

УДК 517.9+43

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-36-41

М.К. Ризаев**Об оценке определителя Фредгольма одного интегрального оператора**

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала,
ул. М. Гаджиева, 43а; rizaev.56@mail.ru

В работе рассматривается вопрос оценки определителя Фредгольма ядра одного интегрального оператора, имеющего самые различные приложения в широком круге задач анализа, математической физики, механики. В процессе исследований спектральных свойств самосопряжённых операторов квантовой механики в импульсном представлении были изучены свойства интегральных операторов рассматриваемого в работе вида оператора. Собственные числа данного оператора являются корнями определителя Фредгольма его ядра.

Ключевые слова: спектр, интегральный оператор, определитель Фредгольма, ядро оператора, гамильтониан, неравенство Адамара.

Введение

Пусть функция $v(\vec{x})$ определена на R^3 и удовлетворяет условию

$$|v(\vec{x})| \leq c_0(1 + |\vec{x}|)^{-\alpha}, \quad (1)$$

где $c_0 > 0$, $\alpha > 3$ – некоторые постоянные. В общем случае не исключено, что $v(\vec{x})$ принимает и комплексные значения.

Рассмотрим интегральный оператор K , порождаемый равенством

$$f(\vec{x}) = K\varphi(\vec{x}) = \int_{R^3} K(\vec{x}, \vec{y})\varphi(\vec{y}) d\vec{y}, \quad (2)$$

с ядром вида

$$K(\vec{x}, \vec{y}; s, z) = \frac{s + z}{(|\vec{y}|^2 + s)(|\vec{y}|^2 - z)} [v(\vec{x} - \vec{y}) - \\ - \frac{1}{s+z} \int_{R^3} \frac{v(\vec{x}-\vec{y})v(\vec{u}-\vec{y})(|\vec{y}|^2+s)}{|\vec{u}|^2+s} d\vec{u}], \quad (3)$$

где $s > 0$, $z \notin (0, +\infty)$, $s + z \neq 0$ на подпространстве функций

$$D(K) = \left\{ \varphi \in L^2(R^3) \left| \int_{R^3} (1 + |\vec{x}|^2)^2 |\varphi(\vec{x})|^2 d\vec{x} < \infty \right. \right\} \quad (4)$$

гильбертова пространства $L^2(R^3)$.

Интегральные операторы вида (2) встречаются в вопросах математической физики, задачах анализа, квантовой механики. При исследовании спектральных свойств гамильтонианов квантовой механики в импульсном представлении унитарное преобразование Фурье искомым операторов приводит к рассмотрению операторов типа (2) [1; 2]. При построении и изучении резольвент импульсных представлений операторов квантовой механики необходимо исследовать решение уравнений вида

$$\varphi|\vec{x}| + K\varphi|\vec{x}| = g|\vec{x}|$$

в соответствующих подпространствах функций [1; 5].

Для решения интегральных уравнений Фредгольма второго рода – приведённого вида – применяется известный метод определителей Фредгольма. Преимущество этого

метода состоит в том, что особые точки оператора, при которых решение не существует, – это нули определителя Фредгольма, являющегося целой функцией от входящего в ядро параметра [4; 5].

1. Оценка функции, порождающей ядро оператора

Введём в рассмотрение функцию

$$w(\vec{x}, \vec{y}; s, z) = v(\vec{x} - \vec{y}) - \frac{1}{s+z} \int_{R^3} \frac{v(\vec{x}-\vec{y})v(\vec{u}-\vec{y})(|\vec{y}|^2+s)}{|\vec{u}|^2+s} d\vec{u}, \quad (5)$$

зависящую от двух векторов $\vec{x}, \vec{y} \in R^3$ и числовых параметров s и z . Как нетрудно увидеть,

$$R(\vec{x}, \vec{y}; s, z) = \frac{s+z}{(|\vec{y}|^2+s)(|\vec{y}|^2-z)} w(\vec{x}, \vec{y}; s, z). \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть функция $v(\vec{x})$ удовлетворяет условию (1), $s \geq 1$, $s+z \neq 0$ и

$$C_1 = \int_{R^3} |v(\vec{x})| d\vec{x}.$$

Тогда для функции $w(\vec{x}, \vec{y}; s, z)$, определённой согласно (5), на R^6 имеет место оценка

$$|w(\vec{x}, \vec{y}; s, z)| \leq |v(\vec{x} - \vec{y})| + C_1 \frac{C_0}{|s+z|}. \quad (7)$$

Доказательство. Введём функцию

$$\rho(\vec{u}, \vec{y}; s) = \frac{v(\vec{u}-\vec{y})(|\vec{y}|^2+s)}{|\vec{u}|^2+s}.$$

Положив $\vec{y} - \vec{u} = \vec{h}$, согласно условию (1) мы придём к неравенству

$$|\rho(\vec{u}, \vec{y}; s)| \leq C_0(1 + |\vec{h}|)^{-a} \left(1 + \frac{2|\vec{u}||\vec{h}| + |\vec{h}|^2}{|\vec{u}|^2+s}\right). \quad (8)$$

Если $|\vec{u}| \leq 1$, то в силу условия $s \geq 1$ при любом $\vec{h} \in R^3$ имеем, что

$$1 + \frac{2|\vec{u}||\vec{h}| + |\vec{h}|^2}{|\vec{u}|^2+s} \leq (1 + |\vec{h}|)^2. \quad (9)$$

Следовательно, согласно (1), (8), (9) мы придём к неравенству

$$|\rho(\vec{u}, \vec{y}; s)| \leq C_0(1 + |\vec{h}|)^{-a+2},$$

откуда

$$|\rho(\vec{u}, \vec{y}; s)| \leq C_0. \quad (10)$$

Пусть теперь $|\vec{u}| > 1$. Поскольку в этом случае имеют место очевидные неравенства

$$2|\vec{h}| + |\vec{h}|^2/|\vec{u}| \leq (1 + |\vec{h}|^2) - 1, \quad |\vec{u}| + s/|\vec{u}| > 1$$

для любого вектора $\vec{h} \in R^3$, то справедливо соотношение

$$\frac{2|\vec{h}| + |\vec{h}|^2/|\vec{u}|}{|\vec{u}| + s/|\vec{u}|} \leq (1 + |\vec{h}|^2) - 1.$$

В силу очевидности равенства

$$\frac{2|\vec{u}||\vec{h}| + |\vec{h}|^2}{|\vec{u}|^2 + s} = \frac{2|\vec{h}| + |\vec{h}|^2/|\vec{u}|}{|\vec{u}| + s/|\vec{u}|}$$

из последнего неравенства получаем, что

$$\frac{2|\vec{u}||\vec{h}| + |\vec{h}|^2}{|\vec{u}|^2 + s} \leq (1 + |\vec{h}|^2) - 1$$

при $|\vec{u}| > 1$ и любом векторе $\vec{h} \in R^3$.

В этом случае имеет место неравенство (9), из которого согласно (1), (8) получается неравенство (10).

Итак, нами обосновано, что для любых двух векторов $\vec{u}, \vec{y}$ из R^3 при $s \geq 1$ справедливо неравенство (10).

Согласно соотношению (5) и определению функции w имеем очевидное неравенство

$$|w(\vec{x}, \vec{y}; s, z)| \leq |v(\vec{x} - \vec{y})| + \frac{1}{|s + z|} \int_{R^3} |v(\vec{x} - \vec{u})| \left[\max_{\vec{u}} |\rho(\vec{u}, \vec{y}; s)| \right] d\vec{u}$$

и

$$\int_{R^3} |v(\vec{x} - \vec{u})| d\vec{u} = \int_{R^3} |v(\vec{u})| d\vec{u} = C_1, \quad \forall \vec{x} \in R^3.$$

Согласно неравенству (10) мы получим требуемое соотношение (7), что и требовалось доказать.

В силу того, что согласно (1) справедливо неравенство

$$|v(\vec{x} - \vec{y})| \leq C_0, \quad \vec{x}, \vec{y} \in R^3,$$

из доказанной теоремы следует

$$|w(\vec{x}, \vec{y}; s, z)| \leq C_0 \left(1 + \frac{C_1}{|s + z|} \right), \quad \vec{x}, \vec{y} \in R^3. \quad (11)$$

Обратим внимание на следующий факт: в случае абсолютной интегрируемости функции $v(\vec{x})$ на R^3 полученные оценки (7) и (11) справедливы и при $\alpha > 2$.

При постоянных значениях числовых параметров s и z функция $w(\vec{x}, \vec{y}; s, z)$ зависит от двух векторов и задана на пространстве R^3 . На неограниченном его пространстве

$$\vec{x} - \vec{y} = \vec{u} = \text{const.}$$

Искомая функция $v(\vec{x}, \vec{y})$, следовательно, и функция $w(\vec{x}, \vec{y}; s, z)$ принимают одно и то же значение. Поэтому не удастся получить более тонкие оценки, нежели полученные (7) и (11).

2. Оценка определителя Фредгольма ядра оператора

Рассмотрим функциональный определитель со стандартным обозначением [4; 6].

$$K \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(\vec{x}_1, \vec{x}_1) & K(\vec{x}_1, \vec{x}_2) & \dots & K(\vec{x}_1, \vec{x}_n) \\ K(\vec{x}_2, \vec{x}_1) & K(\vec{x}_2, \vec{x}_2) & \dots & K(\vec{x}_2, \vec{x}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\vec{x}_n, \vec{x}_1) & K(\vec{x}_n, \vec{x}_2) & \dots & K(\vec{x}_n, \vec{x}_n) \end{vmatrix}. \quad (12)$$

Интеграл $\Delta_n(z, s)$ от данного определителя

$$\Delta_n(z, s) = \int_{(R^3)^n} K \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix} \prod_{i=1}^n d\vec{x}_i \quad (13)$$

называется в математической литературе для краткости также определителем. Заметим, что в (12), (13) определители и функции зависят и от числовых параметров z и s .

Аналогично по формуле (12) введен определитель

$$\mathcal{W} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix},$$

порождаемый функцией $\mathcal{W}(\vec{x}, \vec{y}; z, s)$, которая задается формулой (5). Согласно (5), (12), (13) имеет место равенство

$$K \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix} = (s+z)^n \frac{\mathcal{W} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_n \end{pmatrix}}{\prod_{i=1}^n [(|\vec{x}_i|^2 - z)(|\vec{x}_i|^2 - s)]}. \quad (14)$$

Теорема 2. Пусть $\mathbb{C}$ есть комплексная плоскость, вещественный параметр $s \geq 1$ и функция $v(x)$ удовлетворяет условию (1). Тогда определитель $\Delta_n(z, s)$ как функция z при фиксированном s при любом натуральном числе n непрерывна по комплексной переменной z в области $\mathbb{C} \setminus (0; +\infty)$, аналитична в области $\mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$ и при $z = -\tau \in (-\infty, 0]$ справедлива оценка

$$\Delta_n(z, s) \leq \left[2\pi^2 c_0 \left(|\sqrt{s} - \sqrt{\tau}| + \frac{c_1}{\sqrt{s} + \sqrt{\tau}} \right) \right]^n n^{n/2}. \quad (15)$$

Доказательство. Непрерывность определителя – функции по аргументу z , следует из общих предложений анализа о непрерывности несобственных интегралов с параметрами [6]. Аналитичность $\Delta_n(z, s)$ в области $\mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$ следует из аналитичности подынтегральной функции в рассматриваемой области и равномерной сходимости самого интеграла, определяющего $\Delta_n(z, s)$ на любом ограниченном компакте из $\mathbb{C} \setminus [0; +\infty)$ [7; 8]. Поэтому достаточно обосновать неравенство (15).

Согласно неравенству Адамара [5; 6] для определителя, порожденного функцией $w(\vec{x}, \vec{y}; s, z)$, имеет место оценка

$$\left| w \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n \\ \vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n \end{pmatrix} \right| \leq \left[\max_{\vec{x}_1, \vec{y}_1} |w(\vec{x}, \vec{y}; s, z)| \right]^n n^{\frac{n}{2}}.$$

В силу следствия из теоремы 1 неравенства (11) из полученной оценки имеем, что

$$\left| w \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n \\ \vec{x}_1 \vec{x}_2 \dots \vec{x}_n \end{pmatrix} \right| \leq \left[c_0 \left(1 + \frac{c_1}{|s+z|} \right) \right]^n n^{\frac{n}{2}}, \quad s+z \neq 0.$$

Следовательно, согласно (12), (13) при $z = -\tau \in (-\infty, 0)$, $s - \tau \neq 0$ мы для определения $\Delta_n(-\tau, s)$ получим оценку

$$|\Delta_n(-\tau, s)| \leq B(\tau, s, n) \int_{(R^3)} \prod_{i=1}^n \frac{d\vec{x}_i}{(|\vec{x}_i|^2 + \tau)(|\vec{x}_i|^2 + s)},$$

где

$$B(\tau, s, n) = |s - \tau|^n c_0^n \left(1 + \frac{c_1}{|s - \tau|} \right)^n n^{\frac{n}{2}}.$$

Полученное неравенство можно записать в виде

$$|\Delta_n(-\tau, s)| \leq B(\tau, s, n) \left[\int_{R^3} \frac{d\vec{x}_1}{(|\vec{x}_1|^2 + \tau)(|\vec{x}_1|^2 + s)} \right]^n. \quad (16)$$

Заметим, что при $R > 0$ и $x_i \in R^1$ имеет место равенство [6]

$$\int \dots \int_{\sum_{i=1}^n x_i^2 < R} f \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \right) \prod_{i=1}^n dx_i = 2 \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^R z^{n-1} f(z) dz, \quad (17)$$

где $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ – гамма-функция Эйлера.

Из соотношения (17) непосредственно следует, что

$$\int_{R^3} \frac{d\vec{x}}{(|\vec{x}|^2 + s)(|\vec{x}|^2 - z)} = 2\pi^2 \left(\frac{\sqrt{s} + i\sqrt{z}}{s + z} \right).$$

Следовательно,

$$\int_{R^3} \frac{d\vec{x}}{[(|\vec{x}|^2 + s)(|\vec{x}|^2 - z)]} = \frac{2\pi^2}{\sqrt{s} + \sqrt{z}}, s > 0, \tau > 0 \quad (18)$$

Оценка (16) и последнее равенство (18) подтверждают справедливость требования обосновать равенство (15).

Теорема доказана.

Определитель Фредгольма интегрального оператора (2) есть сумма ряда

$$D(z, s) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \Delta_n(z, s). \quad (19)$$

Непосредственным следствием теоремы 2 является следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда определитель Фредгольма $D(z, s)$ оператора (2) при любом вещественном $s \geq 1$ как функция комплексного аргумента z аналитичен в комплексной плоскости с разрезом по положительной части вещественной оси и при $z = -\tau \in (-\infty, 0]$ имеет место оценка

$$|D(z, s) - 1| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[2\pi^2 c_0 \left(|\sqrt{s} - \sqrt{\tau}| + \frac{c_1}{\sqrt{s} + \sqrt{\tau}} \right) \right]^n}{n!} n^{\frac{n}{2}}. \quad (20)$$

Доказательство. Аналитичность определителя Фредгольма $D(z, s)$ в области $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ следует из равномерной сходимости ряда (19) при выполнении оценки (15) и аналитичности определителей $\Delta_n(z, s)$ при фиксированном $s \geq 1$ в области $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$. Точно так же $D(z, s)$ непрерывна на множестве $\mathbb{C} \setminus (0, +\infty)$. Оценка (20) является очевидным следствием неравенства (15).

Теорема доказана.

Полученная оценка (20) приведена и в работе автора [10]. Подобного вида соотношения используются в задачах исследования спектральных характеристик и в построении резольвент интегральных операторов [11]. Объясняется данный факт тем, что собственные значения подобного рода операторов являются нулями их определителей Фредгольма [4; 5]. В тех случаях, когда рассматриваемый оператор является асимптотически малым возмущением другого оператора с известными спектральными характеристиками, для исследования свойств искомого возмущения, используются методы теории возмущений операторов [2; 3; 12].

Литература

1. Фадеев Л.Д. Математические вопросы квантовой теории рассеяния для систем трех частиц // Труды МИАН им. В.И. Стеклова. – М.; Л., 1963. Т. 69. – 124 с.
2. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
3. Маслов В.П. Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 166 с.
4. Коспochenко А.Г., Саргсян И.С. Распределение собственных значений. – М.: Наука, 1979. – 400 с.
5. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 592 с.

6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1968. Т. III. – 656 с.
7. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. – М.: Физмат, 1976. Ч. 1. – 320 с; ч. II. – 400 с.
8. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
9. Ризаев М.К. Оценка ядра регуляризованного импульсного представления гамильтониана квантовой частицы во внешнем поле // Сборник материалов II Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий». – Махачкала: Издательство ДГУ, 2021. – С. 141–144.
10. Ризаев М.К. Оценка определителя Фредгольма одного интегрального уравнения // Сборник материалов III Всероссийской конференции с международным участием «Актуальные проблемы математики и информационных технологий». – Махачкала: Издательство ДГУ, 2022. – С. 169–171.
11. Ризаев М.К. Построение резольвенты импульсного представления гамильтониана квантовомеханической системы с вырожденным внешним полем // Актуальные вопросы математики и смежные вопросы. Сборник научных трудов межвузовского семинара. – Махачкала: Издательство ДГУ, 2017. – С. 77–79.
12. Ризаев М.К. Приложение метода стационарной теории возмущений к вычислению критических нагрузок в задаче продольного изгиба стержня // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер.: Естественные науки. 2020. Т. 35, вып. 3. – С. 24–30.

Поступила в редакцию 19 ноября 2022 г.

UDC 517.9+43

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-36–41

On the Evaluation of the Fredholm Determinant of One Integral Operator

M.K. Rizaev

¹*Dagestan State University; Russia, 367001, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; rizaev.56@mail.ru*

The paper considers the issue of evaluating the Fredholm determinant of the kernel of one integral operator, which has a variety of applications in a wide range of problems of analysis, mathematical physics, mechanics. The study of the spectral properties of self-adjoint operators of quantum mechanics in the pulse representation leads to the study of the properties of integral operators of the type of operator considered in the work. The eigenvalues of the given operator are the roots of the Fredholm determinant of its kernel.

Keywords: *spectrum, integral operator, Fredholm determinant, operator kernel, Hamiltonian, Hadamard inequality.*

Received 19 November 2022