-1}} \psi_{i-1}(z).$$

В процессе расчетов использовалось представление ортонормированных полиномов Лежандра на отрезке $[0, H]$ в виде [10]:

$$\psi_i(z) = \sqrt{\frac{2i+1}{H}} \sum_{k=0}^i l_{ik} \frac{z^k}{H^k}, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$l_{ik} = (-1)^{i-k} C_{i+k}^i C_i^{i-k}, \quad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}.$$

Пусть N – объем выборки (общее число моделируемых траекторий). Для безусловных моментов k -того порядка решения СДУ (1) в требуемый момент времени t

$$M_k(t) = E(x^k(t)), \quad k = 1, 2, \dots,$$

использовались их статистические оценки

$$\bar{M}_k(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left(\bar{x}_j(t) \right)^k,$$

где $\bar{x}_j$ – численное решение СДУ (1) для j -той траектории.

Алгоритм моделирования численно-статистической оценки плотности вероятности решения СДУ (1) в требуемый момент времени t на основе $m + 1$ полинома Лежандра:

1) на отрезке $[0, t]$ численным методом моделируем N траекторий решения СДУ (1) и находим численное решение в требуемый момент времени t : $\bar{x}_j, j = 1, \dots, N$;

2) вычисляем статистические оценки моментов численного решения

$$\bar{M}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\bar{x}_j)^k, \quad k = 0, 1, \dots, m;$$

3) вычисляем оценки коэффициентов a_i в разложении (2):

$$\bar{a}_i = \sqrt{\frac{2i+1}{H}} \sum_{k=0}^i (-1)^{i-k} C_{i+k}^i C_i^{i-k} \frac{\bar{M}_k}{H^k}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, m;$$

4) вычисляем проекционную оценку плотности вероятности:

$$\bar{p}_m(z_s) = \sum_{i=0}^m \bar{a}_i \psi_i(z_s) = \sum_{i=0}^m \bar{a}_i \sqrt{\frac{2i+1}{H}} \sum_{k=0}^i l_{ik} \frac{z_s^k}{H^k}$$

в узлах сетки $z_s = sH / n_g$, где $s = 0, 1, \dots, n_g$, n_g – число узлов сетки отрезка $[0, H]$.

Результаты численного исследования

В СДУ (1) используется недифференцируемый винеровский процесс $w(t)$, в то время как реальные случайные воздействия на динамическую систему часто являются дифференцируемыми функциями времени (возможно, негауссовыми). Возникает необходимость конструктивного задания таких процессов. Задача построения стационарного негауссовского случайного процесса при решении стохастических задач методом статистического моделирования представляет также самостоятельный интерес. В работах [2; 11] описан способ представления случайного процесса с заданной одномерной плотностью вероятности $p(x)$ и экспоненциальной корреляционной функцией с помощью СДУ (1). На этих СДУ было проведено численное исследование предложенного способа оценки одномерной плотности вероятности решения СДУ.

Так как СДУ (1) может пониматься как СДУ Ито или как СДУ Стратоновича, то введем общепринятое обозначение. Запись СДУ (1) принята для СДУ Ито. Для СДУ Стратоновича принята запись

$$dx(t) = f(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t)) \circ dw(t). \quad (3)$$

Всегда возможен переход от СДУ Ито к СДУ Стратоновича, и наоборот. Отметим, что в случае постоянной матрицы σ СДУ Ито и соответствующее ему СДУ Стратоновича совпадают.

При численном исследовании предложенного способа оценки плотности вероятности решения СДУ были использованы следующие скалярные СДУ с одномерным стандартным винеровским процессом из [2; 11].

Пример 1. Стационарное решение СДУ Стратоновича

$$dx(t) = -\frac{\alpha}{2} \left(x - \frac{b+c}{2} \right) dt + \sqrt{\alpha(x-b)(c-x)} \circ dw(t)$$

или эквивалентного ему СДУ Ито

$$dx(t) = -\alpha \left(x - \frac{b+c}{2} \right) dt + \sqrt{\alpha(x-b)(c-x)} dw(t)$$

является стационарным случайным процессом с равномерным распределением

$$p(z) = \frac{1}{c-b}, \quad b < z < c.$$

Пример 2. Стационарное решение СДУ Стратоновича

$$dx(t) = -\frac{\alpha}{\gamma + \delta} \left(x(\gamma + \delta - 1) - \left(\gamma - \frac{1}{2} \right) \right) dt + \sqrt{\frac{2\alpha(1-x)x}{\gamma + \delta}} \circ dw(t)$$

или эквивалентного ему СДУ Ито

$$dx(t) = -\alpha \left(x - \frac{\gamma}{\gamma + \delta} \right) dt + \sqrt{\frac{2\alpha(1-x)x}{\gamma + \delta}} dw(t)$$

является стационарным случайным процессом с β -распределением

$$p(z) = \frac{\Gamma(\gamma + \delta)}{\Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} z^{\gamma-1} (1-z)^{\delta-1}, \quad 0 < z < 1, \quad \gamma > 0, \quad \delta > 0.$$

Расчеты проводились асимптотически несмещенным численным методом решения СДУ Стратоновича (3):

$$x_{n+1} = x_n + \left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n) \right)^{-1} \left(hf(x_n) + \sqrt{h} \sigma(x_n) \zeta_n + \frac{h}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial x}(x_n) \sigma(x_n) \zeta_n^2 \right),$$

где I – единичная матрица, h – шаг интегрирования, x_n – численное решение в узле $t_n = nT/h$, ξ_n – независимые гауссовские случайные величины с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; ξ_n независимы с x_n . В общем случае метод имеет первый порядок среднеквадратической сходимости и второй порядок для систем СДУ с одним шумом, а также в случае систем СДУ с постоянной матрицей σ . Вычисление нормальных случайных величин ξ_n осуществлялось по формуле

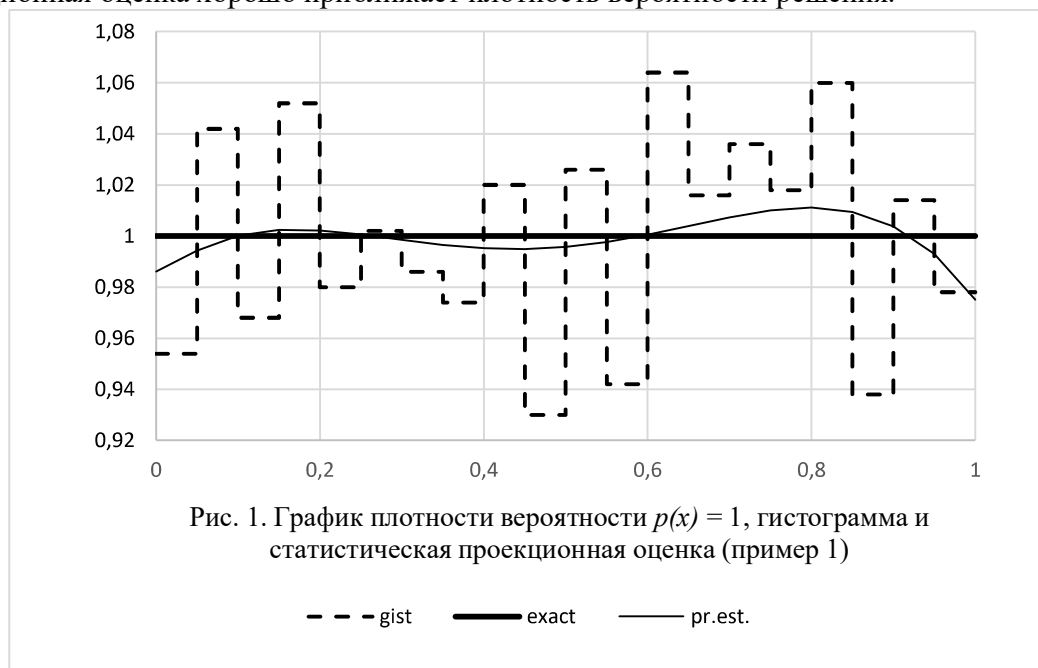
$$\zeta_n = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos(2\pi \alpha_2),$$

где α_1, α_2 – равномерные случайные числа в $(0, 1)$, моделирование которых осуществлялось с помощью датчика псевдослучайных чисел RND128 (с модулем 2^{128} и множителем 5^{100109}) [12].

Во всех случаях моделировалось 10^4 траекторий. Задавались следующие параметры: $\alpha = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $\gamma = \delta = 2$.

Если x_0 задано произвольно, то $x(t)$ будет стационарным после некоторого переходного участка. Когда плотность вероятности начального значения x_0 задается равной $p(z)$, то решение СДУ является стационарным на всем интервале $[0, T]$. Плотность вероятности бета-распределения для целых параметров γ и δ является плотностью распределения γ -той порядковой статистики для $(\gamma + \delta - 1)$ независимых значений равномерного случайного числа в $(0, 1)$ [13]. Моделирование плотности вероятности начального значения x_0 в примере 2 при $\gamma = \delta = 2$ проводилось как 2-я порядковая статистика для трех независимых значений равномерных случайных чисел.

Ниже приведены рисунки, на которых построены плотность вероятности (сплошная жирная линия), гистограмма численного решения, соответствующего СДУ (пунктирная линия) и численно-статистическая оценка плотности с использованием полиномов Лежандра до 4 степени включительно (сплошная тонкая линия). Графики демонстрируют, что даже для полиномов Лежандра до 4 степени статистическая проекционная оценка хорошо приближает плотность вероятности решения.



В дальнейшем будет исследоваться задача оптимизации численно-статистической оценки распределения решения СДУ путем уравнивания численной и статистической компонент погрешности.

Литература

1. Кушнер Г.Дж. Вероятностные методы аппроксимации в стохастических задачах управления и теории эллиптических уравнений. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
2. Аверина Т.А. Статистическое моделирование решений стохастических дифференциальных уравнений и систем со случайной структурой. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2019. – 349 с.
3. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MatLab // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 4. – С. А.1–А.1073.
4. Рыбаков К.А. К ортогональному разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2022. Т. 37, вып. 2. – С. 27–32.
5. Averina T.A., Rybakov K.A. Maximum cross section method in the filtering problem for continuous systems with Markovian switching // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2021. Vol. 36, no. 3. – Pp. 127–137.
6. Ченцов Н.Н. Статистические решающие правила и оптимальные выводы. – М.: Наука, 1972. – 520 с.
7. Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А. и др. Метод Монте-Карло в атмосферной оптике. – Новосибирск: Наука, 1976. – 283 с.
8. Korda A.S., Mikhailov G.A., and Rogasinsky S.V. Construction and optimization of numerically-statistical projection algorithms for solving integral equations // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2022. Vol. 37, no. 5. – Pp. 213–219.
9. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 2005. – 480 с.
10. Рыбаков К.А. Спектральный метод моделирования линейных непрерывных стохастических систем. – М.: Изд-во МАИ, 2021. – 216 с.
11. Averina T.A. Algorithm for statistical simulation of two types of random structure systems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 2001. Vol. 16, no. 6. – Pp. 467–482.
12. Mikhailov G.A., Marchenko M.A. Parallel realization of statistical simulation and random number generators // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2002. Vol. 17, no. 1. – P. 113–124.
13. Михайлов Г.А., Войтишек А.В. Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. – М.: Академия, 2006. – 367 с.

Поступила в редакцию 2 марта 2023 г.

UDC 519.676

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-54–60

The Statistical Simulation of Distribution of the Stochastic Differential Equations Solution

T.A. Averina

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS (ICM&MG SB RAS); Russia, 630090, Novosibirsk, Akademik Lavrentiev ave., 6; ata@osmf.sccc.ru

Abstract. In mathematical statistics and numerical statistical simulation, to evaluate functional dependencies, in particular, various options for projection expansion in systems of polynomials, which are normalized with a given weight, are used. In this paper, for a numerical-statistical estimation of the probability density of the solution of a stochastic differential equation (SDE), a projection estimate using Legendre polynomials is proposed. An algorithm for simulation of estimation of the probability density of the SDE solution at the required moment of time is constructed. The obtained projection estimations and histograms are compared. The proposed technique has been successfully tested on testing SDEs that have stationary solutions with a given one-dimensional distribution and an exponential correlation function.

Keywords: stochastic differential equations, projection estimate, Legendre polynomials.

Received 2 March 2023