УДК 519.86

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-30–35

Е.С. Магомедова[1], Р.И. Магомедов[2]

Стохастическая модель гонки вооружений

[1] Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; magomedova.e.s@mail.ru;

[2] Информационно-аналитическое управление Министерства строительства Республики Дагестан; Россия, 367000, г. Махачкала, пр. Имама Шамиля, 58а; magomedov.ri@dagestan.digital

В работе на основе простейшей модели гонки вооружений двух недружественных стран в виде системы двух дифференциальных уравнений составлена система двух дифференциальных стохастических уравнений с помощью ввода случайных величин, подчиняющихся марковскому стохастическому процессу с переходными функциями плотности вероятностей. Эти функции удовлетворяют дополнительным условиям сильной непрерывности. В результате составлены стохастические дифференциалы марковских случайных величин. Полученные дифференциалы прибавлены к уравнениям системы простейшей модели. В результате построена система дифференциальных стохастических уравнений. Полученная стохастическая система записана в векторной форме в общем виде, в котором применяются приемы движения по плоскости векторных точек, представляющих недружественные страны.

Посредством нужных вычислений по принципу построения уравнения Колмогорова для стохастических процессов векторное стохастическое дифференциальное уравнение сведено к уравнению параболического типа, коэффициенты которого могут быть дважды непрерывно дифференцируемыми.

Для функции плотности вероятностей вооружений недружественных стран сформулирована постановка смешанной задачи с начальным и граничным условиями на любом пространстве накопления вооружений недружественных стран.

Ключевые слова: *модель, недружественные страны, наращивание вооружений, стохастика, гонка вооружений, сильная непрерывность, переходная функция плотности вероятностей.*

Предположим, что две недружественные страны выделяют для своих вооруженных сил средства $x(t)$ и $y(t)$ соответственно с учетом политико-экономических состояний этих стран. Скорости изменения средств вооружений запишем в виде системы дифференциальных уравнений, полагая, что эти страны имеют политические претензии к друг другу и увеличивают средства на величины a и b соответственно. В результате можем записать систему дифференциальных уравнений в виде

$$\begin{cases} x' = \alpha y - \gamma x + a \\ y' = \beta x - \delta y + b \end{cases}, \tag{1}$$

где α, β, γ, δ – положительные постоянные величины, a и b показывают увеличение выделяемых средств из своих бюджетов на дополнительное вооружение в зависимости от угроз.

Если учесть, что уровень затрат обеих стран на вооружение зависит от времени, то получим начальные условия (2) [1]:

$$x|_{t=0} = x_0; y|_{t=0} = y_0; x_0, y_0 \geq 0. \quad (2)$$

В общем случае правые части системы (1) обозначим через F = F(x(t), y(t)), Ф = Ф (x(t), y(t)). Тогда систему (1) можно записать в виде

$$\begin{cases} x'_t = F(x(t), y(t), t) \\ y'_t = \Phi(x(t), y(t), t) \end{cases}, \quad (3)$$

считая эти функции известными. Запишем (3) в дифференциалах

$$\begin{cases} dx = F(x, y, t)dt \\ dy = \Phi(x, y, t)dt \end{cases}. \quad (4)$$

Значения функций F и Ф можно посчитать статистически. В дальнейшем будем считать их гладкими, для того чтобы их можно было дифференцировать.

В реальности из-за возникновения угроз и подозрений по отношению к друг другу описанная ситуация может принять случайный характер. Для математического описания такого явления введем в рассмотрение случайные величины $X(t)$ и $Y(t)$. Эти величины означают количество дополнительных средств, выделяемых из бюджета каждой страны к моменту времени t, а через некоторое время $t + dt$ эти случайные величины будут составлять $X(t + dt)$ и $Y(t + dt)$ соответственно, где dt – малый промежуток времени. Тогда величины $dX = X(t + dt) - X(t)$ и $dY = Y(t + dt) - Y(t)$ выражают случайные средства, выделяемые из бюджета недружественной страны за промежуток времени dt. Эти величины считаются стохастическими дифференциалами и не являются дифференциалами в обычном смысле [2–5].

Добавив стохастические дифференциалы к уравнениям системы (4) соответственно, получим

$$\begin{cases} dx = F(x, y, t) + dX \\ dy = \Phi(x, y, t) + dY \end{cases}. \quad (5)$$

Система (5) называется системой стохастических дифференциальных уравнений [2–5].

В более общем виде, когда в гонке вооружений участвуют несколько стран, систему (5) можно записать так:

$$\begin{cases} dx = Fdt + GdX \\ dy = \Phi dt + KdY \end{cases}. \quad (6)$$

В двумерном евклидовом пространстве R^2 страны, участвующие в гонке вооружений, можно изобразить в виде точки с координатами (x, y). Поэтому двумерная случайная величина $\bar{X} = (X, Y)$ будет описывать случайное выпадение точки со случайно имеющимися вооружениями двух стран на плоскости N_2 в момент времени t. Величина $\bar{X}$ задается с помощью функции плотности вероятностей

$$\rho = (\bar{r}'; s; \bar{r}, t), \quad (7)$$

где $\bar{r} = (V, y) -$ вектор.

При обозначении $\bar{V} = (F, \phi)$ систему (5) можно записать в векторном виде:

$$d\bar{r} = \bar{V}dt + d\bar{X}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь множество видов вооружения конкурирующих между собой стран, предположив, что эти виды вооружений подчиняются векторному стохастическому уравнению (8) как двумерному марковскому процессу с переходной функцией плотности вероятностей (7).

Функция (8) определяет по вектору $\bar{r}$ состояние системы в предыдущий момент времени $s < t$, а по переменной $\bar{r}$ эта функция определяет ее вероятность в текущий момент времени t. И хотя стартовые условия для различных стран различны, мы можем предположить, что они распределены в пространстве R^2.

Возьмем элементарную площадку вокруг точки в области $D\epsilon R^2$ и обозначим её через ΔS. А число стран с различными вооружениями, попавших на эту площадку, – через $\Delta Q\ (x, y, t)$. Введем обозначения

$$\lim_{|\Delta S|\to 0} \frac{\Delta Q(x,y,t)}{|\Delta S|} = U(\overline{r}, t), \tag{9}$$

где $U(\overline{r}, t)$ – функция плотности вероятностей распределения вооружений стран на R^2.

Для функции $U = U\ (\bar{r}, t)$ необходимо получить уравнение в частных производных, которому она удовлетворяет. Поэтому определим число стран, включенных в систему гонки вооружений в момент времени t:

$$\iint_D U\ (\overline{r}, t) X dt = Q(X), \tag{10}$$

где $D -$ произвольная в δ – функциях в области из R^2.

На всем пространстве R^2 это число будет определять все страны, вовлеченные в гонку вооружений

$$\iint_{-\infty}^{\infty} U\ (\overline{r}, \mathrm{t})\ dt = N_0.$$

Определим такое число стран за промежуток $[t_1, t_2]$, которые попадут или выйдут из области D, и запишем уравнение баланса

$$\Delta Q_{t_1, t_2} = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3, \tag{11}$$

где за время от t_1 до t_2 изменилось число стран на множестве D в виде $\Delta Q_{t_1, t_2}$: $\Pi_1 -$ число стран, находящихся и остающихся в области D; Π_2 – число стран, попадающих в область D случайным образом за счет изменения экономико-политических отношений; Π_3 – число стран, которые попадают из других областей $\Omega \in R^2$ за время от t_1 до t_2 в область D через границу $\Gamma \in D$ по различным политическим причинам.

Используя равенство (10), получим

$$\Delta Q_{t_1, t_2} = Q_{t_2}\text{-}Q_{t_1,} = \iint_D U|_{t_1}^{t_2}\, \mathrm{d}t = \iiint_{t_1}^{t_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}\bar{r}\ . \tag{12}$$

Теперь посчитаем величины, стоящие в правой части равенства (11).

Сначала сделаем это для выражения Π_1. Для этого разобьем границу Г области D, т. е. контур Г, на малые дуги $\Delta l_i, i = 1, 2, \dots, n$, и на этих элементарных отрезках возьмем произвольные точки $\xi_i \in \Delta l_i$. Обозначим внутреннюю единичную $\overline{n_\iota}$ нормаль в каждой точке ξ_i, которая направлена вовнутрь области D_i. В уравнении (7) обозначим вектор скорости движения стран в точке ξ_i на R^2 в окрестности точки $\bar{r} \in (x, y)$ в момент времени t. Если спроектируем скорость $\bar{V}(\xi_i, t)$ на нормаль $\overline{n_\iota}$, умножим на длину дуги Δl_i и на плотность стран $U(\xi_i, t)$, получим

$$\Delta J_i = U(\xi_i, t)(\bar{V}, \bar{n}_i)\Delta t_i, \tag{13}$$

число стран, которые со своими вооружениями попадут через дугу Δl_i внутрь области D за единицу времени. Просуммировав полученную величину ΔJ_i по всем дугам границы Г и переходя к пределу при $\Delta J_i \to O$, получим интегральную сумму $J(t)$. Затем, интегрируя полученную сумму по t от t_1 до t_2, получим значение для слагаемого Π_1 баланса (11)

$$\Pi_1 = \int_{t_1}^{t_2} J(\mathrm{t})\ (dt) = \int_{t_1}^{t_2} \iint_D div(u\ \bar{v}) d\bar{r}, dt. \tag{14}$$

Для вычисления Π_2 необходимо рассмотреть моменты времени t и $t + \Delta t$ и две плоскости Oxy, которые считаются пространствами накоплений вооружения в разные моменты времени t и $t + \Delta t$. Кроме этого, обозначим внешнюю область пространства D через $D' = R^2 \backslash D$.

Определим число стран, имеющих вооружение, которые случайным образом и за счет случайных накоплений вооружения попадут в область D к моменту времени $t+\Delta t$ из внешней области D'.

С этой целью область D' разобьем на элементарные площадки ΔS_i $(i = 1,2 \dots, n)$. Предположим, что $\bar{r}_i = 0,$ т. е. точка $\bar{r}_i \in \Delta S_i$ находится на площадке ΔS_i в момент времени t, тогда $U(\bar{r}_i, t)$ ΔS_i – число стран, удовлетворяющих этому условию. Эти страны к моменту времени $t+\Delta t$ за промежуток времени Δt распределяются по всей плоскости R^2 с плотностью вероятностей

$$\rho(\bar{r}_i', t{:}\,\bar{r}, t{+}\Delta t).$$

Поэтому интеграл

$$\iint_D \rho(\bar{r}_i', t{:}\,\bar{r}, t+\Delta t)d\bar{r} \tag{15}$$

будет означать вероятность того, что страны из $\bar{r}_i'$ попадут на область D к моменту времени $t+\Delta t$. Следовательно, умножив число стран $U(\bar{r}_l\ \ t)\Delta S_I$ на значения (14) , а затем суммируя по всем площадкам ΔS_I и переходя к пределу, получим выражение при $\Delta S_I \to 0$ в виде

$$\iint_D \left[\iint_D \rho(\bar{r}', t{:}\,\bar{r}', t+\Delta t)U(\bar{r}', t)\, d\bar{r}\, d\bar{r}\right] dr', \tag{16}$$

означающее количество стран, которые попадут из множества D' на множество D. Некоторое число стран к моменту времени t + Δt может перейти, наоборот, из D в область D', поэтому запишем это значение аналогично

$$\iint_{\mathrm{D}} [\iint_{D'} \rho(\overline{r'}, t :\ \bar{r}, t{+}\Delta t)\ U(r', t)d\overline{r'}]d\bar{r}. \tag{17}$$

Для получения прироста числа стран за время Δt на множестве D, рассматривая разность между значениями (16) и (17), добавляя и вычитывая аналогичные этим разностям выражения в обоих значениях интегралов по области D и переходя к пределу на основании свойств условия сильной непрерывности марковского процесса [3] вероятностей двухмерных стохастических процессов, получим при $\Delta t \to 0$ выражение

$$\Pi_2 = \int_{t_1}^{t_2} \iint_D \frac{d}{dx}\big(c_1 u(\bar{r})\big) + \frac{d}{dy}(c_2(u(\bar{r})drdt + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \iint_D \frac{d^2}{dx^2}\big(b_1 u(\bar{r})\big)d\bar{r}dt$$

$$+\int_{t_1}^{t_2} \iint_D \frac{d^2}{dxdy}(b_{12}u(\bar{r}) + \int_{t_1}^{t_2} \iint_D \frac{d^2}{dy^2}\big(b_2 u(\bar{r})\big)d\bar{r}dt. \tag{18}$$

Для нахождения Π_3 введем функцию $f(\bar{r}, t)$, выражающую число стран, которые могут перемещаться из других областей R^2 в область единичной площадки R^2 на единичный промежуток вокруг точки $\bar{r}$ к времени t. Исходя из этого можно записать выражение

$$\Pi_3 = \int_{t_1}^{t_2} \iint_D f(\bar{r},t)\, d\bar{r}dt. \quad (19)$$

Если в равенство (11) подставить полученные значения (12), (14), (18), (19) и опустить интеграл в обеих частях полученного уравнения [7], то получим стохастическое дифференциальное уравнение второго порядка, которое считается параболическим с частными производными. Этому уравнению удовлетворяет функция плотности стран с вооружением, следовательно, его можно назвать уравнением «гонки вооружений противоборствующих стран»

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(c_1 u) - \frac{\partial}{\partial y}(c_2 u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(b_1 u) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(b_{12} u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}(b_2 u) + \\ + f_1, \quad (20)$$

где коэффициенты $c_1, c_2, b_1. b_{12}, b_2$ могут быть зависимыми от $\bar{r}, t$.

Для аналитического решения полученного стохастического дифференциального уравнения (20) «гонки вооружений противоборствующих стран», в котором $\bar{X} = (X, Y) -$ марковский стохастический процесс с переходной функции плотности вероятностей (9) и которое определяется функциями условия сильной непрерывности [3], можно сформулировать задачу Коши на различных пространствах накопления вооружений с заданными начальными и краевыми условиями, например:

$$\begin{cases} u_{t=0} = \varphi(x,y), & -\infty < x, y < \infty \\ u_{(x,y)\in\Gamma} = 0, & t > 0. \end{cases}$$

Аналогичные стохастические математические модели были построены для различных экономических, физических и биологических процессов в работах [9–13].

Литература

1. *Шикин А.Г., Чхартишвили Ш.* Математические методы и модели в управлении: учеб. пос. – М.: Дело, 2004. – 440 с.

2. *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения: пер. с анг. – М.: Мир; АСТ, 2003. – 408 с.

3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – Киев: Наука думка, 1968. – 276 с.

4. *Ерофеев В.Т., Козловская И.С.* Уравнения с частными производными и математические модели в экономике: курс лекций. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Единаториал УРСС, 2004. – 248 с.

5. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы. – М.: Изд-во МГТУ, 1999. – 220 с.

6. *Королюк В.С. и др.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, Главная редакция физ.-мат. лит-ры, 1985. – 640 с.

7. *Кудрявцев Л.О.* Курс математического анализа. – М.: Высш. шк., 1988. Т. 2.

8. *Магомедов И.И., Магомедов Р.И.* Математическое моделирование мощности фирмы с помощью стохастических дифференциальных уравнений // Научно-технический вестник Поволжья. 2011. Вып. 22. – С. 112–122.

9. *Магомедов Р.И., Магомедов И.И., Магомедова Е.С.* Моделирование изменения количества воды в водохранилище с помощью стохастического дифференциального уравнения // Вестник ДГУ. Сер. 1: Естественные науки. 2020. Т. 35, вып. 1. – С. 53–59.

10. *Магомедов Р.И., Магомедов И.И., Назаралиев М.-Ш.А.* Математическая модель денежных вкладов и материальных ценностей банка // Известия Дагестанского педагогического университета. Сер.: Естественные и точные науки. – 2013. № 2. – С. 8–12.

11. *Магомедова Е.С., Магомедов Р.И.* Моделирование стоимости товара на рынке в виде обыкновенного стохастического дифференциального уравнения и ее связь с параболическим уравнением: мат-лы IX Международной научно-практической конференции (г. Саратов, 2020 г.). – 2020. Вып. 5. – С. 106–108.

12. *Магомедова Е.С., Магомедов Р.И., Магомедова Н.Г.* Модельная оценка зерновых культур фермерских хозяйств на основе дифференциальных стохастических уравнений // Математическое и компьютерное моделирование и управление рисками: мат-лы X Международной практической конференции (г. Саратов, 18–20 ноября 2021 г.). 2021. Вып. 6. – С. 117–120.

Поступила в редакцию 28 октября 2022 г.

UDC 519.86

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-30–35

Stochastic Differential Equation of the Arms Race

E.S. Magomedova[1], R.I. Magomedov[2]

[1] *Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a*; *magomedova.e.s@mail.ru;*

[2]*Information and analytical departmentof the Ministry of Construction of the Republic of Dagestan; Russia, 367000, Makhachkala, Imam Shamil ave., 58a; magomedov.ri@dagestan.digital*

The system of two differential stochastic equations compiled by introducing two random variables obeying the Markov stochastic process with transient probability density functions, satisfying additional conditions of strong continuity and as a result composed stochastic differentials of these Markov random variables is discussed in the work, with the reference to the simplest model of the arms race of two unfriendly countries. These stochastic differentials are added to the equations of the simplest model system. As a result, a system of differential stochastic equations is obtained. This stochastic system is written in a generalized vector form, using the techniques of movement of vector points, representing the unfriendly countries.

Making the necessary calculations on the principle of the Kolmogorov equation for stochastic processes, the vector stochastic differential equation is reduced to a parabolic equation, whose coefficients can be of twice continuous continuity.

The mixed problem with the initial and boundary conditions, referred to any space of weapon stockpiling on the territories of unfriendly countries for the probability density function of armaments of unfriendly countries is set up.

Keywords: *model, unfriendly countries, arms build-ups, stochastics, arms race, strong continuity, transitional probability density function.*

Received 28 October 2022