МАТЕМАТИКА

УДК 519.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-7–16

***Ф.Г. Фейзиев*[1]*, М.Р. Мехтиева*[2]**

Условия ортогональности для входных последовательностей двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем

[1] *Сумгаитский государственный университет; Азербайджан, AZ5008, г. Сумгаит, 43 квартал, ул. Баку, 1; FeyziyevFG@mail.ru;*

[2] *Бакинский государственный университет; Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23; mehdiyevamaral71@gmail.com*

Рассматривается один класс двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем, заданных в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры с фиксированной памятью, ограниченной связью, известной степенью, с известным числом входов и выходов. Считается, что ограниченная связь есть декартово произведение двух ограниченных множеств, которые являются подмножествами множества целых чисел. Приводится понятие ортогональности входных последовательностей для рассматриваемых двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем. Находятся условия ортогональности входных последовательностей. Кратко излагается методика построения ортогональных входных последовательностей для двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем.

Ключевые слова: *3D-многомерные нелинейные модулярные динамические системы, ортогональные входные последовательности, условия ортогональности.*

Введение

Последовательностные машины или модулярные динамические системы (МДС) [1–5] являются одним из важных классов управляющих дискретных динамических систем. Они находят широкое применение в вычислительной технике, системах диагностики, кодировании и декодировании дискретных сообщений, в криптографии, моделировании, управлении непрерывными и дискретными объектами, в распараллеливании выполнения вычислений для различных задач [5–8]. МДС делятся на одно и n-параметрические (клеточные) классы, где $n \geq 2$ есть натуральное число, а также на одномерные и многомерные классы. Если входно-выходные последовательности МДС скалярные, то она называется одномерной, а если входно-выходные последовательности есть векторы, то она называется многомерная МДС. Исследованы различные фундаментальные и прикладные задачи для одно и n-параметрических МДС (короче nD-МДС), также одномерных и многомерных МДС [9–15]. К таким задачам относятся синтез двоичных нелинейных nD-МДС (nD-НМДС) и синтез двоичных многомерных нелинейных МДС (nD-МНМДС) с квадратичным критерием [16–20]. При решении задачи синтеза двоичных nD-НМДС с квадратичным критерием используется метод, основанный на применении ортогональных входных последовательностей. Ортогональные входные последовательности строятся с учетом особенностей конкретных классов двоичных nD-НМДС, и из них для некоторых найдены условия ортогональности и разработаны алгоритмы их построения [12, 13]. Одним из классов двоичных nD-МНМДС является класс двоичных 3D-МНМДС [15], который имеет более общую структуру в сравнении с другими изученными классами МДС. Однако для них вопрос вывода условия ортогональности входных последовательностей не рассмотрен. В данной работе рассматривается вопрос получения условия ортогональности входных последовательностей и разрабатывается методика построения ортогональных входных последовательностей для 3D-МНМДС.

Постановка задачи

Рассмотрим двоичную 3D-МНМДС с фиксированной памятью n_0, ограниченной связью $P = P_1 \times P_2$ (знак $\times$ есть знак операции декартового произведения множеств), максимальным показателем степени S, с r входом и k выходом, которые описываются в следующем виде [15]:

$$y_\nu[n,c_1,c_2] = \sum_{i=1}^{S} \sum_{\bar\eta\in\Lambda(i)} \sum_{\bar w\in\Psi(\bar\eta)} \sum_{(\bar{\bar j},\bar{\bar\mu})\in L_1\times L_2} \sum_{\bar{\bar{\bar\tau}}\in\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar m})[\bar w]} h_{\nu,i,\bar\eta,\bar w}[\bar{\bar j},\bar{\bar\mu},\bar{\bar{\bar\tau}}]\times$$
$$\times\prod_{\ell\in Q_0(\bar\eta)} \prod_{(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma)\in Q''_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar m_\ell)} \upsilon_{\ell,i,\bar\eta,\bar w}[n-\tau_\ell(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma), c_1+p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)), c_2+p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))], \quad (1)$$
$$GF(2), \quad \nu=\overline{1,k}.$$

В (1) $n\in Z_0$, $c_\alpha\in Z$, $\alpha=1,2$, где Z и Z_0 есть множество целых и неотрицательных целых чисел соответственно;

$$P_\alpha=\{p_\alpha(1),...,p_\alpha(r_\alpha)\},\ -\infty<p_\alpha(1)<...<p_\alpha(r_\alpha)<\infty,\ p_\alpha(\beta)\in Z,\ \beta=\overline{1,r_\alpha},\ \alpha=1,2;$$

$y[n,c_1,c_2]$ и $\upsilon_{i,\bar\eta,\bar w}[n,c_1,c_2]$ есть выходная и входная последовательности 3D-МНМДС (1) соответственно, где $y[n,c_1,c_2]=(y_1[n,c_1,c_2],\ \dots, y_k[n,c_1,c_2])\in GF^k(2)$ и

$$\upsilon_{i,\bar\eta,\bar w}[n,c_1,c_2]=(\upsilon_{1,i,\bar\eta,\bar w}[n,c_1,c_2],\ \dots,\upsilon_{r,i,\bar\eta,\bar w}[n,c_1,c_2])\in GF^r(2);$$

$$\Lambda(i)=\{\bar\eta=(\eta_1,\ \dots,\eta_r) \mid \ \eta_1+\dots+\eta_r=i, \eta_\alpha\in\{0,1,\ \dots,(n_0+1)r_1r_2\}, \alpha=\overline{1,r}\};$$

$$Q_0(\bar\eta)=\{\ell\ \mid \ell\in\{1,\dots,r\}\ \text{и}\ \ \eta_\ell\neq 0; \eta_\ell\ \text{есть}\ \ell\text{-тый компонент вектора}\ \bar\eta\};$$

$$\Psi(\bar\eta)=\{\bar w=(w_1,\ \dots,w_r)\ | w_\ell\in\{1,\ \dots,\lambda(\eta_\ell)\},\ \ell\in Q_0(\bar\eta);\ w_\ell = 0,\ \ell\notin Q_0(\bar\eta)\},$$

где $\lambda(\eta_\ell)$, $\ell\in Q_0(\bar\eta)$ есть количество элементов множества $F_\ell(\eta_\ell)$, заданного формулой

$$F_\ell(\eta_\ell)=\Bigg\{(\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar m_\ell) \Big|\ \bar m_\ell=(m_{\ell,1,1},\dots,m_{\ell,1,\gamma_2(\ell)},\dots,m_{\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell)}), \sum_{\alpha=1}^{\gamma_1(\ell)}\sum_{\beta=1}^{\gamma_2(\ell)} m_{\ell,\alpha,\beta}=\eta_\ell;$$
$$m_{\ell,\alpha,\beta}\in\{0,...,n_0+1\}, \alpha=\overline{1,\gamma_1(\ell)},\ \beta=\overline{1,\gamma_2(\ell)};$$
$$(\forall\alpha\in\{1,...,\gamma_1(\ell)\})(\exists\beta\in\{1,...,\gamma_2(\ell)\})\Rightarrow(m_{\ell,\alpha,\beta}\neq 0),$$
$$(\forall\beta\in\{1,...,\gamma_2(\ell)\})(\exists\alpha\in\{1,...,\gamma_1(\ell)\})\Rightarrow(m_{\ell,\alpha,\beta}\neq 0), \gamma_\sigma(\ell)\in\{1,...,r_\sigma\},\ \sigma=\overline{1,2}\Bigg\};$$

$$L_1=\mathop{\times}_{\ell\in Q_0(\bar\eta)} L_{\ell,1}(\gamma_1(\ell)), \quad L_2=\mathop{\times}_{\ell\in Q_0(\bar\eta)} L_{\ell,2}(\gamma_2(\ell)),$$

где множества $L_{\ell,1}(\gamma_1(\ell))$, $L_{\ell,2}(\gamma_2(\ell))$, $\ell\in Q_0(\bar\eta)$ есть следующие множества:

$$L_{\ell,1}(\gamma_1(\ell))=\{\bar j(\ell)=(j_1(\ell),...,j_{\gamma_1(\ell)}(\ell)) \big| 1\le j_1(\ell)<...<j_{\gamma_1(\ell)}(\ell)\le r_1\},$$
$$L_{\ell,2}(\gamma_2(\ell))=\{\bar\mu(\ell)=(\mu_1(\ell),...,\mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell)) \big| 1\le\mu_1(\ell)<...<\mu_{\gamma_2(\ell)}(\ell)\le r_2\};$$

$\gamma_1=(\gamma_1(1),...,\gamma_1(r))$, $\gamma_2=(\gamma_2(1),...,\gamma_2(r))$, $\bar{\bar{j}}=(\bar{j}(1),...,\bar{j}(r))$, $\bar{\bar{\mu}}=(\bar{\mu}(1),...,\bar{\mu}(r))$, $\bar{\bar{m}}=(\bar{m}_1,...,\bar{m}_r)$.

Набор $(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})$ есть элементы множества

$$F(\bar{\eta})=\underset{\ell\in Q_0(\bar{\eta})}{\times}F_\ell(\eta_\ell).$$

Множество $\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})$ определяется по формуле (его элементы обозначены через $\bar{\bar{\bar{\tau}}}$)

$$\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})=\underset{\ell\in Q_0(\bar{\eta})}{\times}\Gamma_\ell(\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell),$$

где при $\bar{\tau}_{\ell,\alpha,\beta}\in\Gamma_{\ell,\alpha,\beta}(m_{\ell,\alpha,\beta})$, $(\alpha,\beta)\in Q'_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)$, $\alpha=\overline{1,\gamma_1(\ell)}$, $\beta=\overline{1,\gamma_2(\ell)}$ множество всех блочных векторов (наборов) $\bar{\bar{\tau}}_\ell$ обозначено через $\Gamma_\ell(\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)$, причем $\Gamma_{\ell,\alpha,\beta}(m_{\ell,\alpha,\beta})=\{\bar{\tau}_{\ell,\alpha,\beta}=(\tau_\ell(\alpha,\beta,1),...,\tau_\ell(\alpha,\beta,m_{\ell,\alpha,\beta}))\,|\,0\le\tau_\ell(\alpha,\beta,1)<...<\tau_\ell(\alpha,\beta,m_{\ell,\alpha,\beta})\le n_0\}$;

$$Q'_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)=\{(\alpha,\beta)\,|\,m_{\ell,\alpha,\beta}\text{ есть компоненты набора }\bar{m}_\ell\text{ и } m_{\ell,\alpha,\beta}\ne 0,\alpha=\overline{1,\gamma_1(\ell)},\beta=\overline{1,\gamma_2(\ell)}\};$$

$$Q''_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)=\{(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma)\,|\,\sigma\in\{1,...,m_{\ell,\alpha_\ell,\beta_\ell}\},(\alpha_\ell,\beta_\ell)\in Q'_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)\}.$$

Каждому $(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})\in F(\bar{\eta})$ взаимно-однозначно соответствует набор $\bar{w}\in\Psi(\bar{\eta})$. Поэтому элемент $(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})\in F(\bar{\eta})$, соответствующий набору $\bar{w}\in\Psi(\bar{\eta})$, обозначен через $(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})[\bar{w}]$.

Из (1) видно, что двоичный 3D-МНМДС состоит из различных блоков. Между блоком и возможной тройкой $\langle i,\bar{\eta},\bar{w}\rangle$ есть взаимно-однозначное соответствие, где $\bar{w}\in\Psi(\bar{\eta})$, $\bar{\eta}\in\Lambda(i)$, $i\in\{1,...,S\}$. В (1) на вход блока 3D-МНМДС, соответствующей тройке $\langle i,\bar{\eta},\bar{w}\rangle$, поступают входные последовательности

$$\{\upsilon_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n,c_1,c_2]:n\in[0,N],c_1\in[0,C_1],c_2\in[0,C_2]\},\quad \ell\in Q_0(\bar{\eta}).$$

Введем следующую матрицу:

$$V_0(i,\bar{\eta},\bar{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}},\bar{\bar{\bar{\tau}}}_\xi)=$$

$$=\left\{\prod_{\ell\in Q_0(\bar{\eta})}\ \prod_{(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma)\in Q''_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\bar{m}_\ell)}\upsilon_{\ell,i,\bar{\eta},\bar{w}}[n-\tau_\ell^{(\xi)}(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma),c_1+p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)),c_2+p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))]\right\},\quad(2)$$

где в (2) через $\tau_\ell^{(\xi)}(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma)$ обозначен ℓ-тый компонент ξ-того набора (набор $\bar{\bar{\bar{\tau}}}_\xi$) из $\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})[\bar{w}]$. В матрице $V_0(i,\bar{\eta},\bar{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}},\bar{\bar{\bar{\tau}}}_\xi)$ каждой тройке (n,c_1,c_2), где $n\in[0,N]$, $c_1\in[0,C_1]$, $c_2\in[0,C_2]$, соответствует строка, т. е. эта матрица есть матрица размерностью $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)\times 1$.

На основе матрицы (2) последовательно построим следующие блочные матрицы:

$$V_1(i,\bar{\eta},\bar{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})=(V_0(i,\bar{\eta},\bar{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}},\bar{\bar{\bar{\tau}}}_1)\ \ldots\ V_0(i,\bar{\eta},\bar{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}},\bar{\bar{\bar{\tau}}}_{|\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\bar{\bar{m}})[\bar{w}]|})),\quad(3)$$

$$V_2(i,\bar{\eta},\bar{w})=(V_1(i,\bar{\eta},\bar{w},\bar{\bar{j}}_1,\bar{\bar{\mu}}_1),...,V_1(i,\bar{\eta},\bar{w},\bar{\bar{j}}_1,\bar{\bar{\mu}}_{|L_2|}),...,V_1(i,\bar{\eta},\bar{w},\bar{\bar{j}}_{|L_1|},\bar{\bar{\mu}}_{|L_2|})),\quad(4)$$

$$V_3(i,\bar{\eta})=(V_2(i,\bar{\eta},\bar{w}_1),...,V_2(i,\bar{\eta},\bar{w}_{|\Psi(\bar{\eta})|})),\qquad V_4(i)=(V_3(i,\bar{\eta}_1),...,V_3(i,\bar{\eta}_{|\Lambda(i)|})),\quad(5)$$

$$V_5 = (V_4(1)\ \dots\ V_4(S)),\quad V = diag\{\underbrace{V_5 \dots V_5}_{k}\}, \tag{6}$$

где через $|A|$ обозначено количество элементов множества A.

Блочные матрицы $V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}},\overline{\overline{\mu}})$, $V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$, $V_3(i,\overline{\eta})$, $V_4(i)$ и V_5 имеют количество строк $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)$. В (6) матрица V – блочная матрица k-того порядка. В блочной матрице V_5 поэлементно распишем все подматрицы $V_4(1),\dots V_4(S)$, а в полученной матрице поэлементно распишем все подматрицы $\boldsymbol{V_3(i,\overline{\eta}_1)},\ \dots\ \boldsymbol{V_3(i,\overline{\eta}_{|\Lambda(i)|}}$ и т. д. Тогда из блочной матрицы V_5 получим обыкновенную матрицу V_5 размерностью $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)\times\sum_{i=1}^{s} C^{i}_{r(n_0+1)r_1r_2}$, а из блочной матрицы V получим обыкновенную матрицу V размерностью $(N+1)(C_1+1)(C_2+1)k\times R$, где $R = k\sum_{i=1}^{s} C^{i}_{r(n_0+1)r_1r_2}$.

Пусть входные последовательности

$$\{\upsilon_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2] : n\in[0,N], c_1\in[0,C_1], c_2\in[0,C_2]\}, \tag{7}$$
$$\boldsymbol{\ell \in Q_0(\overline{\eta}), \overline{w} \in \Psi(\overline{\eta}), \overline{\eta} \in \Lambda(i), i \in \{1,\ \dots,\ S\}}$$

такие, что матрица V, образованная из них по формулам (3)–(6), удовлетворяет условиям ортогональности

$$V^T \cdot V = diag\{d_{1,1},\dots,d_{R,R}\};\quad d_{\alpha,\alpha} > 0,\ \alpha = 1,\dots,R, \tag{8}$$

где $d_{\alpha,\alpha}$, $\alpha = \overline{1,R}$, есть элементы матрицы $V^T \cdot V$. Тогда входные последовательности (7) называются ортогональными входными последовательностями для 3D-МНМДС (1).

Условия ортогональности для входной последовательности 3D-МНМДС

Обозначим через $R_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}},\overline{\overline{\mu}})$, $R_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$, $R_3(i,\overline{\eta})$, $R_4(i)$ количество столбцов матриц $V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}},\overline{\overline{\mu}})$, $V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$, $V_3(i,\overline{\eta})$, $V_4(i)$ соответственно. Ясно, что

$$R_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}},\overline{\overline{\mu}}) = |\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\overline{\overline{m}})[\overline{w}]|,$$
$$R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}) = |\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\overline{\overline{m}})[\overline{w}]|\cdot|L_1|\cdot|L_2|,\quad R_3(i,\overline{\eta}) = \sum_{\overline{w}\in\Psi(\overline{\eta})} R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}),\quad R_4(i) = \sum_{\overline{\eta}\in\Lambda(i)} R_3(i,\overline{\eta}).$$

Теорема 1. Пусть матрица V образована из входных последовательностей (7) по формулам (3)–(6). Для того, чтобы V удовлетворяло условию ортогональности (8), необходимо и достаточно, чтобы для всех $\overline{w}\in\Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta}\in\Lambda(i)$, $i\in\{1,\dots,S\}$ выполнялось

$$V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})^T V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}) = diag\{d_{1,1}(2,\overline{\eta},\overline{w}),\dots,d_{R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}),R_2(i,\overline{\eta},\overline{w})}(2,\overline{\eta},\overline{w})\}, \tag{9}$$
$$d_{\gamma,\gamma}(2,\overline{\eta},\overline{w}) > 0,\ \gamma = 1,\dots,R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}),$$

где $d_{\gamma,\gamma}(2,\overline{\eta},\overline{w})$ есть элемент матрицы $V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})^T V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$, а для всех $\overline{w}\in\Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta}\in\Lambda(i)$, $i\in\{1,\dots,S\}$, $\overline{w}'\in\Psi(\overline{\eta}')$, $\overline{\eta}'\in\Lambda(i')$, $i'\in\{1,\dots,S\}$, $(i,\overline{\eta},\overline{w})\neq(i',\overline{\eta}',\overline{w}')$ выполнялось

$$V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})^T V_2(i',\overline{\eta}',\overline{w}') = 0_{R_2(i,\overline{\eta},\overline{w})\times R_2(i',\overline{\eta}',\overline{w}')}, \tag{10}$$

где $0_{R_2(i,\overline{\eta},\overline{w})\times R_2(i',\overline{\eta}',\overline{w}')}$ есть нулевая матрица размерностью $R_2(i,\overline{\eta},\overline{w})\times R_2(i',\overline{\eta}',\overline{w}')$.

Доказательство. По определению матрицы V имеем

$$V^T \cdot V = \begin{pmatrix} V_5^T \cdot V_5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & V_5^T \cdot V_5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & V_5^T \cdot V_5 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Из (11) видно, что матрица V удовлетворяет условию ортогональности тогда и только тогда, когда матрица V_5 удовлетворяет условию ортогональности. По определению матрицы V_5 имеем

$$V_5^T \cdot V_5 = \left(V_4(\alpha)^T \cdot V_4(\beta)\right),\ \alpha = \overline{1,S}\ ,\ \beta = \overline{1,S}. \tag{12}$$

Аналогично (12) для того, чтобы V_5 удовлетворяло условию ортогональности, необходимо и достаточно, чтобы для всех $\alpha \in \{1,...,S\}$ выполнялось

$$V_4(\alpha)^T \cdot V_4(\alpha) = diag\{d_{1,1}(4,\alpha),...,d_{R_4(\alpha),R_4(\alpha)}(4,\alpha)\},\ d_{\gamma,\gamma}(4,\alpha) > 0,\ \gamma = 1,...,R_4(\alpha), \tag{13}$$

где $d_{\gamma,\gamma}(4,\alpha)$ есть элемент матрицы $V_4(\alpha)^T \cdot V_4(\alpha)$, а для всех $\alpha \in \{1,...,S\}$, $\beta \in \{1,...,S\}$, $\alpha \neq \beta$ выполнялось

$$V_4(\alpha)^T \cdot V_4(\beta) = 0_{R_4(\alpha),R_4(\beta)}. \tag{14}$$

Из формулы $V_4(i) = (V_3(i,\overline{\eta}_1)\ \dots\ V_3(i,\overline{\eta}_{|\Lambda(i)|}))$ имеем, что

$$V_4(i)^T \cdot V_4(i) = \left(V_3(i,\overline{\eta}_\alpha)^T \cdot V_3(i,\overline{\eta}_\beta)\right),\ \alpha = \overline{1,|\Lambda(i)|}\ ,\ \beta = \overline{1,|\Lambda(i)|}. \tag{15}$$

Из (15) следует, что для того, чтобы $V_4(\alpha)$ удовлетворяло условию ортогональности (13), необходимо и достаточно, чтобы для всех $\alpha \in \{1,...,|\Lambda(i)|\}$ выполнялось

$$\begin{gathered} V_3(i,\overline{\eta}_\alpha)^T \cdot V_3(i,\overline{\eta}_\alpha) = diag\{d_{1,1}(3,\alpha),...,d_{R_3(i,\overline{\eta}_\alpha),R_3(i,\overline{\eta}_\alpha)}(3,\alpha)\}, \\ d_{\gamma,\gamma}(3,\alpha) > 0,\ \gamma = 1,...,R_3(i,\overline{\eta}_\alpha), \end{gathered} \tag{16}$$

где $d_{\gamma,\gamma}(3,\alpha)$ есть элемент матрицы $V_3(i,\overline{\eta}_\alpha)^T \cdot V_3(i,\overline{\eta}_\alpha)$, а для всех $\alpha \in \{1,...,|\Lambda(i)|\}$, $\beta \in \{1,...,|\Lambda(i)|\}$, $\alpha \neq \beta$ выполнялось

$$V_3(i,\overline{\eta}_\alpha)^T \cdot V_3(i,\overline{\eta}_\beta) = 0_{R_3(i,\overline{\eta}_\alpha),R_3(i,\overline{\eta}_\beta)}. \tag{17}$$

Из формулы $V_3(i,\overline{\eta}) = (V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_1)\ \dots\ V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_{|\Psi(\overline{\eta})|}))$ следует, что

$$V_3(i,\overline{\eta})^T \cdot V_3(i,\overline{\eta}) = \left(V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha)^T V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\beta)\right),\ \alpha = \overline{1,|\Psi(\eta)|}\ ,\ \beta = \overline{1,|\Psi(\eta)|}. \tag{18}$$

Аналогично (18) для того, чтобы $V_3(i,\overline{\eta})$ удовлетворяло условию ортогональности (16), необходимо и достаточно, чтобы для всех $\alpha \in \{1,...,|\Psi(\overline{w})|\}$ выполнялось

$$\begin{gathered} V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha)^T V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha) = diag\{d_{1,1}(2,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha),...,d_{R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha),R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha)}(2,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha)\}, \\ d_{\gamma,\gamma}(2,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha) > 0,\ \gamma = 1,...,R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha), \end{gathered} \tag{19}$$

где $d_{\gamma,\gamma}(2,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha)$ есть элемент матрицы $V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha)^T V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha)$, а для всех $\alpha \in \{1,...,|\Psi(\overline{w})|\}$, $\beta \in \{1,...,|\Psi(\overline{w})|\}$, $\alpha \neq \beta$ выполнялось

$$V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha)^T V_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\beta) = 0_{R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\alpha),R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}_\beta)}. \tag{20}$$

Таким образом, учитывая соотношения (11–20), чтобы матрица V удовлетворяла условию ортогональности (8), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (9), (10). Теорема доказана.

Соотношения (9) являются условием собственной ортогональности последовательностей (7), а соотношения (10) – взаимной ортогональности последовательностей (7) и последовательностей

$$\{\upsilon_{\ell,i',\overline{\eta}',\overline{w}'}[n,c_1,c_2]: n\in[0,N], c_1\in[0,C_1], c_2\in[0,C_2]\},$$
$$\ell\in Q_0(\overline{\eta}'),\ \overline{w}'\in\Psi(\overline{\eta}'),\ \overline{\eta}'\in\Lambda(i'),\ i'\in\{1,...,S\}.$$

Теорема 2. Пусть $\overline{w}\in\Psi(\overline{\eta}),\ \overline{\eta}\in\Lambda(i),\ i\in\{1,...,S\}$. Для собственной ортогональности последовательностей $\{\upsilon_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]: n\in[0,N], c_1\in[0,C_1], c_2\in[0,C_2]\}$, $\ell\in\{1,...,r\}$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $(\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})\in L_1\times L_2$ выполнялось

$$V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})^T\cdot V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})=diag\{d_{1,1}(1),...,d_{R_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}}),R_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})}(1)\}, \tag{21}$$
$$d_{\alpha,\alpha}(1)>0,\ \alpha=1,...,R_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}}),$$

где $d_{\alpha,\alpha}(1)$ есть элемент матрицы $V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})^T\cdot V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})$, а для всех $(\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})\in L_1\times L_2$, $(\bar{\bar{j}}',\bar{\bar{\mu}}')\in L_1\times L_2$, $(\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})\neq(\bar{\bar{j}}',\bar{\bar{\mu}}')$ выполнялось

$$(V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})^T\cdot V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}',\bar{\bar{\mu}}')=0_{R_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}},\bar{\bar{\mu}})\times R_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}',\bar{\bar{\mu}}')}. \tag{22}$$

Доказательство. Из формулы (4) можем записать матрицу $V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})^T\cdot V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$ в следующем компактном виде:

$$V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})^T\cdot V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})=(V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\alpha,\bar{\bar{\mu}}_\beta)^T\cdot V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\sigma,\bar{\bar{\mu}}_\gamma)), \tag{23}$$
$$\alpha=\overline{1,|L_1|},\ \beta=\overline{1,|L_2|};\ \sigma=\overline{1,|L_1|},\ \gamma=\overline{1,|L_2|}.$$

Из (23) ясно, что в матрице $V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})^T\cdot V_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$ на главной диагонали стоят элементы

$$V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\alpha,\bar{\bar{\mu}}_\beta)^T\cdot V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\alpha,\bar{\bar{\mu}}_\beta),\ \alpha=\overline{1,|L_1|},\ \beta=\overline{1,|L_2|},$$

а элементы, стоящие вне главной диагонали, есть элементы

$$V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\alpha,\bar{\bar{\mu}}_\beta)^T\cdot V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\sigma,\bar{\bar{\mu}}_\gamma),\ \alpha=\overline{1,|L_1|},\ \beta=\overline{1,|L_2|},\ \sigma=\overline{1,|L_1|},\ \gamma=\overline{1,|L_2|},\ (\alpha,\beta)\neq(\sigma,\gamma).$$

Поэтому, если для каждых $\alpha=\overline{1,|L_1|}$, $\beta=\overline{1,|L_2|}$ в матрице $V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\alpha,\bar{\bar{\mu}}_\beta)^T\cdot V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\alpha,\bar{\bar{\mu}}_\beta)$ все диагональные элементы ненулевые, тогда выполняется условие (21), а если для каждых $\alpha=\overline{1,|L_1|},\ \beta=\overline{1,|L_2|},\ \sigma=\overline{1,|L_1|},\ \gamma=\overline{1,|L_2|}$, $(\alpha,\beta)\neq(\sigma,\gamma)$ диагональные элементы матрицы $V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\alpha,\bar{\bar{\mu}}_\beta)^T\cdot V_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\bar{\bar{j}}_\sigma,\bar{\bar{\mu}}_\gamma)$ нулевые, тогда выполняется условие (22). Таким образом, для выполнения соотношения (9) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (21) и (22). Теорема доказана.

Теорема 3. Пусть:

I. Для всех $\ell\in Q_0(\overline{\eta}),\ \overline{w}\in\Psi(\overline{\eta}),\ \overline{\eta}\in\Lambda(i),\ i\in\{1,...,S\}$ последовательность $\overline{\vartheta}_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$ является $\{0,1\}$– последовательностью с периодом $T_{i,\overline{\eta},\overline{w}}+1$, $A_1(i,\overline{\eta},\overline{w})+1$ и $A_2(i,\overline{\eta},\overline{w})+1$ соответственно по аргументам n, c_1 и c_2, и кроме того,

$$\overline{V}_2(i,\overline{\eta},\overline{w})^T\overline{V}_2(i,\overline{\eta},\overline{w})=diag\{d_{1,1}(2,\overline{\eta},\overline{w}),...,d_{R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}),R_2(i,\overline{\eta},\overline{w})}(2,\overline{\eta},\overline{w})\}, \tag{24}$$

$$d_{\gamma,\gamma}(2,\overline{\eta},\overline{w})>0,\ \ \gamma=1,...,R_2(i,\overline{\eta},\overline{w}),$$

где $d_{\gamma,\gamma}(2,\overline{\eta},\overline{w})$ есть элемент матрицы $\overline{V}_2(i,\overline{\eta},\overline{w})^T\overline{V}_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$, а матрица $\overline{V}_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$ образована из последовательностей

$$\{\overline{\upsilon}_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]:\ n\in[0,T_{i,\overline{\eta},\overline{w}}],c_1\in[0,A_1(i,\overline{\eta},\overline{w})],c_2\in[0,A_2(i,\overline{\eta},\overline{w})]\}$$

последовательно по формулам

$$\overline{V}_0(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}},\overline{\overline{\mu}},\overline{\overline{\overline{\tau}}}_{\xi})=$$

$$=\left\{\prod_{\ell\in Q_0(\overline{\eta})}\ \prod_{(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma)\in Q''_\ell(\eta_\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell),\overline{m}_\ell)}\overline{\upsilon}_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n-\tau_\ell^{(\xi)}(\alpha_\ell,\beta_\ell,\sigma),c_1+p_1(j_{\alpha_\ell}(\ell)),c_2+p_2(\mu_{\beta_\ell}(\ell))]\right\}, \quad (25)$$

$$\overline{V}_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}},\overline{\overline{\mu}})=(\overline{V}_0(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}},\overline{\overline{\mu}},\overline{\overline{\overline{\tau}}}_1)\ \ ...\ \ \overline{V}_0(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}},\overline{\overline{\mu}},\overline{\overline{\overline{\tau}}}_{|\Gamma(\gamma_1,\gamma_2,\overline{\overline{m}})[\overline{w}]|})), \quad (26)$$

$$\overline{V}_2(i,\overline{\eta},\overline{w})=(\overline{V}_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}}_1,\overline{\overline{\mu}}_1),...,\overline{V}_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}}_1,\overline{\overline{\mu}}_{|L_2|}),...,\overline{V}_1(i,\overline{\eta},\overline{w},\overline{\overline{j}}_{|L_1|},\overline{\overline{\mu}}_{|L_2|})). \quad (27)$$

II. а) Для всех $\ell\in Q_0(\overline{\eta}),\ \overline{w}\in\Psi(\overline{\eta}),\ \overline{\eta}\in\Lambda(i),\ i\in\{1,...,S\}$ и

$$(n,c_1,c_2)\in[0,T_{i,\overline{\eta},\overline{w}}]\times[0,A_1(i,\overline{\eta},\overline{w})]\times[0,A_2(i,\overline{\eta},\overline{w})]$$

последовательность $\upsilon'_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$ определяется по формуле

$$\upsilon'_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]=\begin{cases}\overline{\upsilon}_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2], & \text{если}\,(n,c_1,c_2)\in F(i,\overline{\eta},\overline{w})G_1(i,\overline{\eta},\overline{w})\times G_2(i,\overline{\eta},\overline{w}),\\ 0 & ,\ \text{если}\,(n,c_1,c_2)\notin F(i,\overline{\eta},\overline{w})G_1(i,\overline{\eta},\overline{w})\times G_2(i,\overline{\eta},\overline{w}),\end{cases} \quad (28)$$

где

$$F(i,\overline{\eta},\overline{w})=[N_1(i,\overline{\eta},\overline{w})-\tau(i,\overline{\eta},\overline{w}),N_1(i,\overline{\eta},\overline{w})-\tau(i,\overline{\eta},\overline{w})+T_{i,\overline{\eta},\overline{w}}]\subset[0,T'],$$

$$G_\alpha(i,\overline{\eta},\overline{w})=[D_\alpha(i,\overline{\eta},\overline{w}),D_\alpha(i,\overline{\eta},\overline{w})+A_\alpha(i,\overline{\eta},\overline{w})]\subset[0,C'_\alpha],\alpha=\overline{1,2},$$

$$\tau(i,\overline{\eta},\overline{w})=\begin{cases}\max\{m_{\ell,1,1},...,m_{\ell,1,\gamma_2(\ell)},...,m_{\ell,\gamma_1(\ell),\gamma_2(\ell)}\}-1, & \textit{если}\ N_1(i,\overline{\eta},\overline{w})>0,\\ 0 & ,\textit{если}\ N_1(i,\overline{\eta},\overline{w})=0.\end{cases}$$

б) Для всех $\overline{w}\in\Psi(\overline{\eta}),\overline{\eta}\in\Lambda(i),\ i\in\{1,...,S\}$ натуральные числа $N_1(i,\overline{\eta},\overline{w})$, $D(i,\overline{\eta},\overline{w})$,
$D_2(i,\overline{\eta},\overline{w})$ и область $[0,T']\times[0,C'_1]\times[0,C'_2]$ таковы, что для любых $\overline{w}'\in\Psi(\overline{\eta}'),\ \overline{\eta}'\in\Lambda(i'),\ \ i'\in\{1,...,S\}$, где $\langle i,\overline{\eta},\overline{w}\rangle\neq\langle i',\overline{\eta}',\overline{w}'\rangle$, выполняются соотношения $F(i,\overline{\eta},\overline{w})\cap F(i',\overline{\eta}',\overline{w}')=\varnothing,$
или $G_1(i,\overline{\eta},\overline{w})\cap G_1(i',\overline{\eta}',\overline{w}')=\varnothing$ или $G_2(i,\overline{\eta},\overline{w})\cap G_2(i',\overline{\eta}',\overline{w}')=\varnothing;$

III. Для всех $\ell\in Q_0(\overline{\eta}),\ \overline{w}\in\Psi(\overline{\eta}),\overline{\eta}\in\Lambda(i),i\in\{1,...,S\}$ последовательность $\upsilon_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$ суть периодическое продолжение последовательности $\upsilon'_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$ из области $[0,T']\times[0,C'_1]\times[0,C'_2]$ в остальные части области $[0,N]\times[0,C_1]\times[0,C_2]$ с периодом $T_{i,\overline{\eta},\overline{w}}+1,\ \ A_1(i,\overline{\eta},\overline{w})+1$ и $A_2(i,\overline{\eta},\overline{w})+1$ соответственно по аргументам n, c_1 и c_2. Тогда матрица V ортогональна в смысле (8).

Условие I теоремы 3 суть условие независимости ортогональной входной последовательности, условие II суть условие разделения ортогональной входной последовательности, т. е. разделения ортогональной входной последовательности друг от друга по временной и пространственной областям, а условие III – условие периодичности ортогональной входной последовательности.

Методика построения ортогональных входных последовательностей

Для построения ортогональных входных последовательностей $\upsilon_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$, $\ell \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w} \in \Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta} \in \Lambda(i)$, $i \in \{1,...,S\}$ можно использовать методику построения ортогональных входных последовательностей, состоящую из следующих этапов:

1. Построение вспомогательных последовательностей $\overline{\upsilon}_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$, $\ell \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w} \in \Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta} \in \Lambda(i)$, $i \in \{1,...,S\}$ в соответствии с условием I теоремы 3 в отдельности, т. е. независимо от $\overline{\upsilon}_{\ell',i',\overline{\eta}',\overline{w}'}[n,c_1,c_2]$, $\ell' \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w}' \in \Psi(\overline{\eta}')$, $\overline{\eta}' \in \Lambda(i')$, $i' \in \{1,...,S\}$, $\langle i,\overline{\eta},\overline{w},\ell\rangle \neq \langle i',\overline{\eta}',\overline{w}',\ell'\rangle$.

2. В соответствии с условием II теоремы 3, разделяя область определения последовательностей $\overline{\upsilon}_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$, $\ell \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w} \in \Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta} \in \Lambda(i)$, $i \in \{1,...,S\}$, по аргументу n, или c_1, или c_2, или по двум или трем аргументам по формуле (28) строят последовательности $\upsilon'_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$, $\ell \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w} \in \Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta} \in \Lambda(i)$, $i \in \{1,...,S\}$ в области $[0,T'] \times [0,C_1'] \times [0,C_2'] \subset [0,N] \times [0,C_1] \times [0,C_2]$.

3. В соответствии с условием III теоремы 3 с продолжением последовательностей $\upsilon'_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$, $\ell \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w} \in \Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta} \in \Lambda(i), i \in \{1,...,S\}$ из области $[0,T'] \times [0,C_1'] \times [0,C_2']$ с периодом $T'+1$, $C_1'+1$ и $C_2'+1$ соответственно аргументами n, c_1 и c_2 в остальных частях области $[0,N] \times [0,C_1] \times [0,C_2]$ строятся соответственно $\upsilon_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$, $\ell \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w} \in \Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta} \in \Lambda(i)$, $i \in \{1,...,S\}$.

Из методики построения ортогональных входных последовательностей видно, что для построения последовательностей $\upsilon_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$, $\ell \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w} \in \Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta} \in \Lambda(i)$, $i \in \{1,...,S\}$ прежде всего необходимо построение вспомогательных последовательностей $\overline{\upsilon}_{\ell,i,\overline{\eta},\overline{w}}[n,c_1,c_2]$, $\ell \in Q_0(\overline{\eta})$, $\overline{w} \in \Psi(\overline{\eta})$, $\overline{\eta} \in \Lambda(i)$, $i \in \{1,...,S\}$ в соответствии с условием ортогональности (24).

Заключение

В работе для двоичных 3D-многомерных нелинейных модулярных динамических систем, заданных в виде двухзначного аналога полинома Вольтерры, приведено понятие ортогональной входной последовательности. Доказана теорема о необходимом и достаточном условии ортогональности входных последовательностей двоичных 3D-МНМДС (1). Доказана теорема о необходимых и достаточных условиях собственной ортогональности каждой входной последовательности двоичных 3D-МНМДС (1). Также приведены теоремы об условиях независимости ортогональной входной последовательности, ее разделения и периодичности. Предложена методика построения ортогональной входной последовательности на базе вспомогательных ортогональных последовательностей.

Литература

1. *Цыпкин Я.З., Попков Ю.С.* Теория нелинейных импульсных систем. – М.: Наука, 1973.

2. *Гилл А.* Линейные последовательностные машины. – М.: Наука, 1974.

3 *Фараджев Р.Г.* Линейные последовательностные машины. – М.: Сов. радио, 1975.

4. *Блюмин С.Л., Фараджев Р.Г.* Линейные клеточные машины: Подход пространства состояний (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. – С. 125–163.

5. *Фейзиев Ф.Г., Фараджева М.Р.* Модулярные последовательностные машины: Основные результаты по теории и приложению. – Баку: Элм, 2006.

6. *Блейхут Р.* Теория и практика кодов, контролирующих ошибки. – М.: Мир, 1986.

7. *Nagiyev A.T., Feyziyev F.G.* The sequential cellular-machining model of the continuous objects with distributing parameters // Seminarberichte, Fachbereich Mathematik. Hagen, Federal Republic of Germany. – 2001. – Bd 71. – P. 31–43.

8. *Фейзиев Ф.Г., Бабаванд М.А.* Описание декодирования циклических кодов в классе последовательностных машин, основанного на теореме Меггитта // Автоматика и вычислительная техника. 2012. Т. 46, № 4. – С. 26–33.

9. *Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Гусейнов И.Н.* Критерии диагностируемости билинейных последовательностных машин // Докл. РАН. 1998. Т. 361, № 5. – С. 606–607.

10. *Mamedova G.G.* On controllability and reversibility of two parametric bilinear sequential machines // Proceed. Of IMM Acad. Scien. Azerb. 2000. V. 13 (21). – Pp. 171–178.

11. *Haci Y.* Optimal control problem for processes with multiparametric binary linear difference equation system // Applied and computational mathematics. 2009. V. 8, no. 2. – Pp. 263–269.

12. *Haci Y., Özen K.* Terminal optimal control problem for processes represented by nonlinear multi-parametric binary dynamical system // Control and cybernetics. 2009. V. 38, no. 3. – Pp. 625–633.

13. *Haci Y., Candan M., Or A.* On the Principle of Optimality for Linear Stochastis Dynamical System // International Journal in Foundations of Computer Science and Technology. – 2016. – Vol. 6. № 1. – Pp. 57–63.

14. *Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б.* Полиномиальное соотношение для представления полной реакции одного класса двоичных 4D-модулярных динамических систем // Вестник Пермского университета. Сер.: Математика. Механика. Информатика. 2019. Вып. 2 (45). – С. 46–54.

15. *Фейзиев Ф.Г., Мехтиева М.Р.* Аналитическое представление полной реакции одного класса двоичных $3D$-многомерных нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2019. № 49. – С. 82–91.

16. *Байбатшаев М.Ш., Попков Ю.С.* Об одной задаче квадратичной оптимизации двоичных нелинейных последовательностных машин // Автоматика и телемеханика. 1978. № 12. – С. 37–47.

17. *Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г.* Методы и алгоритмы решения задачи квадратичной оптимизации для двоичных последовательностных машин. – Баку: Элм, 1996.

18. *Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г.* К задаче квадратичной оптимизации для двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1996. № 5. – С. 104–119.

19. *Фараджев Р.Г., Нагиев А.Т., Фейзиев Ф.Г.* Аналитическое описание и квадратичная оптимизация двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Докл. РАН. 1998. Т. 360, № 6. – С. 750–752.

20. *Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б.* Задача оптимального синтеза двоичных 4D-нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного

университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2020. № 53. – С. 102–109.

21. *Фейзиев Ф.Г., Самедова З.А.* Условия ортогональности для входных последовательностей двоичных 3D-нелинейных модулярных динамических систем // Изв. НАН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук: Информатика и проблемы управления. 2010. Т. 30. № 3. – С. 115–124.

22. *Фараджев Р.Г., Фейзиев Ф.Г.* Алгоритм построения ортогональных тестовых последовательностей для двоичных многомерных нелинейных последовательностно-клеточных машин // Автоматика и телемеханика. 1996. № 6. – С. 114–124.

23. *Фейзиев Ф.Г., Абаева Н.Б.* Условия ортогональности входных последовательностей одного класса двоичных 4D-нелинейных модулярных динамических систем // Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика. 2021. № 55. – С. 80–90.

Поступила в редакцию 27 апреля 2022 г.

UDC 519.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-4-7–16

The Conditions of Orthogonality for the Input Sequences of the Binary 4D-Multi-Dimensional Nonlinear Modular Dynamic systems

F.G. Feyziyev[1], M.R. Mekhtiyeva[2]

[1]Sumgait State University; Azerbaijan, AZ5008, Sumgait, 43th district, Baku st., 1; FeyziyevFG@mail.ru;

[2]Baku State University; Azerbaijan, AZ1148, Baku, Z. Khalilov st., 23; mehdiyevamaral71@gmail.com

The article deals with a class of binary 3D-multidimensional modular dynamical systems given in the form of a two-valued analogue of the Volterra's polynomial with a fixed memory, limited connection, a known degree, and a known number of inputs and outputs. It is believed, that a limited connection is represented as a Cartesian product of two bounded sets, which are the subsets for the set of integers. The concept of orthogonality of the input sequences for the considered binary 3D-multidimensional modular dynamical systems is given. The conditions of the orthogonality of input sequences are found. A methodology for the construction of orthogonal input sequences for the binary 3D-multidimensional modular dynamical systems is briefly outlined.

Keywords: *3D-multidimensional nonlinear modular dynamical system, the orthogonal input sequences, conditions of orthogonality.*

Received 27 April 2022