УДК 517.977

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-48–53

А.Х. Аттаев

Задача граничного управления для уравнения колебания струны с двухточечными нелокальными условиями

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН; Россия, КБР, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А; attaev.anatoly@yandex.ru

Аннотация. В статье рассмотрена задача управления колебаниями струны, когда для любого момента времени положение левого и правого конца струны связано линейно с положением струны в наперед заданных, соответственно, двух произвольных внутренних точках струны. Приведена математическая формулировка задачи. Доказаны существование и единственность граничных управлений, переводящих струну из заданного начального состояния в наперед заданное конечное состояние. Необходимым и достаточным условием этого является равенство времени конечного состояния длине струны. Сами управления выписаны в явном виде. Показано, что вид граничных управлений существенно зависит от взаимного расположения заданных точек. Для достижения поставленной цели использовались метод распространяющихся волн и метод продолжения.

Ключевые слова: уравнения колебания струны, задача Коши, нелокальные условия, граничные управления, регулярное решение, начальные данные.

Введение

Как правило, почти все реальные объекты управления можно рассматривать как объекты с распределенными параметрами. Задачи управления такого рода объектами важны и интересны уже с той точки зрения, что они возникают в самых различных областях современного естествознания. Но если естественные науки изучают природу соответствующих полей (физических, биологических, химических и т. д) и дают этим полям математическое описание, то наука об управлении должна решать проблемы, связанные с управлением этими полями, и устанавливать принципы управления ими. Приведем лишь некоторые примеры: управление волновыми распределенными процессами на примере поршневых и компрессорных установок, оптимальное управление нагревом в проходных печах, управление тепло-диффузионными процессами в массивных телах, управление плазмой и т. д. Теории управления процессами, которая описывается уравнениями с частными производными, посвящено большое число работ. Достаточно много постановок задач управления системами с распределенными параметрами и различных методов их решения приведены в монографиях [1–2]. Также там имеется обширная библиография работ, посвященных этой тематике.

Активный интерес к задачам управления гиперболическими системами возобновился в конце прошлого столетия, а именно с выходом в 1999 году работы В.А. Ильина в соавторстве с В.В. Тихомировым [3]. Далее появился цикл работ В.А. Ильина, Е.И. Моисеева и их учеников, посвященных задачам граничного управления для модельных гиперболических уравнений. Исследованию нелокальных задач граничного управления для уравнения колебания струны посвящены работы [7–13]. Задаче граничного управления для нагруженных гиперболических уравнений колебания струны посвящены работы [14–15].

В данной работе ставится задача граничного управления для уравнения колебания струны с заданными линейными локальными смещениями на левом и правом концах струны. Новизна заключается в том, что метод продолжения начальных данных, заданных в начальный момент времени, осуществляется не за счет граничных условий, а за счет начальных данных, заданных в финальный момент времени. Доказаны существование и единственность граничных управлений, а сами управления выписаны в явном аналитическом виде.

Постановка задачи

Объектом исследования в данной работе является одномерное волновое уравнение

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \tag{1}$$

которое рассматривается в прямоугольной области $\Omega = \{(x,t): 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где l и – T произвольные действительные числа, связанные соотношением $T = \pi l + r$, $0 < r < l$.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ и в финальный момент времени $t = T$ для точек струны заданы произвольное смещение и произвольные скорости

$$u(x,\ 0) = \phi(x),\ \ u_t(x,\ 0) = \psi(x),\ \ 0 \le x \le l, \tag{2}$$

$$u(x,\ T) = \phi_1(x),\ \ u_t(x,\ T) = \psi_1(x),\ \ 0 \le x \le l. \tag{3}$$

На левом и правом конце струны заданы следующие условия:

$$u(0,\ t) + \alpha u(x_1,\ t) = \mu(t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

$$u(l,\ t) + \beta u(x_2,\ t) = \nu(t),\ \ 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Задача ставится следующим образом: *Найти такие управления* $\mu(t)$ *и* $\nu(t)$, *которые за минимальный промежуток времени переводили бы колебательную систему из начального состояния (2) в заданное финальное состояние (3).*

Определение. *Регулярным решением уравнения (1) будем называть любую функцию* $u(x,\ t) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, *которая удовлетворяет уравнению (1) и одному из условий: (2)–(3); (2), (4), (5); (3), (4), (5).*

Вследствие этого будем предполагать, что $\varphi(x)$, $\psi_1(x) \in C^2(J) \cap C^1(\bar{J})$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x) \in C^1(J) \cap C(\bar{J})$, $\mu(t)$, $\nu(t) \in C^2(I) \cap C^1(\bar{I})$, где $J = (0, l)$, $\bar{J} = [0, l]$, $I = (0, T)$, $\bar{I} = [0, T]$.

Алгоритм нахождения $\mu(t)$ и $\nu(t)$

В работе [3] было показано, что управление всеми точками струны длины l возможно только тогда, когда $T = l$. Причем при $T > l$ таких управлений может быть бесчисленное множество (т. е. нет единственности). При $T < l$, как показано в работе [10], если $\frac{l}{2} < T < l$, то управлять однозначно можно, но только частью струны длиной $2T - l$ и заключенной между точками $(l - T, 0)$ и $(T,\ 0)$. При этом начальные данные задаются на отрезке $[0, l]$, а минимальное время, в течение которого осуществляется такое управление, равно T.

Далее везде будем считать $T = l$. Известно, что любое регулярное решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x,t) = f(x-t) + g(x+t), \tag{6}$$

где $f(\varsigma)$ *и* $g(\varsigma)$ – произвольные дважды непрерывные дифференцируемые функции.

Разобьем область Ω на четыре подобласти $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$, где

$$\Omega_1 = \{(x,t): 0 < x-t < l, 0 < x+t < l\},$$

$$\Omega_2 = \{(x,t): -l < x-t < 0, 0 < x+t < l\},$$

$$\Omega_3 = \{(x,t): -l < x-t < 0, l < x+t \le 2l\},$$

$$\Omega_4 = \{(x,t): 0 < x-t < l, l < x+t \le 2l\}.$$

Удовлетворяя (6) условиям (2) и (3), получим значения функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[0, l]$ и их продолжения соответственно на отрезки $[-l, 0]$ и $[l, 2l]$:

$$f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2}\int_0^x \psi(s)ds + c, \; x \in \bar{J}, \tag{7}$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\varphi(0) + \frac{1}{2}\int_0^x \psi(s)ds - c, \; x \in \bar{J}, \tag{8}$$

$$f(-x) = \frac{1}{2}\varphi_1(l-x) - \frac{1}{2}\varphi_1(l) - \frac{1}{2}\int_l^{l-x} \psi_1(s)ds + c, \; x \in \bar{J}, \tag{9}$$

$$g(l+x) = \frac{1}{2}\varphi_1(x) + \frac{1}{2}\varphi_1(l) + \frac{1}{2}\int_l^x \psi_1(s)ds - c, \; x \in \bar{J}. \tag{10}$$

Из полученных соотношений для $f(x)$ и $g(x)$ сразу следует условие регулярности:

$$f(0+) = f(0-), \; f'(0+) = f'(0-), \; f''(0+) = f''(0-),$$
$$g(l+) = g(l-), \; g'(l+) = g'(l-), \; g''(l+) = g''(l-).$$

Удовлетворяя (7)–(10) последним условиям, получаем

$$\varphi'(0) - \psi(0) - \varphi_1'(l) + \psi_1(l) = 0, \tag{11}$$

$$\varphi'(l) + \psi(l) - \varphi_1'(0) - \psi_1(0) = 0, \tag{12}$$

$$\varphi''(0) - \psi'(0) - \varphi_1''(l) + \psi_1'(l) = 0, \tag{13}$$

$$\varphi''(l) + \psi'(l) - \varphi_1''(0) - \psi_1'(0) = 0, \tag{14}$$

$$\varphi(l) + \varphi(0) + \int_0^l \psi(s)ds - \varphi_1(0) - \varphi_1(l) + \int_0^l \psi_1(s)ds = 0. \tag{15}$$

Найдем теперь $u(0,t)$, $u(l,t)$, $u(x_1,t)$, $u(x_2,t)$. Не нарушая общности, будем предполагать, что $0 < x_1 \le \frac{l}{2}$, $\frac{l}{2} \le x_2 < l$. Если это не так, достаточно поменять x_i на $l - x_i$, $i = 1, 2$.

$$u(0,t)=f(-t)+g(t)=\frac{1}{2}\varphi_1(l-t)-\frac{1}{2}\varphi_1(l)-\frac{1}{2}\int_l^{l-t}\psi_1(s)ds+\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2}\varphi(0)+\frac{1}{2}\int_0^t\psi(s)ds,$$

$$u(l,t)=f(l-t)+g(l+t)=\frac{1}{2}\phi(l-t)-\frac{1}{2}\phi(0)-\frac{1}{2}\int_0^{l-t}\psi_1(s)ds+\frac{1}{2}\phi_1(t)+\frac{1}{2}\phi_1(l)+\frac{1}{2}\int_l^t\psi_1(s)ds,$$

$$u(x_1,t)=f(x_1-t)+g(x_1+t)=\begin{cases}a_1(t,x_1), & 0\le t\le x_1,\\ a_2(t,x_1), & x_1\le t\le l-x_1,\\ a_3(t,x_1), & l-x_1\le t\le l,\end{cases}$$

где

$$a_1(t,x_1)=\frac{1}{2}\left[\phi(x_1-t)+\phi(x_1+t)\right]-\frac{1}{2}\int_{x_1-t}^{x_1+t}\psi(s)ds,$$

$$a_2(t,x_1)=\frac{1}{2}\left[\phi_1(l+x_1-t)+\phi(t-x_1)-\phi_1(l)+\phi(0)\right]+\frac{1}{2}\int_l^{l+x_1-t}\psi_1(s)ds+\frac{1}{2}\int_0^{t-x_1}\psi(s)d,$$

$$a_3(t,x_1)=\frac{1}{2}\left[\phi_1(l+x_1-t)+\phi_1(t+x_1-l)\right]+\frac{1}{2}\int_{l+x_1-t}^{x_1+t-l}\psi_1(s)ds,$$

$$u(x_2,t)=f(x_2-t)+g(x_2+t)=\begin{cases}b_1(t,x_2), & 0\le t\le l-x_2,\\ b_2(t,x_2), & l-x_2\le t\le x_2,\\ b_3(t,x_1), & x_2\le t\le l,\end{cases}$$

где

$$b_1(t,x_2)=a_1(t,x_2),$$

$$b_2(t,x_2)=\frac{1}{2}\left[\phi(x_2-t)+\phi_1(t+x_2-l)+\phi_1(l)-\phi(0)\right]-\frac{1}{2}\int_0^{x_2-t}\psi(s)ds+\frac{1}{2}\int_l^{t+x_2-l}\psi_1(s)ds,$$

$$b_3(t,x_2)=a_3(t,x_2).$$

При $x_1=\frac{l}{2}$ или при $x_2=\frac{l}{2}$

$$u\left(\frac{l}{2},t\right)=\begin{cases}a_1\left(t,\frac{l}{2}\right), & 0\le t\le\frac{l}{2},\\ a_3\left(t,\frac{l}{2}\right), & \frac{l}{2}\le t\le l.\end{cases}$$

Подставляя полученные значения для $u(0,t)$, $u(l,t)$, $u(x_1,t)$, $u(x_2,t)$ в (4) и (5), получаем искомые выражения для $\mu(t)$ и $\nu(t)$.

Легко проверяется, что полученные выражения для $\mu(t)$ и $\nu(t)$ и их первых производных удовлетворяют условиям согласования (4) и (5) при $t=0$ и $t=l$, а условия (11), (13) и (15) обеспечивают принадлежность $\mu(t)$ и $\nu(t)$ классу $C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$.

Литература

1. *Бутковский А.Г., Полтавский Л.И.* Оптимальное управление двумерной колебательной системой // Автоматика и телемеханика. 1966. Вып. 4.– С. 32–41.

2. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. – М.: Наука, 1975. – 568 с.

3. *Ильин В.А., Тихомиров В.В.* Волновое уравнение с граничным управлением на двух концах и о полном успокоении колебательного процесса // Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 5. – С. 692–704.

4. *Ильин В.А.* Граничное управление смещением на одном конце струны при наличии нелокального граничного условия одного из четырех типов и его оптимизация // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, № 11. – С. 1487–1498.

5. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Оптимальное граничное управление смещенными колебаниями струны с нелокальным условием нечетности первого рода // Дифференц. уравнения. 2010. Т. 46, № 11. – С. 1623–1630.

6. *Моисеев Е.И., Холомеева А.А.* Оптимальное граничное управление смещенными колебаниями струны с нелокальным условием четности второго рода // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 1. – С. 127–134.

7. *Attaev A.Kh.* Boundary control by displacement at one end of string and the integral condition on the other // International conference “Functional analysis in interdisciplinary applications” (FAIA 2017) / American Institute of Physics, Melville. – NY, 2017. – P. 040005.

8. *Аттаев А.Х.* Задача граничного управления для уравнения колебания струны // Доклады АМАН. 2012. Т. 14, № 2. – С. 3–13.

9. *Шамаев А.С.* О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 1. – С. 109–116.

10. *Барсегян В.Р.* Задача оптимального управления колебаниями струны с неразделенными условиями на функции состояния в заданные промежуточные моменты времени // Автоматика и телемеханика. 2020. № 2. – С. 36–47.

11. *Barseghyan V.R., Solodusha S.V.* Control of String Vibrations by Displacement of One End with the Other End Fixed, Given the Deflection Form at an Intermediate Moment of Time // Axioms. 2022. Vol. 11 (4). – P. 157.

12. *Барсегян В.Р.* Задачи граничного управления и оптимального управления колебаниями струны с многочисленными промежуточными условиями на функции состояния // Труды института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. – С. 38–52.

13. *Барсегян В.Р.* Оптимальное граничное управление распределенной неоднородной колебательной системы с заданными состояниями времени // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2023. Т. 63, № 1. – С. 74–84.

14. *Аттаев А.Х.* Задача граничного управления для существенно нагруженного уравнения колебания струны // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. 2011. Т. 13, № 1. – С. 30–35.

15. *Аттаев А.Х.* Задача граничного управления для нагруженного уравнения колебания струны // Дифференц. уравнения. 2020. Т. 56, № 5. – С. 64–51.

Поступила в редакцию 2 марта 2023 г.

UDC 517.977

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-48–53

The Boundary Control Problem for the Wave Equation with Two-Point Nonlocal Conditions

A.Kh. Attaev

Institute of Applied Mathematics and Automation KBNTs RAS; Russia, KBR, 360000, Nalchik, Shortanov st., 89A; attaev.anatoly@yandex.ru

Abstract. The paper considers the problem of controlling string vibrations, when for any moment of time the position of the left and right ends are linearly related to the string with two interior arbitrary points set in advance, respectively. The study gives a mathematical formulation of the problem. We prove the existence and uniqueness of boundary controls that transfer the string from the given initial state to the final state. A necessary and sufficient condition when the time of the final state is equal to the length of the string is established. It is shown that the form of boundary controls essentially depends on the relative position of the given points. The controls themselves are written explicitly. While researching we used the wave propagation and continuation methods.

Keywords: wave equations, Cauchy problem, nonlocal conditions, boundary controls, regular solution, initial data.

Received 2 March 2023