МАТЕМАТИКА

УДК 517.926, 517.962.26, 517.982.43, 519.21, 519.72

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-32–38

А.Е. Кондратенко, В.Н. Соболев, Д.А. Чернышова

О максимизации энтропии дробной части сверток одинаково распределенных пуассоновских случайных величин в некоторых частных случаях

МГУ им. М.В. Ломоносова; Россия, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, 1; ae_cond@mech.math.msu.su, sobolev-vn@ya.ru, daria.chernyshova@math.msu.ru

Аннотация. Статья посвящена дальнейшим исследованиям поведения дробной части сверток случайных величин. Ранее авторами было показано, что дробная часть свертки наследует равномерность слагаемого. В работе ставится глобальный вопрос о предельном поведении дробной части сверток одинаково распределенных случайных величин при стремлении числа слагаемых к бесконечности. Показано, что энтропии остатков от деления на 2, 3, 4 свертки одинаково распределенных пуассоновских случайных величин стремятся к максимально возможному значению с ростом числа слагаемых.

Ключевые слова: свертка, дробная часть, равномерное распределение, пуассоновское распределение, энтропия.

Задачи, связанные с изучением поведения сверток случайных величин, не только предопределили становление теории вероятностей как математической дисциплины, но и продолжают занимать в ней центральное место [1; 2]. Закон больших чисел и центральная предельная теорема имеют настолько глобальное значение, что широко известны и применяются не только за пределами теории вероятностей, но и за границами математики.

Не в последнюю очередь это связано с тем, что операция свертки весьма трудоемкая, и поэтому точное нахождение распределения сверток при большом числе слагаемых за достаточно редким исключением не представляется возможным.

Ю.В. Прохоровым и его школой рассматривались задачи, связанные со сходимостью к равномерному распределению [3], исследовались вопросы энтропии сверток дискретных случайных величин [4; 5] .

В [6; 7] было рассказано о взаимосвязи операций взятия остатка от деления и дробной части с равномерностью распределения, а именно то, что свойство равномерности слагаемого наследуется остатком от деления и дробной частью свертки с произвольной случайной величиной в дискретном и абсолютно непрерывном случаях соответственно.

В [8; 9] после обобщения и унификации понятий остатка от деления и дробной части было доказано, что вышеуказанное информационное свойство в неканонических случаях сохраняется.

В данном контексте вполне естественно возникает вопрос о том, будет ли сходиться к равномерному распределению дробная часть свертки одинаково распределенных случайных величин, а в случае существования такой сходимости – её скорость.

Хорошо известно [10], что функция энтропии дискретной случайной величины ξ, принимающей n значений с соответствующими вероятностями $p_1, \dots, p_n$,

$$H\xi = H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k,$$

достигает максимума на равномерном распределении и только на нем

$$H\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \log_2 n.$$

Утверждение 1.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром λ, т. е. $\xi_n \sim \Pi(\lambda)$, а $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ – последовательность их частичных сумм.

Тогда:

$$H\{\eta_n\}_2 = H\left(\frac{1}{2} + \frac{e^{-2\lambda n}}{2}, \frac{1}{2} - \frac{e^{-2\lambda n}}{2}\right) \to \frac{1}{2}, n \to \infty.$$

Доказательство.

Известно, что свертка пуассоновских случайных величин имеет пуассоновское распределение с параметром, равным сумме параметров слагаемых, то есть в нашем случае

$$\eta_n \sim \Pi(\lambda n).$$

Тогда:

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_2 = 0) = e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^{2k}}{(2k)!} = e^{-\lambda n} \cdot \mathrm{ch}(\lambda n) = e^{-\lambda n} \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{\lambda n} + e^{-\lambda n}) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{e^{-2\lambda n}}{2} \to \frac{1}{2}, n \to \infty$$

и

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_2 = 1) = e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^{2k+1}}{(2k+1)!} = e^{-\lambda n} \cdot \mathrm{sh}(\lambda n) = e^{-\lambda n} \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{\lambda n} - e^{-\lambda n}) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{e^{-2\lambda n}}{2} \to \frac{1}{2}, n \to \infty.$$

Доказательство завершено.

***

Утверждение 2.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром λ, а $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

Тогда:

$$H\{\eta_n\}_3 = H\left(\begin{matrix} \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}, \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}, \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-\frac{3\lambda n}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}\lambda n}{2} \end{matrix}\right) \to \frac{1}{3},$$

$$n \to \infty.$$

Доказательство.

Для

$$P(\{\eta_n\}_3 = 0) = e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^{3k}}{(3k)!},$$

$$P(\{\eta_n\}_3 = 1) = e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^{3k+1}}{(3k+1)!},$$

$$P(\{\eta_n\}_3 = 2) = e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^{3k+2}}{(3k+2)!}$$

определим функцию

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{3k}}{(3k)!},$$

для которой формально

$$G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{3k+2}}{(3k+2)!}, G''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{3k+1}}{(3k+1)!}.$$

С учётом равенства

$$P(\{\eta_n\}_3 = 0) + P(\{\eta_n\}_3 = 1) + P(\{\eta_n\}_3 = 2) = 1$$

для $G(x)$ получаем неоднородное дифференциальное уравнение

$$G(x) + G'(x) + G''(x) = e^x$$

с начальными условиями:

$$G(0) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0)^{3k}}{(3k)!} = 1, G'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0)^{3k+2}}{(3k+2)!} = 0.$$

Для того чтобы решить данное уравнение, сначала найдем решение однородного дифференциального уравнения:

$$G(x) + G'(x) + G''(x) = 0.$$

Составим для него характеристическое уравнение и решим его:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Теперь можно выписать общее решение однородного дифференциального уравнения:

$$G_{\text{о.о}}(x) = C_1 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + C_2 \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}.$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения ищем в виде $G_{\text{ч.н.}}(x) = A \cdot e^x$.

Подставив в исходное уравнение, получим значение $A = \frac{1}{3}$. Таким образом,

$$G_{\text{ч.н.}}(x) = \frac{1}{3} \cdot e^x.$$

Граничные условия позволяют найти константы в $G_{\text{о.о}}(x)$. Так,

$$G(0) = 1 = C_1 + \frac{1}{3} \Rightarrow C_1 = \frac{2}{3};$$

$$G'(0) \;=\; 0 \;=\; \frac{1}{3}-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2 \;\Rightarrow\; C_2 \;=\; 0\,.$$

В итоге

$$G(x) \;=\; \sum_{k\,=\,0}^{\infty}\frac{(x)^{3k}}{(3k)!} \;=\; \frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{x}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{1}{3}\cdot e^{x}\,.$$

Поэтому получаем

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_3 \;=\; 0) \;=\; \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot e^{-\frac{3\lambda n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}\to\frac{1}{3}, n\to\infty$$

и далее

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_3 \;=\; 1) = \; e^{-\lambda n}\cdot G''(\lambda n) =$$

$$= \; e^{-\lambda n}\cdot\left(\frac{1}{3}e^{\lambda n}-\frac{1}{3}e^{-\frac{\lambda n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\lambda n}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}\right)=$$

$$= \; \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3\lambda n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3\lambda n}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}\to\frac{1}{3}, n\to\infty\,.$$

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_3 \;=\; 2) \;=\; e^{-\lambda n}\cdot G'(\lambda n)$$

$$= \; e^{-\lambda n}\cdot\left(\frac{1}{3}e^{\lambda n}-\frac{1}{3}e^{-\frac{\lambda n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{\lambda n}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}\right)=$$

$$= \; \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3\lambda n}{2}}\cdot\cos\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}e^{-\frac{3\lambda n}{2}}\cdot\sin\frac{\sqrt{3}\lambda n}{2}\;\to\frac{1}{3}, n\to\infty\,.$$

Доказательство завершено.

***

Утверждение 3.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ – независимые одинаково распределенные пуассоновские случайные величины с параметром λ и $\eta_n \;=\; \xi_1+\cdots+\xi_n$.

Тогда:

$$H\{\eta_n\}_4 \;=\; H\left(\frac{1}{4}+\frac{e^{-2\lambda n}}{4}+\frac{1}{2}e^{-\lambda n}\cos\lambda n, \frac{1}{4}-\frac{e^{-2\lambda n}}{4}+\frac{1}{2}e^{-\lambda n}\sin\lambda n, \frac{1}{4}+\frac{e^{-2\lambda n}}{4}-\frac{1}{2}e^{-\lambda n}\cos\lambda n, \frac{1}{4}-\frac{e^{-2\lambda n}}{4}-\frac{1}{2}e^{-\lambda n}\sin\lambda n\right)\to\frac{1}{4}, n\to\infty\,.$$

Доказательство.

Для

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_3 \;=\; 0) \;=\; e^{-\lambda n}\sum_{k\,=\,0}^{\infty}\frac{(\lambda n)^{4k}}{(4k)!},$$

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_3 \;=\; 1) \;=\; e^{-\lambda n}\sum_{k\,=\,0}^{\infty}\frac{(\lambda n)^{4k+1}}{(4k+1)!},$$

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_3 \;=\; 2) \;=\; e^{-\lambda n}\sum_{k\,=\,0}^{\infty}\frac{(\lambda n)^{4k+2}}{(4k+2)!},$$

$$P(\{\eta_n\}_3 = 3) = e^{-\lambda n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^{4k+3}}{(4k+3)!}$$

определим функцию

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{4k}}{(4k)!}.$$

Тогда:

$$G'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{4k+3}}{(4k+3)!}, G''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{4k+2}}{(4k+2)!}, G'''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{4k+1}}{(4k+1)!}.$$

С учётом равенства

$$P(\{\eta_n\}_3 = 0) + P(\{\eta_n\}_3 = 1) + P(\{\eta_n\}_3 = 2) + P(\{\eta_n\}_3 = 3) = 1$$

для $G(x)$ получаем неоднородное дифференциальное уравнение

$$G(x) + G'(x) + G''(x) + G'''(x) = e^x$$

с начальными условиями

$$G(0) = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0)^{4k}}{(4k)!} = 1, G'(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0)^{4k+3}}{(4k+3)!} = 0, G''(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(0)^{4k+2}}{(4k+2)!} = 0.$$

Для того чтобы его решить, сначала найдем решение однородного дифференциального уравнения:

$$G(x) + G'(x) + G''(x) + G'''(x) = 0.$$

Теперь составим для него характеристическое уравнение и решим его:

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \pm i.$$

Значит, общее решение данного однородного дифференциального уравнения может быть представлено в виде:

$$G_{\text{о.о}}(x) = C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x + C_3 \cdot e^{-x}.$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения снова ищем в виде $G_{\text{ч.н.}}(x) = A \cdot e^x$. Подставив $G_{\text{ч.н.}}(x)$ в исходное уравнение, получим значение $A = \frac{1}{4}$. Таким образом,

$$G_{\text{ч.н.}}(x) = \frac{1}{4} \cdot e^x.$$

Учитывая граничные условия, находим, что

$$G(0) = 1 = C_1 + \frac{1}{4} + C_3, G'(0) = 0 = C_2 - C_3 + \frac{1}{4}, G''(0) = 0 = -C_1 + C_3 + \frac{1}{4}.$$

Откуда $C_1 = \frac{1}{2}, C_2 = 0, C_3 = \frac{1}{4}$.

В итоге

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x)^{4k}}{(4k)!} = \frac{1}{4} \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot \cos x + \frac{1}{4} \cdot e^x.$$

Следовательно,

$$P(\{\eta_n\}_4 = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \cos \lambda n \to \frac{1}{4}, n \to \infty;$$

$$P(\{\eta_n\}_4 = 1) = e^{-\lambda n} \cdot G'''(\lambda n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} + \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \sin \lambda n \to \frac{1}{4}, n \to \infty;$$

$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_4 = 2) = e^{-\lambda n} \cdot G''(\lambda n) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \cos\lambda n \to \frac{1}{4}, n \to \infty;$$
$$\mathrm{P}(\{\eta_n\}_4 = 3) = e^{-\lambda n} \cdot G'(\lambda n) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cdot e^{-2\lambda n} - \frac{1}{2} \cdot e^{-\lambda n} \cdot \sin\lambda n \to \frac{1}{4}, n \to \infty.$$

Доказательство завершено.

***

Таким образом, в частных случаях показано, что дробные части сверток экспоненциально быстро сходятся по распределению к равномерным случайным величинам и их энтропии максимизируются с ростом числа слагаемых.

Литература

1. *Сенатов В.В.* Центральная предельная теорема: Точность аппроксимации и асимптотические разложения. – М.: Книжный дом «Либроком», 2009. – 350 с.
2. *Ширяев А.Н.* Вероятность: в 2 кн. – М.: МЦМНО, 2017. – 967 с.
3. *Висков О.В., Хохлов В.И.* О четырех направлениях исследований Ю.В. Прохорова и их перспективах // Теория вероятностей и ее применение. 2015. Т. 60, вып. 2. – С. 383–390.
4. *Матеев П.* Об энтропии полиномиального распределения // Теория вероятностей и ее применение. 1978. Т. 23, вып. 1. – С. 188–190.
5. *Kovačević M.* On the maximum entropy of a sum of independent discrete random variables // Теория вероятностей и ее применение. 2021. Т. 66, вып. 3. – С. 601–609.
6. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* Об информационном свойстве свертки с равномерным распределением // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики: материалы XIV Международной конференции (г. Махачкала, 16–19 сентября 2021 г.). – Махачкала: Издательство ДГУ, 2021. – С. 135–138.
7. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2022. № 1. – С. 7–11.
8. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* О сохранении информационного свойства свертки в неканоническом случае // Актуальные проблемы математики и информационных технологий: материалы III Всероссийской конференции (г. Махачкала, 7–9 февраля 2022 г.). – Махачкала: Издательство ДГУ, 2022 – С. 105–108.
9. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свертки с равномерным распределением // Вестник Тверского государственного университета. Сер.: Прикладная математика. 2022. № 1. – С. 45–52.
10. *Чечёта С.И.* Введение в дискретную теорию информации и кодирования. – М.: МЦМНО, 2011. – 224 с.

Поступила в редакцию 27 февраля 2023 г.

UDC 517.926, 517.962.26, 517.982.43, 519.21, 519.72

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-32–38

On Maximizing the Entropy of the Fractional Part of Convolutions of Identically Distributed Poisson Random Variables in Some Special Cases

A.E. Condratenko, V.N. Sobolev, D.A. Chernyshova

Lomonosov Moscow State University; Russia, 119991, Moscow, GSP-1, Leninskiye Gory, 1; ae_cond@mech.math.msu.su, sobolev-vn@ya.ru, daria.chernyshova@math.msu.ru

Abstract. The article is devoted to further studies of the behavior of the fractional part of the convolutions of random variables. Earlier, the authors showed that the fractional part of the convolution inherits the uniformity of the summand. The paper raises a global question about the limiting behavior of the fractional part of convolutions of identically distributed random variables when the number of terms tends to infinity. It is shown that the entropy of the residues from the division into 2, 3, 4 convolutions of identically distributed Poisson random variables tends to the maximum possible value with an increase in the number of terms.

Keywords: convolution, fractional part, uniform distribution, Poisson distribution, entropy.

Received 27 February 2023