

УДК 004.942, 519.233.33

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-74–80

С.В. Шалагин

Стохастическая модель измерения состояния кудита

Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ; Россия, 420111, г. Казань, ул. Карла Маркса, 10; sshalagin@mail.ru

Аннотация. Вычисление состояния кудита с d базисными состояниями основано на заданном количестве измерений, определённом при использовании стохастической модели. Данная модель основана на урновой схеме с возвращением, включающей d групп шаров определённого цвета. Количество измерений определено на основе общего числа шаров в урне и количества их групп. Исследована зависимость нижней оценки количества измерений от требуемой точности и заданной доверительной вероятности измерения состояния кудита, а также от количества его базисных состояний d . Показано, что увеличение количества базисных состояний d кудита влечёт за собой снижение нижней оценки количества измерений.

Ключевые слова: кудит, урновая схема, частота извлечения, количество измерений.

Введение

Исследование методов обработки информации при использовании квантовых законов является перспективным направлением [4–6]. Ключевым вопросом как при проектировании, так и при реализации методов квантовой обработки информации является измерение состояния квантово-механических систем. Моделью базового элемента квантового компьютера является кудит (КД) – квантово-механическая система с d базисными состояниями [9; 10]. Указанная модель имеет стохастический характер: при каждом измерении представляется возможным определить, в каком именно из d базисных состояний находится КД. Состояние идеального КД определяется при использовании заданного количества его измерений [4; 5; 7; 8]. Данный подход, определённый еще для стохастических вычислительных машин [1; 12; 13], в настоящее время может иметь применение и для инструментальных программных средств, работающих с квантовыми компьютерами, такими как Qiskit [3].

Представляет интерес задача измерения состояния идеального КД с заданной точностью, которая в настоящее время исследована недостаточно.

В работе предложена и исследована стохастическая модель измерения состояния КД, основанная на урновой схеме с возвращением, количество шаров в которой определяется требуемой точностью измерения.

Теоретическая часть

Введём в рассмотрение стохастическую модель измерения состояния КД, основанную на урновой схеме с возвращением [11]. Пусть в урне находится Q шаров d различных цветов, из которых c_i – количество шаров i -того цвета, $\sum_{i=1}^d c_i = Q$. Величина Q определена, исходя из требуемой точности (погрешности) Δ измерения состояния КД на основе соотношения вида

$$\Delta = (2Q)^{-1}. \quad (1)$$

Вероятность того, что из урны будет извлечён шар i -того цвета, будет равна $p_i = c_i/Q$, $i = \overline{1, d}$. Пусть при выполнении N испытаний из урны были извлечены по $N(c_i)$ шаров i -того цвета. Тогда частота извлечения шара i -того цвета вычисляется как $\bar{p}_i = N(c_i)/N$, $i = \overline{1, d}$. Вектор $(\bar{p}_i)_d = (\bar{p}_1 \dots \bar{p}_d)$ будем называть состоянием КД после выполнения N измерений.

Согласно [2, с. 88] оценка доверительного интервала для погрешности ограничена сверху величиной

$$\max |p_i - \bar{p}_i| = e \leq t_\alpha \sqrt{\frac{R}{N}}, \quad (2)$$

где R – дисперсия случайной величины, заданной вектором $(\bar{p}_i)_d$; $i = \overline{1, d}$, t_α – величина, определяющая для распределения Гаусса число среднеквадратических отклонений $\delta = \sqrt{R}$, которое нужно отложить относительно центра рассеивания, чтобы получить интервал, вероятность попадания в который была бы равна α . Например, для $\alpha = 0,95$, $t_\alpha \cong 1,96$; для $\alpha \cong 0,997$, $t_\alpha \cong 3$ [11].

Замечание: Формула (2) применима при допущении, что e имеет закон распределения, приближенный к распределению Гаусса, т. е. для $N > 24$.

На основе вышеизложенного справедливо

Утверждение. Нижняя оценка количества измерений кудита с d базисными состояниями, при котором величина $e \leq \Delta$,

$$N = 4R \cdot (Q \cdot t_\alpha)^2. \quad (3)$$

Доказательство утверждения следует из того, что, приравнявая (1) и (2) относительно e , получаем: $(2Q)^{-1} = t_\alpha \sqrt{\frac{R}{N}}$. Откуда следует, что $\sqrt{N} = 2Q \cdot t_\alpha \sqrt{R}$ или при возведении в квадрат обеих частей равенства формула (3).

Определим дисперсию R , применяемую в формуле (3) для расчёта минимального количества измерений состояния КД. Элементы вектора $(\bar{p}_i)_d = (\bar{p}_1 \dots \bar{p}_d)$ по определению связаны между собой условием нормировки: $\sum_{i=1}^d \bar{p}_i = 1$. R будет максимальной в случае максимальной энтропии вектора $(\bar{p}_i)_d$, $\bar{p}_i = 1/d$, $i = \overline{1, d}$: $R_{\max} = (d-1)/d^2$. Согласно утверждению перепишем (3) в виде неравенства

$$N \geq (t_\alpha / \Delta)^2 (d-1)/d^2, \quad (4)$$

$\Delta = (2Q)^{-1}$. Согласно (4) нижняя оценка количества измерений состояния КД будет пропорциональна квадрату параметра t_α , а также обратно пропорциональна количеству базисных состояний КД и квадрату величины допустимой погрешности измерения состояния КД.

Рассмотрим случай, когда в (4) значение величины $Q = cd$, где c – некоторая константа, d – количество базисных состояний КД. Указанная формула переписывается в виде

$$N \geq (t_\alpha c / 2)^2 (d - 1) \quad (5)$$

при условии, что $\Delta = (2cd)^{-1}$. В формуле (5) количество измерений КД линейно зависит от количества его базисных состояний d при заданной константе c , определяющей величину допустимой погрешности Δ .

Экспериментальная часть

Исследуем зависимость нижней оценки величины N , представленную согласно (4) от параметров Δ , d и t_α . На рисунке 1 приведены графики зависимости нижней оценки количества измерений КД от числа его состояний. При этом точность измерения, определяемая количеством шаров в урне согласно (1), варьируется от 8 до 20. Величина $t_\alpha = 1,96$, что соответствует доверительной вероятности 95 %. На рисунке 2 приведены данные для тех же значений, за исключением $t_\alpha = 3$, что соответствует $\alpha \cong 0,997$.

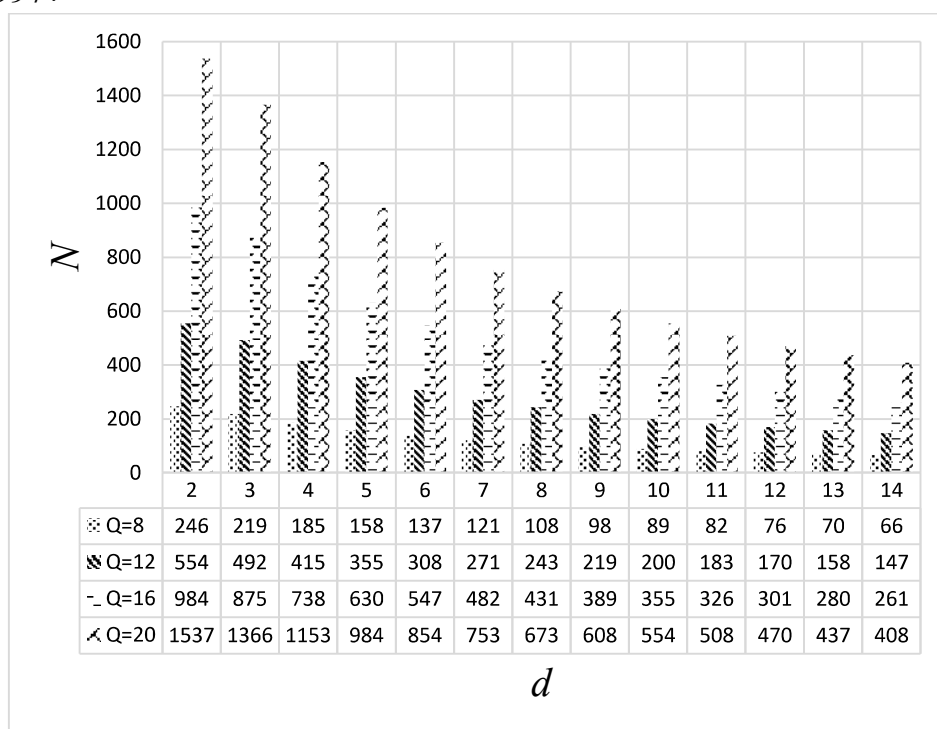


Рис. 1. Зависимость нижней оценки количества измерений КД от d при заданных Q и $t_\alpha = 1,96$

Рассмотрим случай, когда количество измерений состояния КД определяется с доверительной вероятностью 95 % (рис. 1). Для частного случая КД, кубита ($d = 2$), требуется провести не менее 246 испытаний, чтобы получить вектор $(\bar{p}_1 \ \bar{p}_2)$ с точностью Δ , не превышающей (см. формулу (1)) $1/16$, а также не менее 1537 испытаний, чтобы $(\bar{p}_1 \ \bar{p}_2)$ имел погрешность, не превышающую $1/40$. В первом случае согласно (1) $Q = 8$, во втором случае $Q = 20$. Что касается КД с количеством базисных состояний $d = 14$, то требуется провести не менее 66 испытаний для получения вектора $(\bar{p}_i)_d$, $i = \overline{1, d}$ с погрешностью не более $1/16$ и не менее 408 испытаний – для получения

$(\bar{p}_i)_d$, $i = \overline{1, d}$ с погрешностью не более $1/40$. Так как измерения КД носят вероятностный характер, верхняя оценка погрешности получения вектора $(\bar{p}_i)_d$, $i = \overline{1, d}$ при заданном d не будет превышена с доверительной вероятностью 95 %.

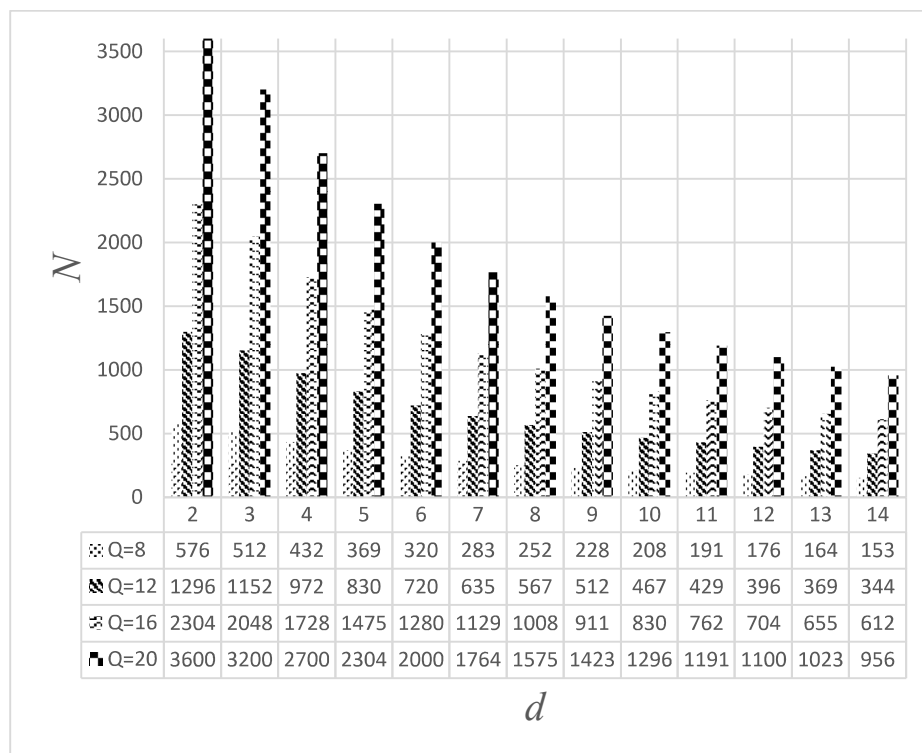


Рис. 2. Зависимость нижней оценки количества измерений КД от d при заданных Q и $t_\alpha = 3$

Если количество измерений состояния КД определяется с доверительной вероятностью 99,7 % при заданном d (рис. 2), то требуется провести не менее 576 испытаний, чтобы измерить состояние кубита ($d = 2$) с погрешностью не более $1/8$ и не менее 3600 испытаний – для измерения его состояния с погрешностью не более $1/40$. Для измерения состояния КД для $d = 14$ с погрешностью не более $1/8$ требуется выполнить не менее 153 измерений, а с погрешностью не более $1/40$ – не менее 956 измерений.

На рисунках 3 и 4 приведена зависимость нижней оценки количества измерения состояния КД – N и количество шаров в урновой схеме – Q соответственно, вычисленных согласно (5) от параметра d для $t_\alpha = 1,96$. Константа c , определяющая линейную зависимость N и Q от d , варьируется в диапазоне от 4 до 10.

Величина N варьируется от 16 для кубита ($d = 2$) до 200 для КД с $d = 14$ базисными состояниями, если $c = 4$. Когда константа $c = 10$, величина N изменяется от 97 для кубита ($d = 2$) до 1249 для КД с $d = 14$ (см. рис. 3).

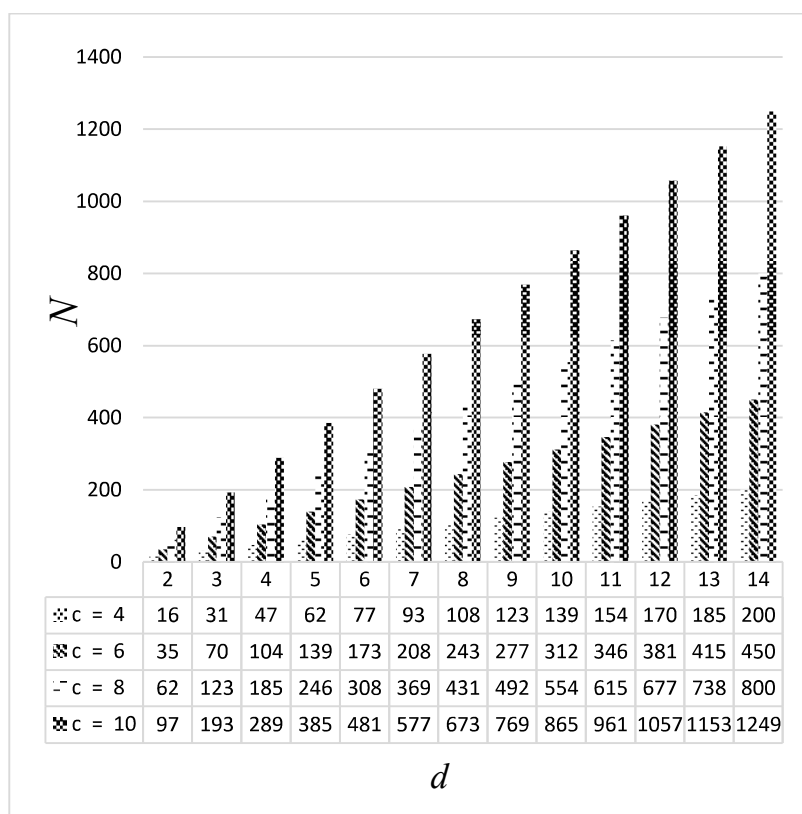


Рис. 3. Зависимость нижней оценки количества измерений КД от d для $Q = cd$ и $t_\alpha = 1,96$

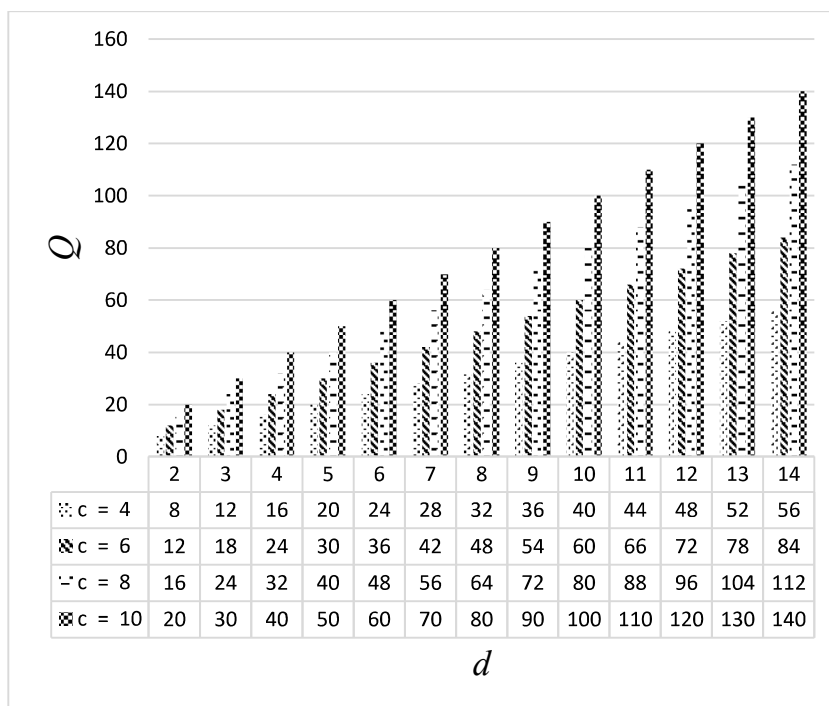


Рис. 4. Зависимость количества шаров в урне Q от d и от константы c для $t_\alpha = 1,96$

При этом количество шаров в урновой схеме – Q варьируется от 8 до 56 для КД с $d = 2, 14$, если $c = 4$, и от 20 до 140, если $c = 10$ (см. рис. 4). В результате наблюдается линейная зависимость значения N от количества d базисных состояний КД при заданных значениях константы c и параметра t_α .

Заключение

Предложена стохастическая модель измерения состояния кудита, основанная на урновой схеме с возвращением. Количество шаров в урне характеризует требуемую точность измерения состояния КД. Состояние кудита представлено как вектор частот его нахождения в заданных базисных состояниях. Данная модель позволяет определить нижнюю оценку количества измерений, требуемых для вычисления состояния КД с заданной доверительной вероятностью.

Нижняя оценка количества измерений состояния КД согласно формуле (4) будет пропорциональна квадрату параметра t_α , а также обратно пропорциональна количеству базисных состояний кудита и квадрату величины допустимой погрешности измерения состояния КД. В случае, когда величина Q , соответствующая количеству шаров в урне, будет равна произведению количества базисных состояний КД на заданную константу, значение нижней оценки количества измерений состояния КД будет согласно формуле (5) линейно зависеть от числа его базисных состояний.

Литература

1. Захаров В.М., Шалагин С.В. О развитии аппаратных средств статистического моделирования // Труды SoRuCom-2014. Третья Межд. конф. «Развитие вычислительной техники и ее программного обеспечения в России и странах бывшего СССР: история и перспективы» (г. Казань, 13–17 октября 2014 г.). – Казань: Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, 2014. – С. 109–114.
2. Соболев И.М. Численные методы Монте-Карло. – М.: Наука, 1973. – 312 с.
3. Qiskit 0.40.0 documentation. 2017–2023, Qiskit Development Team. Last updated on 2023/01/26. – Режим доступа: <https://qiskit.org/documentation/>
4. Прецизионный контроль эволюции состояний кудитов / Н.А. Богданова, Ю.И. Богданов, Ю.А. Кузнецов и др. // Наноиндустрия. 2020. Т. 13, № S5–3 (102). – С. 780–785.
5. Федоров А.К. Квантовые технологии: от научных открытий к новым приложениям // Фотоника. 2019. Т. 13, № 6. – С. 574–583.
6. Квантовая обработка информации: фундаментальные и прикладные аспекты / И.Б. Бобров, Н.А. Борщевская, И.В. Дьяконов и др. // Вооружение и экономика. 2020. № 2 (52). – С. 33–47.
7. Вычислительные задачи моделирования элементной базы квантовых компьютеров / Ю.И. Богданов, Н.А. Богданова, В.Ф. Лукичев и др. // Информационные технологии и вычислительные системы. 2013. № 3. – С. 3–14.
8. Bogdanov Y.I., Bogdanova N.A., Belinsky L.V., Lukichev V.F. Statistical Models and Adequacy Validation for Optical Quantum State Tomography with Quadrature Measurements // Russian Microelectronics. 2017. Vol. 46, № 6. – С. 371–378.
9. Шалагин С.В. Представление квантового преобразования Фурье на основе дискретной модели квантово-механической системы // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2020. Т. 35, № 4. – С. 7–12.

10. Пат. 2761771 Российская Федерация, МПК G06N 10/00 (2019.01), G06F 17/00 (2006.01). Способ выполнения квантовых вычислений с использованием кудитов / Киктенко Е.О., Николаева А.С., Федоров А.К.; заявитель и патентообладатель Общество с ограниченной ответственностью «Международный центр квантовой оптики и квантовых вычислений» (ООО «МЦКТ»). – № 2020143523; заявл. 28.12.2020; опубл. 13.12.2021. Бюл. № 35. – 23 с.

11. Вентцель Е.С. Теория вероятности и математическая статистика. – М.: Наука, 1969. – 576 с.

12. Кирьянов Б.Ф., Песошин В.А., Кузнецов В.М. Вычислительные машины и устройства на вероятностном принципе // Труды SoRuCom-2014. Третья Межд. конф. «Развитие вычислительной техники и ее программного обеспечения в России и странах бывшего СССР: история и перспективы», (г. Казань, 13–17 октября 2014 г.). – Казань: Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, 2014. – С. 161–166.

13. Яковлев В.В., Федоров Р.Ф. Стохастические вычислительные машины. – Л.: Машиностроение, 1974. – 344 с.

Поступила в редакцию 2 марта 2023 г.

UDC 004.942 519.233.33

DOI: 10.21779/2542-0321-2023-38-2-74–80

Stochastic Model of Measuring the State of Qudit

S.V. Shalagin

*Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev – KAI;
Russia, 420111, Kazan, Karl Marks st., 10; sshalagin@mail.ru*

Abstract. The qudit state calculation with d basic states is based on a given number of measurements determined using a stochastic model. This model is based on a box scheme with a return, including d groups of balls of a certain color. The number of measurements is determined based on the total number of balls in the box and the number of their groups. The dependence of lower estimate of the number of measurements on required accuracy and the given confidence probability of measuring the state of qudit, as well as on the number of its basic states d , is investigated. It is shown that increase in the number of basic states of the d qudit entails decrease in lower estimate of measurements quantity.

Keywords: qudit, box scheme, extraction frequency, quantity of measurements.

Received 2 March 2023