УДК 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-100–108

М.М. Сиражудинов [1, 2]***, М.Г. Ибрагимов*** [2]

О некоторых задачах на всей плоскости для уравнения Бельтрами

[1] *Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45;*

[2] *Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; sirazhmagomed@yandex.ru*

Аннотация. Для усреднения эллиптических уравнений достаточно иметь однозначно разрешимую задачу во всем пространстве и соответствующие априорные оценки. Это позволяет изучить различные аспекты усреднения не только во всем пространстве, но и в ограниченных областях. Однозначно разрешимую задачу в $\mathbb{R}^n$ и соответствующие априорные оценки имеют дивергентные эллиптические уравнения (см. [1–6]). В случае недивергентных уравнений задачи во всем пространстве мало изучены.

В статье рассматривается задача на всей плоскости для уравнения Бельтрами. Получены априорные оценки, доказана гипоэллиптичность уравнения с постоянным коэффициентом. Изложены свойства сглаживания функций по Стеклову в L_p-пространствах. Полученные результаты в дальнейшем будут использованы нами в вопросах усреднения уравнения Бельтрами.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, усреднение.

Кратко изложим метод смещения Жикова В.В. в вопросах усреднения [6].

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ эллиптическое уравнение с малым параметром

$$u^\varepsilon \in W_2^1(\mathbb{R}^n), \qquad A_\varepsilon u^\varepsilon + u^\varepsilon \equiv -\operatorname{div} a(\varepsilon^{-1}x)\nabla u^\varepsilon = f \in L^2(\mathbb{R}^n), \tag{0.1}$$

в котором $a(y)$ – измеримая периодическая симметрическая матрица, подчиненная условию эллиптичности

$$\nu|\xi|^2 \le a\xi\cdot\xi \le \nu^{-1}|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad \nu > 0.$$

С уравнением (0.1) связано усредненное уравнение

$$A_0 u^0 + u^0 = -\operatorname{div} a^0\nabla u^0 + u^0 = f,$$

где a^0 – некоторая постоянная эллиптическая матрица. Задача (0.1) однозначно разрешима для любой правой части f. Простейший результат усреднения дивергентного уравнения (0.1) – L_2-сходимость решений:

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ для любого } f \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

М.Ш. Бирман и Т.А. Суслина, используя спектральный метод (или блоховский метод), доказали оценку

$$\|u^\varepsilon - u^0\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} \le c\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}, \tag{0.2}$$

(из которой следует предыдущее соотношение), где постоянная $c > 0$ определяется только по n и λ.

При получении априорных оценок вида (0.2) важную роль играет первое приближение метода асимптотических приближений. Напомним, как строится первое приближение. Пусть $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^n$ – ячейка периодов.

Введём периодические задачи

$$N^j \in W_2^1(\square), \mathrm{div}_y a(y)\left(e^j + \nabla_y N^j\right) = 0, \qquad \langle N^j \rangle = 0, \qquad j = 1, \dots, n,$$

где $e^1, \dots, e^n$ – естественный базис в $\mathbb{R}^n$. Известно, что матрица a^0, определенная равенствами

$$a^0 e^j = \langle a\left(e^j + \nabla_y N^j\right) \rangle, \ j = 1, \dots, n$$

является симметрической и положительно определённой. Положим

$$v^\varepsilon(x, \omega) = u^0(x) + \varepsilon N^j(\omega + y) \frac{\partial u^0}{\partial x_j}(x), \quad y = \varepsilon^{-1} x, \qquad \omega \in \mathbb{R}^n, \qquad (0.3)$$

где u^0 – решение усреднённой задачи. Функция $v^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x, 0)$ известна как первое приближение к решению $u^\varepsilon(x)$ исходной задачи (0.1). Имеет место

Теорема 0.1. Справедлива оценка

$$\int\limits_{\square} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (|u^\varepsilon(x + \varepsilon\omega) - v^\varepsilon(x, \omega)|^2 + |\nabla u^\varepsilon(x + \varepsilon\omega) - \nabla v^\varepsilon(x, \omega)|^2) dx d\omega \le$$

$$\le c\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^2 \, dx \, , \qquad (0.4)$$

в которой $c > 0$ – постоянная, зависящая только от размерности n и постоянной эллиптичности λ.

Поясним роль дополнительного параметра ω. При условии $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ первое приближение $v^\varepsilon(x) = v^\varepsilon(x, 0)$ вообще может не принадлежать пространству Соболева $W_2^1(\mathbb{R}^n)$, в то время как $v^\varepsilon(x, \omega)$, $\nabla v^\varepsilon(x, \omega)$ принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n \times \square)$, что непосредственно ясно из (0.4). Действительно, ситуация здесь такая. Пусть $\Phi = \Phi(\mathrm{x}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $b = b(y) \in L_2(\square)$. В таком случае функция $b(\varepsilon^{-1}x)\Phi(x)$ необязательно принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$, но

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{\square} |b(\omega + \varepsilon^{-1}x)\Phi(x)|^2 d\omega dx \le \langle |b|^2 \rangle \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\Phi|^2 \, dx < \infty.$$

Выведем из теоремы 0.1 оценку (0.2). Так как (см. (0.3))

$$\int\limits_{\square} v^\varepsilon(x, \omega) d\omega = u^0(x) + \varepsilon \int\limits_{\square} N^j(\omega + y) d\omega \frac{\partial u^0}{\partial x_j}(x) = u^0(x),$$

то из (0.4) по известному неравенству Коши–Буняковского получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{\square} u^\varepsilon(x + \varepsilon\omega) d\omega - u^0(x) \right|^2 dx \le c\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^2 dx. \qquad (0.5)$$

Функция $\int\limits_{\square} u^\varepsilon(x + \varepsilon\omega) d\omega$

представляет собой сглаживание по Стеклову решения задачи (0.1). В силу одного из свойств такого сглаживания имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left| \int\limits_{\square} u^\varepsilon(x + \varepsilon\omega) d\omega - u^\varepsilon(x) \right|^2 dx \le c\varepsilon^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^2 dx,$$

что вместе с (0.5) приводит к оценке (0.2) Бирмана–Суслиной.

1.1. Свойства операторов $\hat{\mathrm{T}}$, Т и П

В работах [7–9] рассмотрены периодические задачи и задача Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами. Ниже в п. 1.1 и 1.2 мы рассмотрим задачу на всей плоскости.

Для бесконечно дифференцируемых финитных функций $g(z) \in C_0^\infty(E), z = = x + iy$ операторы $\hat{\mathrm{T}}$, Т и П определим равенствами

$$(\hat{T}g)(z) = (Tg)(z) - (Tg)(z_0), z \in E,$$
$$(Tg)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad z \in E,$$
$$(\Pi g)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\xi d\eta, \qquad z \in E,$$

где $\zeta = \xi + i\eta$, $z_0 \in E$ – любая фиксированная точка плоскости.

Имеет место следующая

Лемма 1. Справедливы соотношения

$$\partial_{\bar{z}}\hat{T}g = \partial_{\bar{z}}Tg = g, \partial_z(\hat{T}g) = \partial_z(Tg) = \Pi g, \tag{1}$$

где $\partial_{\bar{z}} = 2^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \partial_z = 2^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Производные понимаются в смысле Соболева.

Функции $(Tg)(z)$, $(\hat{T}g)(z)$ отличаются друг от друга на постоянную, и они равномерно непрерывны по Гёльдеру на всей плоскости, т. е.

$$\left|(Tg)(z') - (Tg)(z")\right| = \left|(\hat{T}g)(z') - (\hat{T}g)(z")\right| \le c_1\|g\|_{L_q(E)}|z' - z"|^{1-\frac{2}{q}} \text{ при } q \in (2, \infty), \tag{2}$$

$z', z" \in E,\ c_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от q.

Кроме того, имеем

$$\|\Pi g\|_{L_q(E)} \le c_q\|g\|_{L_q(E)} \text{ при } q \in (1, \infty), \tag{3}$$
$$\|\Pi g\|_{L_2(E)} = \|g\|_{L_2(E)}, \tag{4}$$

где $c_q > 0$ – норма оператора П. Норма c_q обладает свойством

$$\lim_{q \to 2} c_q = 1 = c_2. \tag{5}$$

Доказательства отмеченных свойств операторов $\hat{\mathrm{T}}$, Т и П можно найти в книге [10, § 5–9].

Из леммы 1 следует, что *Пg* определено при $q > 1$ (интеграл понимается в смысле главного значения), а $\hat{T}g, Tg$ имеют смысл при $g \in L_q(E)$, $q > 2$.

Обозначим через B_q^1 множество всех комплекснозначных функций $w(z)$, определенных на плоскости E, для которых конечна полунорма

$$\|w\|_{B_q^1} = H_{\alpha,E}[w] + \|\partial_{\bar{z}}w\|_{L_q(E)} + \|\partial_z w\|_{L_q(E)},$$

где

$$H_{\alpha,E}[w] = \sup_{\substack{z',z'' \in E \\ z' \neq z''}} \frac{|w(z') - w(z'')|}{|z' - z''|^\alpha}.$$

Пусть $w = Tg$, $g \in L_q(E)$, тогда, ввиду (1)– (3), w принадлежит B_q^1.

Предположим, что $z_0 \in E$ – произвольная фиксированная точка плоскости, и пусть $\hat{B}_q^1$ – подмножество B_q^1, состоящее из функций, равных нулю в точке z_0. Соотношение

$$\|w\|_{\hat{B}_q^1} = H_{\alpha,E}[w] + \|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_q(E)} + \|\partial_z w\|_{L_q(E)} \tag{6}$$

задает норму в $\hat{B}_q^1$. Относительно этой нормы $\hat{B}_q^1$ – банахово пространство.

Пусть $w(z) = (\hat{\mathrm{T}} g)(z)$, $g \in L_q(E)$, тогда из свойств (1)– (3) вытекает, что $w \in \hat{B}_q^1$.

Очевидно, что $\hat{\mathrm{T}}: L_q(E) \to \hat{B}_q^1$ – линейный ограниченный оператор, удовлетворяющий соотношениям (1)– (3).

Показатель q – фиксированное число, удовлетворяющее неравенствам

$$q > 2, k_0 c_q < 1, \tag{7}$$

где $0 \le k_0 < 1$, – константа эллиптичности (см. (9)). Согласно (5) такие показатели существуют.

1.2. Задача на всей плоскости для уравнения Бельтрами

Рассмотрим на всей плоскости задачу

$$\begin{cases} Aw \equiv \partial_{\bar{z}} w + \mu \partial_z w = f \in L_q(E) \\ \qquad w \in \hat{B}_q^1, \end{cases} \tag{8}$$

где $q > 2$ – показатель повышенной суммируемости из (7), μ – комплекснозначная, ограниченная функция, удовлетворяющая условию

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x \in E} |\mu(x)| \le k_0 < 1, \tag{9}$$

где $k_0 > 0$ – постоянная эллиптичности. Справедлива

Теорема 1. Для любой правой части $f \in L_q(E)$ задача (8) однозначно разрешима. Причем имеют место априорные оценки

$$H_{\alpha,E}[w] + \|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_q(E)} + \|\partial_z w\|_{L_q(E)} \le \mathrm{c}\, \|Aw\|_{L_q(E)}, \qquad w \in \hat{B}_q^1, \tag{10}$$

где $\mathrm{c} > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и q из (9) и (7),

$$|w(z)| \le \hat{\mathrm{c}}\, \|Aw\|_{L_q(E)}, \quad w \in \hat{B}_q^1, \tag{11}$$

$$\|w\|_{L_q(K)} \le \hat{\mathrm{c}}_1\, \|Aw\|_{L_q(E)}, \quad w \in \hat{B}_q^1, \tag{12}$$

где $K \subset E$ – произвольная ограниченная область плоскости, $\hat{\mathrm{c}}, \hat{\mathrm{c}}_1 > 0$ – постоянные, зависящие только от K, k_0, q и $\operatorname{dist}(z_0, K)$. (Напомним, что $z_0 \in E$ – произвольная фиксированная точка плоскости).

Доказательство. Сначала докажем априорные оценки. Достаточно их проверить для всюду плотного в $\hat{B}_q^1$ множества бесконечно дифференцируемых финитных функций $C_0^\infty(E)$, равных нулю в фиксированной точке $z_0 \in E$. Пусть $w \in C_0^\infty(E)$, тогда w можно представить в виде свертки

$$w = -\pi^{-1}(\partial_{\bar{z}} w) * z^{-1} = T(\partial_{\bar{z}} w), z = x + iy \in E, \tag{13}$$

(см. [10, гл. 1, § 5, п. 1]). Значит, ввиду (1) получим

$$\partial_z w = \partial_z \mathrm{T}(\partial_{\bar{z}} w) = \Pi(\partial_{\bar{z}} w).$$

Следовательно, согласно (8) имеем

$$\|\partial_z w\|_{L_q(E)} = \|\Pi(Aw - \mu \partial_z w)\|_{L_q(E)} \le k_0 c_q\, \|\partial_z w\|_{L_q(E)} + c_q\, \|Aw\|_{L_q(E)}.$$

Отсюда вытекает

$$\|\partial_z w\|_{L_q(E)} \le \frac{c_q}{1 - k_0 c_q} \|Aw\|_{L_q(E)}. \tag{14}$$

Ввиду равенства $\partial_{\bar{z}} w = Aw - \mu \partial_z w$ с учетом (14) получим

$$\|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_q(E)} \le \|Aw\|_{L_q(E)} + k_0\, \|\partial_z w\|_{L_q(E)} \le \frac{1}{1 - k_0 c_q} \|Aw\|_{L_q(E)}\ . \tag{15}$$

Из (2), (13) и (15) вытекает

$$|w(z') - w(z")| \le c_1 \|\partial_{\bar z} w\|_{L_q(E)} |z' - z"|^{1-\frac{2}{q}} \le \\ \le \frac{c_1}{1-k_0 c_q} \|Aw\|_{L_q(E)} \, |z' - z"|^{1-\frac{2}{q}} . \tag{16}$$

Следствием неравенств (14) – (16) является оценка (10).

Докажем оценки (11) и (12). Для любого $z \in E$ ввиду (16) имеем

$$|w(z)| \, = \, |w(z) - w(z_0)| \le \frac{c_1}{1 - k_0 c_q} \|Aw\|_{L_q(E)} |z - z_0|^{1-\frac{2}{q}}.$$

Отсюда следует оценка (11). Проинтегрировав предыдущую оценку, получим

$$\|w\|_{L_q(K)} \le \frac{c_1}{1 - k_0 c_q} \|Aw\|_{L_q(E)} \left(\iint\limits_K |z - z_0|^{q-2} dxdy \right)^{\frac{1}{q}} \\ \le \frac{c_1}{1 - k_0 c_q} (\mathrm{dist}\,(z_0, K) + d)^{1-\frac{2}{q}} \, |K|^{\frac{1}{q}} \, \|Aw\|_{L_q(E)} \, .$$

Оценка (12) доказана.

Теперь докажем первую часть теоремы.

Однородная задача (8) ($f \, = \, 0$) ввиду оценок (10) и (12) имеет только тривиальное решение. Следовательно, задача (8) не может иметь более одного решения.

Рассмотрим задачу

$$(1 - B)g \, = \, \Pi f, g, f \in L_q(E), \tag{17}$$

где $B \colon L_q(E) \to L_q(E)$ – оператор, определенный формулой

$$Bg \, = \, -\Pi(\mu g), \quad g \in L_q(E). \tag{18}$$

Ввиду (7) и (9) очевидно, что $\|B\| \le k_0 c_q < 1$. Следовательно, оператор $1 - B$ обратим. Значит, ввиду (17) $g \, = \, (1 - B)^{-1} \Pi f \, = \, (1 + \Pi\mu)^{-1} \Pi f$. Положим

$$w \, = \, -T(\mu g - f). \tag{19}$$

Тогда ввиду (1), (17) и (18) имеем

$$\partial_z w \, = \, -\Pi(\mu g - f) \, = \, -\Pi(\mu g) + \Pi f \, = \, g, \text{т. е.}$$
$$g \, = \, \partial_z w, \partial_{\bar z} w \, = \, -\mu g + f \, = \, -\mu \partial_z w + f,$$

т. е. (19) дает решение задачи (8). Теорема 1 доказана.

1.3. О повышении гладкости решения уравнения Бельтрами с постоянным коэффициентом

Рассмотрим задачу на всей плоскости

$$\begin{cases} Aw \equiv \partial_{\bar z} w + \mu^0 \partial_z w \, = \, f \in W_q^1(E) \\ w \in B_q^2 \, = \, \{ w \in B_q^1, \partial_{\bar z} w \in B_q^1, \, \partial_z w \in B_q^1 \}, \end{cases} \tag{20}$$

где μ^0 – постоянная такая, что $|\mu^0| \le k_0 < 1$ а норма в B_q^2 определяется равенством

$$\|w\|_{B_q^2} \, = \, \|w\|_{B_q^1} + \|\partial_{\bar z} w\|_{B_q^1} + \|\partial_z w\|_{B_q^1}.$$

(Определение B_q^1 смотрите в (6)). Шапочки в обозначениях пространств опущены. Задача (20) ввиду теоремы 1 и вложения $W_q^1(E) \subset L_q(E)$ имеет единственное решение из пространства B_q^1. Это решение, согласно следующей теореме, принадлежит пространству B_q^2.

Теорема 2. Задача (20) однозначно разрешима для любой правой части f из пространства $W_q^1(E)$.

Доказательство проведем привлечением разностных отношений $(h \neq 0)$,

$$\Delta_1^h w = \frac{u(x_1+h, x_2) - u(x_1, x_2)}{h}, \Delta_2^h w = \frac{u(x_1, x_2+h) - u(x_1, x_2)}{h},$$

где $w \in B_q^1$ – решение задачи (20). Имеем

$$\begin{aligned} A\left(\Delta_j^h w\right) &= \partial_{\bar{z}}\left(\Delta_j^h w\right) + \mu^0 \partial_z\left(\Delta_j^h w\right) = \\ &= \Delta_j^h(\partial_{\bar{z}} w + \mu^0 \partial_z w) = \Delta_j^h A w = \Delta_j^h f. \end{aligned} \tag{21}$$

Из оценки (10) вытекает

$$\left\|\partial_{\bar{z}}\left(\Delta_j^h w\right)\right\|_q + \left\|\partial_z\left(\Delta_j^h w\right)\right\|_q \leq c\left\|A\left(\Delta_j^h w\right)\right\|_q, \tag{22}$$

где $\|\cdot\|_q$ – L_q-норма, $c > 0$ – постоянная, зависящая только от k_0 и q.

Правая часть задачи (20) принадлежит $W_q^1(E)$, поэтому имеет место оценка

$$\|f(x+t) - f(x)\|_q \leq |t| \, \|\nabla f\|_q, t \in E. \tag{23}$$

Действительно, пусть $t = |t| \cdot \xi \in E$, где $\xi \in E, |\xi| = 1$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f(x+t) - f(x) &= \int_0^{|t|} \frac{d}{ds} f(x + s\xi) ds = \\ &= \int_0^{|t|} \frac{d}{ds}\left(\xi, \nabla f(x+s\xi)\right)_E ds, \end{aligned}$$

где $\left(\xi, \nabla f(x+s\xi)\right)_E$– скалярное произведение на плоскости. Применив неравенство Минковского, изменив порядок интегрирования и замены переменных $y = x + s\,\xi$, получим

$$\left(\int_E |f(x+t) - f(x)|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq \int_0^{|t|} \left(\int_E \left|\left(\xi, \nabla f(x+s\xi)\right)_E\right|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} ds =$$

$$\int_0^{|t|} \left(\int_E |(\nabla f(y), \xi)_E|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}} ds \leq |t| \left(\int_E |\nabla f(y)|^q \, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Неравенство (23) доказано.

Пусть $t = (h, 0), t = (0, h)$, тогда из (23) вытекают неравенства

$$\left\|\Delta_j^h f\right\|_q \leq \|\nabla f\|_q, j = 1, 2.$$

Отсюда и из соотношений (22), (23) следует, что семейства

$$\left\|\Delta_j^h(\partial_{\bar{z}} w)\right\|_q, \left\|\Delta_j^h f\right\|_q = \left\|\Delta_j^h A w\right\|_q, \; j = 1, 2$$

равномерно ограничены по $h \in R$ в $L_q(E)$. Следовательно, найдется последовательность $\{h_n\} \subset R$ такая, что

$$\Delta_j^{h_n}(\partial_{\bar{z}} w) \rightharpoonup \chi_j, j = 1, 2, \Delta_j^{h_n}(\partial_z w) \rightharpoonup \chi_j, j = 3, 4, \Delta_j^{h_n} f = \Delta_j^{h_n} A w \rightharpoonup \chi_j, j = 5, 6$$

при $h_n \to 0$ в $L_q(E)$.

Покажем, что χ_1 равна производной $\partial_{x_1}\partial_{\bar{z}} w$. Действительно, имеем

$$\int_E \Delta_1^h(\partial_{\bar{z}} w)\varphi dx = -\int_E \partial_{\bar{z}} w \, \Delta_1^{-h} \varphi dx, \varphi \in C_0^\infty(E).$$

Отсюда, после предельного перехода при $h_n \to 0$, получим

$$\int_E \chi_1 \varphi dx = -\int_E \partial_{\bar z} w\, \partial_{x_1}\varphi\, dx = \left(\partial_{x_1}\partial_{\bar z} w, \varphi\right), \varphi \in C_0^\infty(E),$$

где $(\cdot,\cdot)$ – значение обобщенной функции. Значит,

$$\chi_1 = \partial_{x_1}\partial_{\bar z} w \in L_q(E).$$

Аналогично получим

$$\chi_2 = \partial_{x_2}\partial_{\bar z} w \in L_q(E), \chi_3 = \partial_{x_1}\partial_z w \in L_q(E),\ \chi_4 = \partial_{x_2}\partial_z w,$$
$$\chi_5 = \partial_{x_1} A w = \partial_{x_1} f,\ \chi_6 = \partial_{x_2} A w = \partial_{x_2} f.$$

Из этих равенств следует, что производные второго порядка $\partial^2_{\bar z \bar z} w,\ \partial^2_{\bar z z} w,\ \partial^2_{z \bar z} w, \partial^2_{z\,z} w$ существуют и принадлежат вместе с производными первого порядка $\partial_{\bar z} w,\ \partial_z w$ пространству $L_q(E)$. Следовательно, по теореме вложения $\partial_{\bar z} w$ и $\partial_z w$ принадлежат $L_\infty(E)$ и удовлетворяют условиям Гельдера с показателем $\alpha = (q-2)/q$ на всей плоскости.

Теорема 2 доказана.

1.4. Свойства сглаживания функций по Стеклову

Пусть $\varphi(x)$ – функция, определенная во всем пространстве $\mathbb{R}^n, n \geq 1$. Сглаживанием по Стеклову функции $\varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ называется функция, определенная равенством

$$\varphi^\varepsilon(x) = \int_\square \varphi\,(x - \varepsilon\omega) d\omega,\ x \epsilon \mathbb{R}^n, \quad (24)$$

где ε – малый параметр, $0 < \varepsilon < 1$, ω – точка единичного куба $\square = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ с центром в нуле.

В виде (24) сглаживание по Стеклову применяется в вопросах усреднения дифференциальных уравнений (см. например, [1]). При этом используются L_2-свойства сглаживания (24). Здесь мы получаем аналоги этих свойств в L_q – пространствах.

Свойство 1. Пусть $\varphi \in L_q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq q < +\infty$, тогда $\varphi^\varepsilon \in L_q(\mathbb{R}^n)$ и имеет место оценка

$$\|\varphi^\varepsilon\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}\,. \quad (25)$$

Доказательство. Применив неравенство Минковского для интегралов и изменив порядок интегрирования, получим

$$\|\varphi^\varepsilon\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_\square \varphi\,(x-\varepsilon\omega) d\omega \right|^q dx \leq$$
$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_\square |\varphi(x-\varepsilon\omega)|^q\, d\omega dx = \int_\square \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-\varepsilon\omega)|^q\, dx \right) d\omega.$$

В последнем интеграле сделаем замену $x - \varepsilon\omega = t$. Тогда, с учетом того, что объем единичного куба $\square$ равен единице,

$$\int_\square d\omega = |\square| = 1, \text{имеем } \|\varphi^\varepsilon\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n)} \leq \|\varphi\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Отсюда следует (2).

Свойство 2. Пусть φ принадлежит пространству Соболева $W^1_q(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq q < +\infty$. Тогда имеют место оценки

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x-\varepsilon\omega) - \varphi(x)|^q\, dx \leq \varepsilon^q |\omega|^q \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\varphi|^q\, dx, \omega \in \square, \quad (26)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\square}\varphi(x-\varepsilon\omega)d\omega-\varphi(x)\right|^q dx \le \varepsilon^q\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right)^q \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi|^q\,dx. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $f \in W_q^1(\mathbb{R}^n)$, $t = |t|\cdot\xi \in \mathbb{R}^n$, где $\xi \in \mathbb{R}^n$ – произвольный единичный вектор $|\xi| = 1$. Тогда имеем

$$f(x+t)-f(x) = \int_0^{|t|}\frac{d}{ds}f(x+s\xi)ds = \int_0^{|t|}(\nabla f(x+s\xi),\xi)\;ds,$$

где $(\nabla f(x+s\xi),\xi)$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Отсюда, применив неравенство Минковского, изменив порядок интегрирования и замены переменных $x+s\xi = y$, получим

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x+t)-f(x)|^q\,dx\right)^{1/q} \le \int_0^{|t|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|(\nabla f(x+s\xi)\,,\xi)|^q dx\right)^{1/q} ds =$$

$$= \int_0^{|t|}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|(\nabla f(y)\,,\xi)|^q dy\right)^{1/q} ds \le |t|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla f|^q\,dx\right)^{1/q}.$$

Значит,

$$\|f(x+t)-f(x)\|_{L_q(\mathbb{R}^n)} \le |t|\;\|\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n)},\, t \in \mathbb{R}^n. \tag{28}$$

Полагая в (28) $f = \varphi, t = -\varepsilon\omega$, получим (26).

Проинтегрируем (26) по ω и применим неравенство Коши–Буняковского. В результате получим (27).

Литература

1. *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* Об операторных оценках в теории усреднения // Успехи мат. наук. 2016. Т. 71, № 3. – С. 27–122.

2. *Бирман М.Ш., Суслина Т.А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. 2003. Т. 15, № 5. – С. 1–108.

3. *Борисов Д.И.* Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 2. – С. 19–42.

4. *Сеник Н.Н.* Об усреднении несамосопряженных локально-периодических эллиптических операторов // Функц. анализ и его прил. 2017. Т. 51, № 2. – С. 92–96.

5. *Пастухова С.Е., Тихомиров Р.Н.* Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения // Доклады РАН. 2007. Т. 415, № 3. – С. 304–309.

6. *Жиков В.В.* Об операторных оценках в теории усреднения // Доклады РАН. 2005. Т. 403, № 3. – С. 305–308.

7. *Сиражудинов М.М.* Оценки погрешности усреднения периодической задачи для уравнения Бельтрами // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2018. Т. 33, вып. 4. – С. 95–101.

8. *Сиражудинов М.М.* Оценки погрешности локально-периодического усреднения периодической задачи для уравнения Бельтрами // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2022. Т. 37, вып. 1. – С. 24–31.

9. Сиражудинов М.М. Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы *n*-уравнений Бельтрами // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2021. Т. 36, вып. 2. – С. 61–72.

10. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988.

Поступила в редакцию 21 мая 2023 г.

UDC 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-100–108

On Some Problems on the Whole Plane for the Beltrami Equation

M.M. Sirazhudinov [1, 2], ***M.G. Ibragimov*** [2]

[1] *Dagestan Federal Research Center RAS; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45;*

[2] *Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; sirazhmagomed@yandex.ru*

Abstract. To average elliptic equations, it is sufficient to have an unambiguously solvable problem in the entire space and the corresponding a priori estimates. This makes it possible to study various aspects of averaging not only in the entire space, but also in limited areas. Divergent elliptic equations have a uniquely solvable problem in R^n and corresponding a priori estimates (see [1–6]). In the case of non-divergent equations, the problems in the entire space are poorly studied.

The article considers the problem on the entire plane for the Beltrami equation. A priori estimates are obtained, the hypoellipticity of the equation with a constant coefficient is proved. The properties of smoothing functions by Glass in L_p-spaces are described. The results obtained will be used in the future in the questions of averaging the Beltrami equation.

Keywords: Beltrami equation, averaging.

Received 21 May 2023