УДК 534.014.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-24–29

Т.И. Ибавов

Задача типа Коши для одного линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной по времени

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ibavov94@mail.ru

В работе рассматривается задача типа Коши для одного линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения с постоянными коэффициентами, с дробной производной Капуто по времени. Для решения поставленной задачи применяются преобразование Лапласа по времени и преобразование Фурье по пространственной координате. В результате интегральных преобразований получено изображение решения исходного уравнения, удовлетворяющее начальным условиям в образах Лапласа и Фурье. Для получения искомого решения уравнения применяются обратные преобразования Фурье по пространственной координате и Лапласа по времени в совокупности с простейшими алгебраическими преобразованиями. Для удобства представления решения применяется функция Райта.

Ключевые слова: *дробная производная Капуто, преобразование Фурье, преобразование Лапласа, обратное преобразование.*

Введение

В последние годы широкое применение при описании физических процессов получают производные дробного порядка. Это обусловлено тем, что многие проблемы механики, биологии, физики, инженерии успешно описываются дифференциальными уравнениями с производными дробного порядка. При разработке математических моделей таких проблем подобные уравнения дополняются соответствующими начальными и краевыми условиями.

В работе [4] получено решение задачи Коши для уравнения Эйри с дробной производной по времени. В работе [5] исследована краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной Лиувилля. В работе [7] найдено интегральное решение третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени. Работы [9; 10] посвящены численному исследованию задачи теплопроводности.

Ниже приведем ряд известных определений и теорем, которыми будем пользоваться в дальнейшей работе.

Определение 1. Пусть функция $f(t)$ задана на полуоси $t>0$, тогда дробная производная Римана–Лиувилля определяется в виде [1]

$$\left(D_{+}^{\alpha} f\right)(x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int\limits_{-\infty}^{x}\frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}}dt.$$

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[0,T]$ вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно, причем $f^{(n)}(t)\in L[0,T]$. Тогда для любого $\alpha\in(0;n]$

производная $D_{0t}^{\alpha} f(t)$ существует. Кроме того, если $\alpha \in (n-1; n]$, то почти всюду на $[0,T]$ имеет место представление

$$D_{0t}^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)} \cdot t^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds .$$

Выражение вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds \qquad (1)$$

называется дробной производной Капуто.

Таким образом, при $0 < \alpha < 1$ имеет место равенство

$$D_{0t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{/}(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha) t^{\alpha}}.$$

Определение 2. Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям [2]:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;

2) функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на полуоси $t > 0$ за исключением отдельных точек, где оригинал может иметь разрыв первого рода (таких точек может быть конечное множество), т. е. $\forall t > 0$, $\exists A > 0$, $\exists \beta > 0, 0 < \beta \le 1$ и $\exists \tau_0 > 0$, для которых имеет место неравенство $\left| f(t+\tau) - f(t) \le A \right|\tau\left|^{\beta}\right.$ при всех τ, удовлетворяющих условию $|\tau| \le \tau_0$;

3) $\exists M > 0$ и $\exists s_0 \ge 0$, для которых имеет место неравенство $|f(t)| < Me^{s_0 t}$,

то для комплексно-значной функции $f(t)$ изображением Лапласа будет функция $F(p)$ комплексной переменной, $p = s + i\sigma$, определяемая в виде

$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt . \qquad (2)$$

Если $L\{f(t)\} = F(p)$, то обратное преобразование Лапласа $L^{-1}\{F(p)\}$ определяется следующим образом:

$$L^{-1}\{F(p)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{pt} F(p) dp,$$

где $F(p)$ аналитична в области $Re(p) > c$.

Определение 3. Преобразование Фурье функции $f(t)$ определяется интегралом

$$F[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \qquad (3)$$

Определение 4. Специальной функцией Райта для целых неотрицательных $p, q \in N,\ (p^2 + q^2 \neq 1)$, комплексных a_i, b_j и действительных $\alpha_i, \beta_i \neq 0$ называется целая функция, определяемая степенным рядом

$$ {}_p\Psi_q(z) = {}_p\Psi_q \left[\begin{matrix} (a_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (b_i, \beta_i)_{1,q} \end{matrix} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^{p} \Gamma(a_i + \alpha_i k)}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma(b_i + \beta_i k)} \frac{z^k}{k!}, \qquad z \in \mathrm{C}. \qquad (4) $$

Специальный случай функции (0.3) при $p = 0$

$$ W(z) = {}_0\Psi_q \left[(b_i, \bar{\beta}_i)_{1,q} \middle| z \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\prod_{i=1}^{p} \Gamma(b_i + \beta_i k)} \frac{z^k}{k!}, \quad z \in \mathrm{C}, \qquad (5) $$

где $b \in C, \beta \in R, \beta \neq 0$, называется функцией Райта.

Задача типа Коши для линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения.

Рассмотрим задачу типа Коши для линейного неоднородного диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Капуто по времени

$$ \begin{cases} \dfrac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} - a^2 \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + c^2 u(x,t) = q(x,t), \\ u(x,0) = \varphi(x), \qquad u_t(x,0) = \psi(x), \end{cases} \qquad (6) $$

где $a, \mathrm{c} \in R,$ а $\partial_{0t}^{\alpha} u(t)$ – дробная производная в смысле Капуто (1).

Задача. В области $\Omega = \{-\infty < x < \infty, \ t > 0\}$ найти решение уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям (7).

Теорема 3.2. Пусть $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, тогда уравнение (6) имеет в области $\Omega = \{-\infty < x < \infty, \ t > 0\}$ решение, удовлетворяющее начальным условиям (7), которое выражается в виде

$$ u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \hat{Q}(x-z, t-y) g_1(z,t) dy + \varphi(x-z)\, g_2(z,t) + \psi(x - z)\, g_3(z,t) \right] dz. \qquad (7) $$

Доказательство.

Применим к обеим частям уравнения (6) преобразования Лапласа (3) по времени t и преобразование Фурье (4) по пространственной переменной x, получим следующее равенство:

$$ p^{2\alpha} \widehat{U}(\omega,p) - p^{2\alpha-1} \widehat{\Phi}(\omega) - p^{2\alpha-2} \widehat{\Psi}(\omega) - a^2 \omega^2 \widehat{U}(\omega,p) + c^2 \widehat{U}(\omega,p) = \hat{Q}(\omega,p). $$

Перепишем последнее равенство в виде

$$ \widehat{U}(\omega,p) = \frac{\hat{Q}(\omega,p)}{p^{2\alpha} - a^2\omega^2 + c^2} + \frac{p^{2\alpha-1}\, \widehat{\Phi}(\omega)}{p^{2\alpha} - a^2\omega^2 + c^2} + \frac{p^{2\alpha-2} \widehat{\Psi}(\omega)}{p^{2\alpha} - a^2\omega^2 + c^2} $$

$$ = \frac{1}{a^2} \frac{\hat{Q}(\omega,p)}{\omega^2 + \left(\dfrac{\sqrt{p^{2\alpha} + c^2}}{a} \right)^2} + \frac{1}{a^2} \frac{p^{2\alpha-1}\, \widehat{\Phi}(\omega)}{\omega^2 + \left(\dfrac{\sqrt{p^{2\alpha} + c^2}}{a} \right)^2} + \frac{p^{2\alpha-2} \widehat{\Psi}(\omega)}{\omega^2 + \left(\dfrac{\sqrt{p^{2\alpha} + c^2}}{a} \right)^2}. $$

$\widehat{U}(\omega,p)$ – решение задачи (6)–(7) в образах Фурье–Лапласа. Для получения искомого решения $u(x,t)$ последовательно применим обратное преобразование Фурье и Лапласа. Воспользовавшись свойствами обратного преобразования Фурье и определением свёртки двух функций, запишем:

$$\hat{U}(x,p)=\frac{1}{2a\sqrt{p^{2\alpha}+c^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[\hat{Q}(x-z,p)+p^{2\alpha-1}\,\varphi(x-z)$$

$$+p^{2\alpha-2}\psi(\omega)\Big]\,e^{-\frac{|z|}{a}\sqrt{p^{2\alpha}+c^2}}dz. \qquad (8)$$

Рассмотрим выражение $F(p)=\frac{1}{\sqrt{p^{2\alpha}+c^2}}e^{-\frac{|z|}{a}\sqrt{p^{2\alpha}+c^2}}$.

Воспользовавшись равенством [3]

$$\frac{e^{-rb}}{r}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-r^2\tau^2}e^{-\frac{b^2}{4\tau^2}}d\tau,$$

перепишем выражение для $F(p)$ в следующем виде:

$$F(p)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a\tau}\right)^2}\cdot e^{-p^{2\alpha}\tau^2}\,d\tau. \qquad (9)$$

Применим обратное преобразование Лапласа к равенству (9):

$$L^{-1}[F(p)]=L^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a\tau}\right)^2}\cdot e^{-p^{2\alpha}\tau^2}\,d\tau\right]=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a\tau}\right)^2}\cdot L^{-1}\left[e^{-p^{2\alpha}\tau^2}\right]d\tau=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a}\right)^2}\cdot L^{-1}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-p^{2\alpha}\tau^2)^n}{n!}\right]d\tau=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a\tau}\right)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\tau^2)^n}{n!}L^{-1}[(-p)^{2\alpha n}]\,d\tau.$$

Учитывая, что $L^{-1}[p^{\alpha}]=\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$, запишем

$$L^{-1}[F(p)]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a\tau}\right)^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\tau^2)^n}{n!}\cdot\frac{t^{-2\alpha n-1}}{\Gamma(-2\alpha n)}d\tau=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}t}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a\tau}\right)^2}\cdot W(-2\alpha,0;\,-\tau^2t^{-2\alpha})\,d\tau=g_1(z,t).$$

По аналогии определим

$$L^{-1}[p^{2\alpha-2}F(p)]=\frac{2}{\sqrt{\pi}t^{2\alpha}}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a\tau}\right)^2}\cdot W(-2\alpha,-2\alpha+1;\,-\tau^2t^{-2\alpha})\,d\tau=g_2(z,t).$$

$$L^{-1}[p^{2\alpha-2}F(p)]=\frac{2}{\sqrt{\pi}t^{4\alpha-1}}\int_0^{\infty}e^{-c^2\tau^2-\left(\frac{|z|}{2a\tau}\right)^2}\cdot W(-2\alpha,-4\alpha+2;\,-\tau^2t^{-2\alpha})\,d\tau=g_3(z,t),$$

где $W(\alpha,\beta,z)$ – функция Райта (5).

Подставим выражения для $g_1(z,t),\ g_2(z,t),\ g_3(z,t)$ в (8) и получим решение задачи (6)–(7):

$$u(x,t) = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \hat{Q}(x-z, t-y) g_1(z,t) dy + \varphi(x-z)\, g_2(z,t) + \psi(x - z)\, g_3(z,t) \right] dz.$$

Теорема доказана.

Заключение

В работе исследована задача типа Коши для диффузионно-волнового уравнения с дробной производной Капуто по времени. Применением преобразования Фурье по пространственной координате и преобразования Лапласа по времени получено решение задачи (6)–(7) в образах Лапласа–Фурье. Для отыскания искомого решения задачи применяются обратные преобразования Фурье по координате и Лапласа – по времени. Для удобства представления решения задачи используется функция типа Райта.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2003. – 299 с.
2. *Мамчуев М.О.* Краевые задачи для уравнений и систем уравнений с частными производными дробного порядка. – Нальчик: РАН КБНЦ, 2013. – 200 с.
3. *Kaya U.* Cauchy fractional derivative // Bulletin of the south Ural State University. Ser.: Mathematis and Physics. 2020. Vol. 12, no 4. – С. 28–32.
4. *Rakhimov K., Sobirov Z., Jabborov N.* The time-fractional airy equation on the metric graph // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and physics. 2021. № 3. – С. 376–388.
5. *Псху А.В.* Краевая задача для уравнения в частных производных первого порядка с дробной производной Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2022. Т. 58, № 8. – С. 1053–1061.
6. *Гудошникова Е.В.* Производная и дробная производная операторов Баскакова // Математика. Механика. 2022. № 22. – С. 10–12.
7. *Ибавов Т.И.* Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени // Вестник ДГУ. Сер.: 1. Естественные науки. 2021. Т. 36, вып. 2. – С. 54–60.
8. *Дубков А.А., Агудов Н.В.* Преобразование Лапласа. – Нижний Новгород: НГУ, 2016. – 36 с.
9. *Beybalaev V.D., Meilanov R.P.* The Dirihlet problem for the fractional poisons equation with Caputo Derivatives: A finite difference approximation and a numerical solution // Thermal Science. 2012. Vol. 16, no. 2. – С. 385–394.
10. *Beibalaev V.D., Shabanova M.R.* A Finite-Difference scheme for solution of a fractional heat diffusion-wave equation without initial conditions // Thermal science. 2015. Vol. 19, no. 2. – С. 531–536.

Поступила в редакцию 1 ноября 2022 г.

UDC 534.014.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-24–29

The Cauchy-type Problem for a Non-homogenous Linear Wave-diffusion Equation with a Fractional Time Derivative

T.I. Ibavov

[1]Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; ibavov94@mail.ru

The paper considers a Cauchy-type problem for a linear non-homogeneous diffusion-wave equation with constant coefficients with a fractional Caputo derivative with respect to time. To solve the problem, the Laplace transform in time and the Fourier transform in the spatial coordinate are used. As a result of integral transformations, an image of the solution of the original equation was obtained that meet the initial conditions in the Laplace and Fourier images. To obtain the desired solution of the equation, the inverse Fourier transforms in the spatial coordinate and Laplace in terms of time are used in conjunction with the simplest algebraic transformations. For the convenience of presenting the solution, the Wright function is used.

Keywords: *Caputo fractional derivative, Fourier transform, Laplace transform, inverse transform.*

Received 1 November 2022