

## ФИЗИКА

УДК 533.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-42-52

**Д.В. Терешонок, Т.В. Чернышев**

### Двухчленное приближение и метод Монте-Карло: сравнение на примере электронов в аргоне

*Объединенный институт высоких температур РАН (ОИВТ РАН); 125412, Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 2; tereshonokd@gmail.com, thunarux@gmail.com*

В настоящей работе выполнен расчет локального нестационарного кинетического уравнения Больцмана (КУБ) двумя принципиально разными подходами (детерминистическим и стохастическим) для электронов в аргоне для трех значений приведенного электрического поля 10, 100, 1000. Представлено сравнение решений КУБ для изотропной и анизотропной частей функции распределения энергии электронов на основе двухчленного приближения и метода Монте-Карло. Показан диапазон значений приведенного электрического поля, где решения, полученные с помощью двух подходов, совпадают.

**Ключевые слова:** *кинетическое уравнение Больцмана, функция распределения, аргон, метод Монте-Карло, численное моделирование.*

#### Введение

Важным параметром для определения характеристик электронов и описания процессов с их участием в газоразрядной плазме является функция распределения скоростей/энергий электронов (ФРСЭ/ФРЭЭ). Для нахождения ФРСЭ/ФРЭЭ расчетно-теоретическим путем необходимо решить кинетическое уравнение Больцмана (КУБ). Существует два принципиально разных подхода решения КУБ – детерминистический и стохастический. Первый основан на конкретных данных о параметрах взаимодействия электрона с газом, второй – на идеях и методах теории вероятности. В литературе эти оба подхода [1; 2] широко представлены для моделирования функции распределения в газоразрядной плазме. Но при этом недостаточно уделено внимания вопросу, какой из них целесообразно использовать в той или иной постановке. Известно, что для лучшего описания статистики необходимо как можно больше частиц в статистическом ансамбле. С другой стороны, рост числа частиц требует больших вычислительных ресурсов и может привести к необоснованным затратам машинного времени. При этом стохастические подходы лишены такого недостатка, как ограничения в области больших электрических полей, в то время как детерминистические (подразумевающие представление ФРЭЭ в виде ряда членов разложения) основаны на предположении, что анизотропная часть ФРЭЭ существенно меньше изотропной, что хорошо выполняется в слабых электрических полях.

В настоящей работе на основе решения пространственно-однородного нестационарного КУБ для электронов в аргоне детерминистическим методом (двухчленное приближение) и стохастическим (метод Монте-Карло) получены ФРЭЭ в приведённых полях до 1 кТд. Показано, когда решения удовлетворительно согласуются между собой, и определена область приведённых полей, когда целесообразно использовать тот или иной подход.

### Детерминистический подход – двухчленная аппроксимация (ТТВ)

В общем случае кинетическое уравнение Больцмана в отсутствие магнитного поля для ФРСЭ имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) f + \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \nabla_{\mathbf{v}} f + S = 0, \quad (1)$$

$$n_e(\mathbf{r}, t) = \iint f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d\mathbf{v} d\mathbf{r}$$

где  $f$  – ФРСЭ;  $e, m$  – заряд и масса электрона;  $S$  – интеграл столкновений, соответствующий упругому и неупругому взаимодействию между частицами;  $n_e$  – концентрация электронов. Вывод уравнения Больцмана можно найти, например, в [3], частные случаи рассмотрены в [1; 4].

Один из способов упрощения КУБ состоит в предположении, что дрейфовая скорость электрона существенно меньше его хаотической, поэтому ФРСЭ можно разложить в ряд по сферическим функциям, например, по полиномам Лежандра с выделением симметричной части, которая зависит только от модуля скорости:

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(\cos \theta) f_k(v, \mathbf{r}, t), \quad (2)$$

где  $\theta$  – угол между электрическим полем  $\mathbf{E}$  и скоростью  $\mathbf{v}$ ,  $v \equiv |\mathbf{v}|$ . Подстановка (2) в (1) и умножение на  $P_k(\cos \theta)$  с последующим интегрированием по телесному углу  $d\Omega$  и с учетом ортогональности полиномов Лежандра, а также свойства

$$\mathbf{E} \nabla_r f = E \cos \theta_1 \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{E \sin^2 \theta_1}{v} \frac{\partial f}{\partial (\cos \theta_1)}, \quad (3)$$

( $E = |\mathbf{E}|$ ), дают цепочку уравнений для членов разложения ФРСЭ, которая может быть обрезана и ограничена только уравнениями для  $f_0$  и  $\mathbf{f}_1$ , если остальные члены малы. Тогда система в общем плане принимает вид (двуихчленное приближение [5]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \nabla \mathbf{f}_1 + \frac{e}{3mv^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E} \mathbf{f}_1) + S_0 &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + v \nabla f_0 + \frac{e \mathbf{E}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \mathbf{S}_1 &= 0 \\ n_e(\mathbf{r}, t) &= \iint 4\pi v^2 f_0(v, \mathbf{r}, t) dv. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим слабо ионизированный газ, то есть пренебрежем электронно-электронными и электрон-ионными столкновениями, и будем рассматривать для упругого взаимодействия только столкновения электронов с атомами.

При упругом столкновении с тяжелой частицей изменяется импульс электрона, но изменение энергии и, соответственно, модуля скорости незначительно. Учитывая это обстоятельство, а также то, что скорость электрона много больше скорости тяжелой частицы, распределение которой максвелловское с температурой  $T_0$ , интеграл упругих столкновений можно записать в виде уравнения Фоккера–Планка [6]:

$$S_{el} = -\frac{1}{2v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 \delta v_{el} \left[ v f_0 + \frac{kT_0}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right] \right\}, \quad (5)$$

где  $\delta = 2m/M$  – доля энергии, теряемая электроном при упругом столкновении с тяжелой частицей массы  $M$ . Частота упругих столкновений определяется

концентрацией фоновых частиц  $n_0$  (с которыми сталкивается электрон), скоростью налетающего электрона  $v$  и транспортным сечением  $\sigma_{tr}$ . Для нейтральных частиц значение  $\sigma_{tr}$  взято из эксперимента [7].

Выражение для интеграла столкновений  $S_1$  имеет вид [5]

$$S_1 = (v_{el} + v_{in}) \mathbf{f}_1 \quad (6)$$

и определяется суммарной частотой как упругих  $v_{el}$ , так и неупругих столкновений  $v_{in}$ .

Прежде чем перейти к записи интеграла столкновений для неупругих процессов, удобно привести  $S_{el}$  к иному виду, который будет использоваться для составления разностных схем при численном решении. Запишем систему уравнений (4) в единицах энергии (переход от ФРС к ФРЭ) путем выполнения перехода  $\varepsilon = \frac{m_e v^2}{2e}$  и нормировки  $4\pi v^2 f_0(v) dv = 2\pi \gamma^3 \varepsilon^{1/2} f_0(\varepsilon) d\varepsilon$  следующим образом [6]:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + \frac{\vec{v}}{v} \mathbf{f}_1, \\ \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\gamma}{3} \varepsilon^{1/2} \nabla \cdot \mathbf{f}_1 - \frac{\gamma}{3} \varepsilon^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon \mathbf{E} \mathbf{f}_1) + S &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial t} + \gamma \varepsilon^{1/2} \nabla f_0 - \mathbf{E} \gamma \varepsilon^{1/2} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + n_0 \sigma_m \gamma \varepsilon^{1/2} \mathbf{f}_1 &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ W f_0 - D \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right] + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (S_{in} + S_{ion}), \\ W &= -\gamma n_0 \varepsilon^2 \sigma_\varepsilon, \\ D &= \gamma n_0 \varepsilon^2 \sigma_\varepsilon \frac{k_B T_0}{e}, \end{aligned}$$

$\gamma = (2e/m_e)$ ,  $\varepsilon = (v/\gamma)^2$  (в единицах эВ),  $\sigma_\varepsilon = \frac{2m}{M} \sigma_{tr}$ ,  $\sigma_m$  – полное сечение. Учтено, что

заряд электрона отрицателен. В этом случае интеграл упругих столкновений записывается в дрейфово-диффузационном приближении вдоль оси энергии. Скорость  $W < 0$ , что указывает на движение к нулю и диффузию в область более высоких энергий.

Неупругие процессы описывают возбуждение электронных уровней  $S_{in}$  и ионизацию  $S_{ion}$ . Если не учитывать сверхупругое столкновение, т. е. когда столкновение электрона с возбужденной частицей приводит к тушению, то интеграл столкновений для возбуждения электронных уровней принимает вид

$$S_{in} = \gamma n_0 \sum_k \left[ \varepsilon \sigma_{[k]}(\varepsilon) f_0(\varepsilon) - (\varepsilon + \varepsilon_{[k]}^*) \sigma_{[k]}(\varepsilon + \varepsilon_{[k]}^*) f_0(\varepsilon + \varepsilon_{[k]}^*) \right], \quad (8)$$

где  $\varepsilon_{[k]}^*$  – энергетический порог  $k$ -го неупрого процесса.

Если учесть ионизационные потери, то уравнение несколько усложняется, что связано с образованием нового электрона и распределением оставшейся после ионизации энергии между налетающим и вторичным электронами [8]:

$$S_{ion} = \gamma n_0 \int_0^{\infty} f_0(\varepsilon_p) \varepsilon_p^{1/2} v_{ii}(\varepsilon_p, \min(\varepsilon, \varepsilon_p - I - \varepsilon)) d\varepsilon_p - f_0(\varepsilon) \varepsilon^{1/2} v_{ion}(\varepsilon), \quad (9)$$

$$v_{ii}(\varepsilon_p, \varepsilon_s) = n_0 v(\varepsilon) \sigma_{ii}(\varepsilon_p, \varepsilon_s), \quad v_{ion}(\varepsilon) = n_0 v(\varepsilon) \sigma_i(\varepsilon),$$

где  $\sigma_{ii}(\varepsilon_p, \varepsilon_s)$  – дифференциальное сечение ионизации, которое определяется распределением Опала [9; 10];  $I$ ,  $\sigma_i(\varepsilon)$  – потенциал и сечение ионизации;  $\varepsilon_p, \varepsilon_s$  – энергия первичных и вторичных электронов.

Уравнение для  $f_1$  можно упростить, если предположить, что в пространственно-однородном случае время релаксации  $f_1$  определяется значением  $\tau \sim 1/n_0 \sigma_m \gamma \varepsilon^{1/2}$ , которое, как правило, значительно меньше времени релаксации  $f_0$  и периода колебаний электрического поля ( $\sim 1/\omega$ ). Соответственно (7) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\gamma}{3} \varepsilon^{-1/2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (\varepsilon E f_1) + S = 0, \quad (10)$$

$$f_1 = \frac{E}{n_0 \sigma_m} \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}.$$

В этом случае, направив одну из осей координат вдоль электрического поля, мы получим только одну компоненту для  $E$ . Выражения для интеграла столкновений остаются такими же, как и в (7). Подставив второе уравнение из (10) в первое и приведя его к виду (7), получим:

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \left[ W f_0 - D \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} \right] + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} (S_{in} + S_{ion}) = 0, \quad (11)$$

$$W = -\gamma N \varepsilon^2 \sigma_\varepsilon,$$

$$D = \gamma N \varepsilon^2 \sigma_\varepsilon \frac{k_B T_0}{e} + \frac{\gamma}{3} \frac{\varepsilon E^2}{n_0 \sigma_m}.$$

Уравнение (11) решается неявным методом Кранка–Николсона со вторым порядком точности по времени и энергии, предварительно приведя (11) к трехдиагональной форме. Аппроксимация конвективно-диффузационного переноса выполняется в соответствии с [11].

### Стохастический подход – метод Монте-Карло (МСС)

Метод Монте-Карло столкновений (МСС, Monte-Carlo Collisions) – вариант стохастического подхода к решению уравнения Больцмана. МСС является частным случаем DSMC (*Direct Simulation Monte-Carlo*), когда взаимодействующие частицы можно разделить на две группы: активную часть и фон, такие как нагретые электроны и тяжелые ионы/атомы. Метод базируется на замене ФРС на сумму  $N$  дельта-функций (макро-частиц)

$$f(\mathbf{v}, t) \rightarrow \frac{1}{N} \sum_{\forall j} \delta(\mathbf{v}_j(t) - \mathbf{v}). \quad (12)$$

Затем (12) подставляется в (1). В результате получается система  $N$ -уравнений. Решение рассчитывается как последовательная эволюция системы  $t \rightarrow t + \delta t$ . Основной плюс такого подхода – это возможность аппроксимировать произвольный тип ФРС, включая сильно анизотропную и/или многопиковую. Основной недостаток –

неизбежный статистический шум и неточность представления в «хвосте» распределения.

При соблюдении ряда условий система уравнения для  $f(\mathbf{v},t)$  распадается на набор независимых уравнений. Для этого, во-первых, тепловой разброс скоростей фоновой компоненты должен быть незначительным в сравнении с характерными скоростями активных частиц. Во-вторых, время столкновений должно быть много меньше времени между ними (или длина свободного пробега много больше радиуса взаимодействия). В-третьих, за шаг счёта на каждую частицу должно приходиться менее одного столкновения. Отметим также, что МСС-схема не обеспечивает точного сохранения импульса системы, поэтому она применима только при условии, что передача импульса от активных частиц к фону незначительна (малая степень ионизации и/или большое отношение масс). При соблюдении этих условий расчет шага эволюции  $f(\mathbf{v},t)$  можно разбить на два этапа:

- 1) конвективный (плавное ускорение в электрическом поле) – **push-этап**;
- 2) диффузионный (столкновительные поправки к ФРС) – **МСС-этап**.

В нашем случае рассматривается пространственно-однородная система (нульмерная задача, нет зависимости от координат). Конвективный этап редуцируется до тривиального ускорения/замедления частиц в электромагнитном поле. Используется схема расщепления Бориса [12].

Диффузионный этап организован следующим образом. Каждый шаг времени, для каждой макро-частицы, численный код определяет  $k$ -тую частоту реакции как

$$r_{[k]} = |\mathbf{v} - \mathbf{u}_0| \sigma_{[k]}(\varepsilon), \quad (13)$$

где  $\mathbf{u}_0$  – потоковая скорость фона,  $\varepsilon = \frac{m}{2}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_0)^2$  – кинетическая энергия электрона и  $\sigma_{[k]}(\varepsilon)$  – сечение взаимодействия. Тогда вероятность  $k$ -той реакции определяется с помощью потока Пуассона [13]:

$$P_{[k]} = 1 - \exp(-n_0 r_{[k]} \delta t) \approx n_0 r_{[k]} \delta t.$$

Суммарные вероятности откладываются на единичный интервал:  $R_{[k]} = R_{[k-1]} + P_{[k]}$ , где  $R_{[0]} \equiv 0$ . Тогда конкретный процесс (или промах) определяется попаданием случайного числа  $R^* \in 0..1$  с равномерным распределением в соответствующий интервал.

Для всех типов рассеяния (кроме кулоновского) углы рассеяния при столкновении разыгрываются по методу [13]: этим обеспечивается условие, что при малых энергиях столкновения рассеяние происходит практически изотропно, а при больших – на малые углы. Потери энергии для неупругих процессов определяются порогом реакции. При этом в случае ионизации оставшаяся энергия делится между первичным и вторичным электронами согласно распределению Опала [10]. Для упругих процессов потеря энергии определяется углом рассеяния.

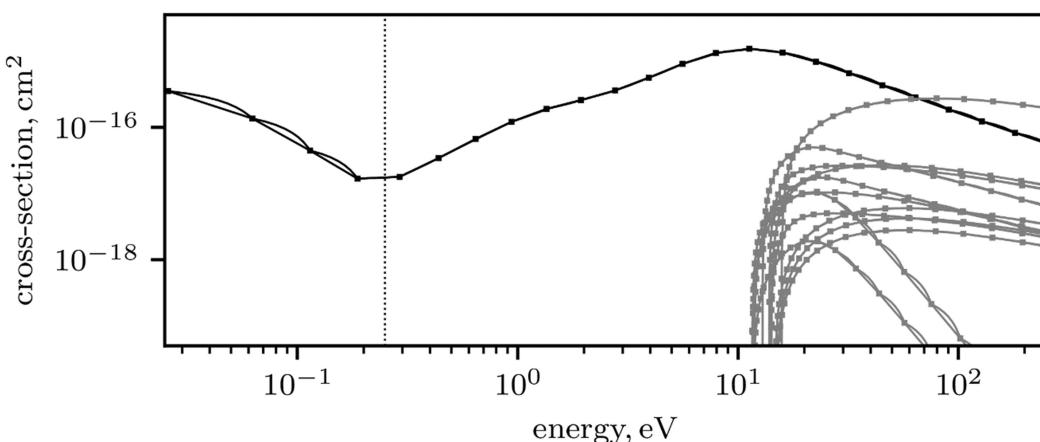
Для потенциальной возможности расчета произвольной смеси активных компонент и фона процесс расчета суммарных вероятностей управляет с помощью примитивной виртуальной машины на таблице переходов. Значения сечений, констант и типы проверок задаются в *json*-формате, из которого формируются соответствующие таблицы и микрокод для каждого типа активной компоненты.

Опорные значения сечений кешируются в таблицу с логарифмической шкалой энергий (по основанию  $\sqrt{2}$ ) и сдвигом вблизи нуля:  $\sigma(\varepsilon_{[j]} \text{eV}) = \sigma(2^{(j-8)/2} - 0.0625 + \varepsilon^*)$ , где  $j \in N$ ,  $\varepsilon^*$  – порог реакции. Для расчёта конкретных значений используется линейная интерполяция. Таким образом, обеспечиваются компактная запись сечений в широком

диапазоне энергий и достаточное число точек вблизи Рамзауэрсовского минимума и около пороговых энергий возбуждения/ионизации. Относительная ошибка между аналитическим и табличным представлением сечений не превышает  $\pm 5\%$ .

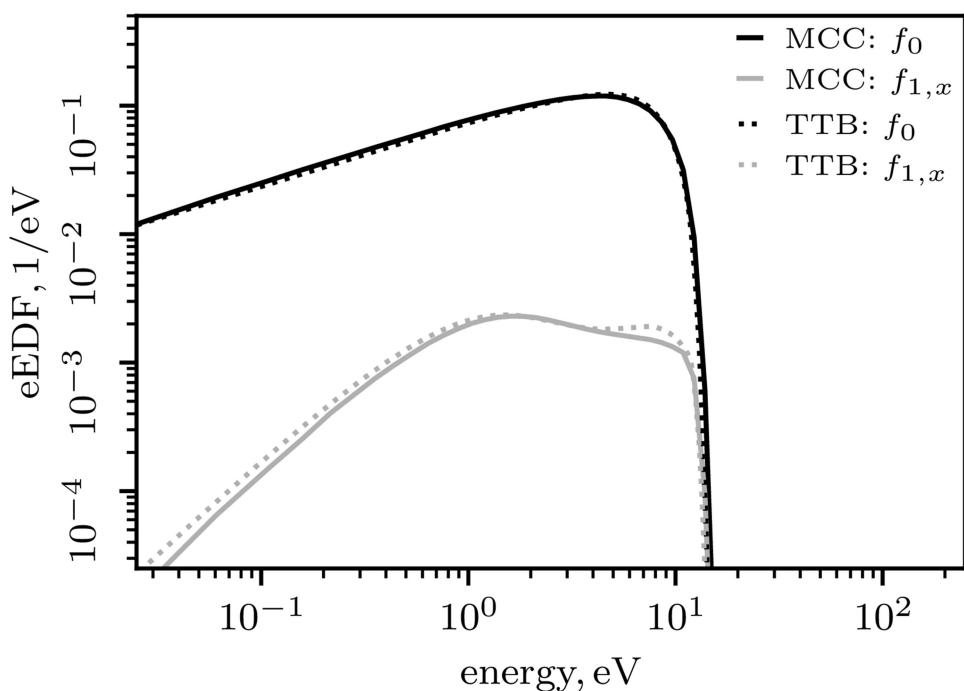
### Моделирование

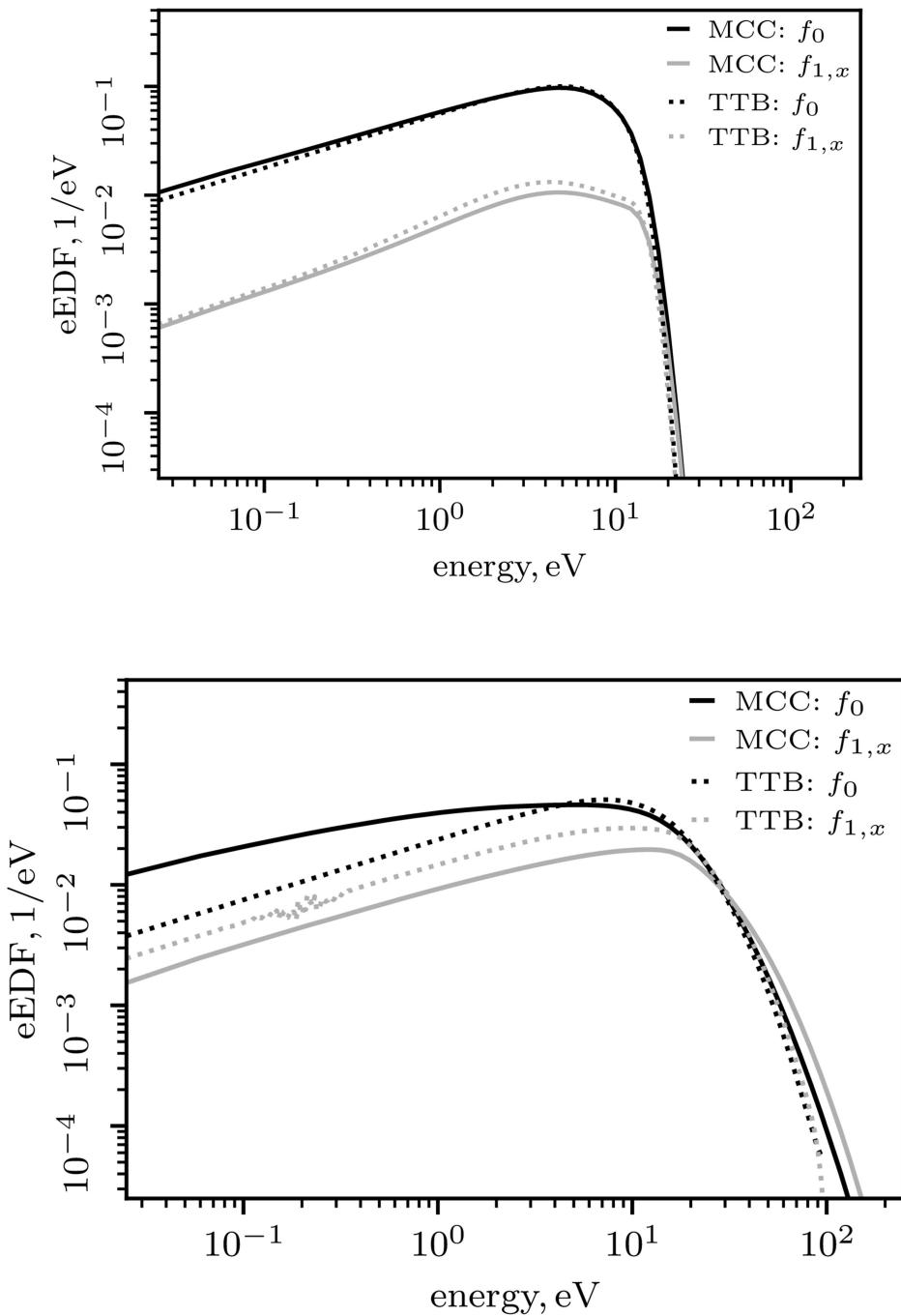
Стационарное значение ФРЭ находилось посредством выхода на стационарное решения локального нестационарного КУБ для электронного ансамбля в аргоне в качестве фонового газа в диапазоне приведённых полей от 10 до  $10^3$  Тд. Расчет учитывает упругие соударения с нейтральными частицами, прямую ионизацию и 11 уровней возбуждения аргона из основного состояния (рис. 1) [14]. Ступенчатая ионизация, столкновения второго рода, рекомбинация, электрон-ионные и электрон-электронные столкновения не рассматриваются, что характерно для малой степени ионизации. Расчет стартовал с начального состояния, соответствующего холодному ансамблю электронов с максвелловским распределением ( $T_0 = 0.5$  эВ). Через определенное время температура электронов прекращала расти и стабилизировалась около некоторого  $T_{eq}$ . Давление фонового газа принималось равным 10.13 кПа при температуре 300 К. Для обоих методов шаг по времени составлял  $\delta t = 0.1$  пс. Результаты расчёта усреднялись и записывались каждые 10 пс.



На рис. [Ошибка! Источник ссылки не найден.](#)–[Ошибка! Источник ссылки не найден.](#) приведены установившиеся ФРЭ (изотропная  $f_0$  и анизотропная компоненты  $f_1$ ), полученные с помощью МСС (сплошная линия) и ТТВ (пунктирная линия). Во всех случаях МСС-решения демонстрируют более выраженный хвост высоких энергий, чем ТТВ. Существует диапазон приведенных полей, где МСС- и ТТВ-решения сходятся,  $E/n_0 \in 5..500$  Тд (результаты настоящей работы и [15]). Для МСС температура согласуется с ТТВ-решением (с точностью 5 %). Частоты упругих столкновений сходятся с той же точностью. Верхний предел  $E/n_0 = 500$  Тд обусловлен тем, что  $|f_1|/f_0 > 1$ : это значит, что ТТВ *формально* становится некорректным, так как дрейфовая скорость превращается в сравнимую с тепловой (сильная анизотропия, рис. [Ошибка! Источник ссылки не найден.](#)). Однако от этого эффекта страдает только хвост распределения, что может быть неважно в ряде случаев. Т. е. верхний предел зависит от контекста задачи.

МСС-решения ниже  $\sim 5$  Тд значительно отличаются от ТТВ-решений (и  $f_0$ , и особенно  $f_1$ ). МСС-метод не позволяет корректно разрешить околопороговые процессы в слабом приведённом поле из-за спорадического характера хвоста высоких энергий, связанного с конечным размером ансамбля. Другими словами, только малое число частиц преодолевает порог реакции. И, соответственно, количество неупругих событий недостаточно, чтобы построить корректную статистику. Как результат, относительная ошибка между МСС- и ТТВ-решениями может быть более 100 %. Конкретная оценка зависит от порога реакции и характера изменения сечения. Для достижения необходимой точности в области малых полей необходимо существенно увеличить число частиц в статистическом ансамбле, что, в свою очередь, потребует значительного увеличения вычислительных ресурсов. Поэтому в области малых полей целесообразно использовать двухчленное приближение.





Результаты настоящей работы могут быть востребованы при анализе процессов начальной стадии развития разрядов на наносекундных временных масштабах. Например, при исследовании стримеров [17–23], наносекундных разрядов с щелевым катодом [24], пылевой плазмы в разряде [25; 26], начальной стадии искрового канала с выбросом материала катода [27–30]. Во всех этих примерах для нахождения констант элементарных процессов с участием электронов, как правило, решают стационарные локальные уравнения Больцмана в двухчленном приближении. При этом особо стоит отметить роль бегающих электронов [31], исследование которых принципиально невозможно в рамках двухчленного приближения.

### Выводы

1. МСС и ТТВ решения сходятся в ограниченном диапазоне приведенных полей. МСС плохо применим при  $E/n_0 < 5$  Тд. В условиях сильного поля ( $E/n_0 > 500$  Тд) нарушаются условия малой анизотропии, но только для хвоста распределения. Во всех случаях МСС-решения демонстрируют более выраженный хвост высоких энергий.
2. МСС-расчёт склонен завышать частоты реакций неупругих процессов вследствие спорадического характера хвоста распределения. Разница уменьшается с увеличением  $E/n_0$ , что согласуется с результатами [16].

*Работа поддержанна грантом РНФ (проект № 21-79-30062).*

### Литература

1. Raizer Y. Gas Discharge Physics. – Berlin: Springer-Verlag, 1991. – P. 463.
2. Byung Chan Eu. Boltzmann kinetic equation. In Kinetic Theory of Nonequilibrium Ensembles, Irreversible Thermodynamics, and Generalized Hydrodynamics. Vol. 1: Nonrelativistic Theories. – Springer International Publishing, 2016. – P. 61–136.
3. Holstein T. Distribution of Electrons in High Frequency Gas Discharges // Phys. Rev. 1946. Vol. 70. – P. 367.
4. Smirnov B.M. Plasma Processes and Plasma Kinetics. – Berlin: Wiley – V C H, 2007.
5. Гинзбург В.Л., Гуревич А.В. Нелинейные явления в плазме, находящейся в переменном электромагнитном поле // УФН. 1960. Т. 70, № 2. – С. 201–246.
6. Hagelaar G.J.M. and Pitchford L.C. Solving the Boltzmann equation to obtain electron transport coefficients and rate coefficients for fluid models // Plasma Sources Sci. Technol. 2005. Vol. 14. – P. 722.
7. Смирнов Б.М. Свойства газоразрядной плазмы. – СПб.: Политехнический ун-т, 2010. – С. 355.
8. Коновалов В.П. Деградационный спектр электронов в азоте, кислороде и воздухе // Журнал технической физики. 1993. Т. 63, № 3. – С. 23–33.
9. Opal C.B., Peterson W.K. and Beaty E. C. Measurements of Secondary Electron Spectra Produced by Electron Impact Ionization of a Number of Simple Gases // J. Chem. Phys. 1971. Vol. 55, no. 2. – P. 4100–4106.
10. Opal C.B., Beaty E.C. and Peterson W.K. Tables of secondary-electron-production cross sections // Atomic Data and Nuclear Data Tables. 1972. Vol. 4. – P. 209–253.
11. Scharfetter D.L. and Gummel H.K. Large-signal analysis of a silicon Read diode oscillator // IEEE Trans. Electron. Devices. 1969. Vol. 16. – P. 64–77.
12. Boris J.P. Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code // In Proceeding of 4<sup>th</sup> Conference on Numerical Simulations of Plasmas, 1970.
13. Surendra M., Graves D.B. and Morey I.J. Electron heating in low-pressure rf glow discharges // Applied Physics Letters. 1990. Vol. 56, no. 11. – P. 1022–1024.
14. Petrov G.M., Giuliani J.L. and Dasgupta A. Electron energy deposition in an electron-beam pumped KrF amplifier: Impact of beam power and energy // J. Appl. Phys. 2002. Vol. 91, no. 5. – P. 2663–2677.

15. Терешонок Д.В., Чернышев Т.В. Электронный ансамбль в аргоне: двухчленное приближение уравнения Больцмана и метод Монте-Карло (сравнение) // XIV Международная научно-техническая (заочная) конференция «Низкотемпературная плазма в процессах нанесения функциональных покрытий» (г. Казань, 2–4 ноября, 2022).
  16. Turner M.M. Numerical effects on energy distribution functions in particle-in-cell simulations with Monte Carlo collisions: choosing numerical parameters // Plasma Sources Science and Technology. 2013. Vol. 22, no 5. – P. 05500.
  17. Курбанисмаилов В.С., Терешонок Д.В., Рагимханов Г.Б., Халикова З.Р. Начальные стадии формирования импульсного разряда в промежутке с геометрией острье–плоскость в предварительно ионизированном аргоне // Письма в ЖТФ. 2022. Т. 48, № 5. – С. 43.
  18. Tereshonok D.V., Babaeva N.Y., Naidis G.V., Abramov A.G. and Uglyumov A.V. Modeling of Ionization Waves in Atmospheric-Pressure Argon in a Long Gap // IEEE Transactions on Plasma Science. 2022. Vol. 50, no. 3. – P. 580–586.
  19. Kurbanismailov V.S., Oмаров О.А., Рагимханов Г.Б. and Терешонок Д.В. Development of ionization waves in argon at atmospheric pressure with inhomogeneous preliminary ionization // EPL. 2018. Vol. 123. – P. 45001.
  20. Курбанисмаилов В.С., Омаров О.А., Рагимханов Г.Б., Терешонок Д.В. Исследование наносекундного разряда в аргоне при атмосферном давлении с предварительной ионизацией // Письма в ЖТФ. 2019. Т. 45, № 2. – С. 6.
  21. Chng T.L., Brisset A., Jeanney P., Starikovskaya S.M., Adamovich I.V. and Tardiveau P. Electric field evolution in a diffuse ionization wave nanosecond pulse discharge in atmospheric pressure air // Plasma Sources Sci. Technol. 2019. Vol. 28, no. 9. Art. no. 09LT02.
  22. Nijdam S., Teunissen J., and Ebert U. The physics of streamer discharge phenomena // Plasma Sources Sci. Technol. 2020. Vol. 29, no. 10. Art. no. 103001.
  23. Babaeva N.Y. and Naidis G.V. Universal nature and specific features of streamers in various dielectric media // J. Phys. D: Appl. Phys. 2021. Vol. 54, no. 22. Art. no. 223002.
  24. Аиурбеков Н.А., Иминов К.О., Шахсинов Г.Ш., Закарьяева М.З. Исследование динамики формирования пространственного распределения основных параметров плазменного источника на основе наносекундного разряда с протяженным полым катодом в аргоне // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2020. Т. 35, № 3. – С. 81–91.
  25. Shubo Li, Rabadanov K.M., Bogdanov E.A., Kudryavtsev A.A., Ashurbekov N.A., Chengxun Yuan and Zhongxiang Zhou. Features of the EEDF formation in the dusty plasma of the positive column of a glow discharge // Plasma Sources Science and Technology. 2021. Vol. 30, no 4. – P. 047001.
  26. Аиурбеков Н.А., Рамазанов И.Г., Рабаданов К.М. Формирование функции распределения электронов по энергии в плазме ВЧ разряда в присутствии микрочастиц // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2021. Т. 36, № 4. – С. 20–27.
  27. Курбанисмаилов В.С., Майоров С.А., Омаров О.А., Рагимханов Г.Б. Оптические и кинетические характеристики импульсного разряда в гелии с парами железа при атмосферном давлении // Журнал технической физики. 2019. Т. 89, № 3. – С. 384–387.
  28. Курбанисмаилов В.С., Майоров С.А., Омаров О.А., Рагимханов Г.Б., Халикова З.Р. Кинетические и оптические характеристики импульсного разряда в гелии в
-

режиме распыления материала катода // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2020. Т. 35, № 4. – С. 51–62.

29. Parkevich E.V., Medvedev M.A., Ivanenkov G.V., Khirianova A.I., Selyukov A.S., Agafonov A.V., Korneev Ph.A., Gus'kov I.S.Y and Mingaleev A.R. Extremely fast formation of anode spots in an atmospheric discharge points to a fundamental ultrafast breakdown mechanism // Plasma Sources Sci. Technol. 2019. Vol. 28. – P. 9103007.

30. Курбанисмаилов В.С., Рагимханов Г.Б., Халикова З.Р. Процессы расширения плазмы катодного факела в высоковольтном разряде в Не высокого давления // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2021. Т. 36, № 4. – С. 13–19.

31. Tarasenko V. Runaway electrons in diffuse gas discharges // Plasma Sources Sci. Technol. 2020. Vol. 29, no. 3. – Art. no. 034001.

*Поступила в редакцию 11 ноября 2022 г.*

УДК 533.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-42-52

## **Two-term Boltzmann Approximation and Monte-Carlo Method: Comparison for Electrons in Argon**

**D.V. Tereshonok and T.V. Chernyshev**

*Joint Institute for High Temperatures of Russian Academy of Sciences (JIHT RAS);  
Izhorskaya st. 13, Bd. 2, Moscow, Russia, 125412; tereshonokd@gmail.com,  
thunarux@gmail.com*

In this work we solved the local unsteady Boltzmann kinetic equation (BKE) by two fundamentally different approaches (deterministic and stochastic) for electrons in argon for three values of the reduced electric field 10, 100, 1000Td. Comparison of BKE solution for the isotropic and anisotropic parts of the electron energy distribution function based on the two-term approximation and Monte Carlo method is presented. The range of the reduced electric field where obtained solutions by two approaches coincide is presented.

**Keywords:** *Boltzmann kinetic equation, distribution function, argon, Monte-Carlo method, numerical simulation.*

*Received 11 November 2022*