

УДК 519.65

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-3-34-41

М.М. Шихиинатова

Задачи приближения функций: от лагранжевых к серендиповым полиномам

*Дагестанский государственный педагогический университет; Россия, 367003,
г. Махачкала, ул. М. Ярагского, 57; shichtum_2006@mail.ru*

В статье рассматривается актуальная проблематика из теории приближения функций в направлении задач приближения функций от лагранжевых к серендиповым полиномам. Цель статьи – трансформация лагранжевых двумерных конечных элементов в конечные элементы серендиповой семьи. В результате обзора, проведенного в статье, показано, что в первую очередь к применению теории приближения функций относятся задачи аппроксимации специальных и элементарных функций, которые трудно вычислять. Например, интегральный синус, функции Бесселя, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, логарифмическая и показательная функции и т. п. Важную роль играют методы теории приближения функций в задачах восстановления, часто возникающих в различных прикладных науках: метеорологии, геологии, топографии и т. п. Задача восстановления состоит в том, что функция известна на некотором множестве точек и нужно разработать алгоритм приближенного вычисления функции на более широком множестве точек. Эти задачи решают посредством интерполяционных методов. Трудно преувеличить значение теории приближения функций при разработке методов компьютерной графики. В рамках проведенных исследований выделена процедура, которой новые степени воли вводятся не путем уменьшения размеров КЭ (h уточнения), а просто добавлением новых мономов высших порядков. В статье сознательно фиксируется внимание преимущественно на конструктивном аспекте метода, чтобы сразу вовлечь пользователей в практику разработки программ, реализующих когнитивную функцию компьютерной графики. Прагматическая сторона подхода составляет особенность и существенное преимущество работы – в ней геометрический и вычислительный анализ осуществляются просто и наглядно.

Ключевые слова: *теория приближения функций, трансформация, конечные элементы, лагранжевые и серендиповые семьи.*

Введение

Задачи приближающихся функций занимают ведущее место в прикладной математике. Существует мнение, что практически все прикладные задачи – это задачи теории приближения функций (ТПФ). Следовательно эти задачи сводятся к определению функций, которые хорошо описывают процесс и легко вычисляются. Способы построения таких функций специфичны для разных применений математики.

Благодаря бурному развитию метода конечных элементов (МКЭ) в ТПФ и алгоритмах компьютерной графики для приближенного представления функций (кривых и поверхностей), уже почти 50 лет широко используются кусочно-полиномиальные функции одной и многих переменных. При этом в зависимости от задачи и желаемой простоты алгоритма пользуются кусочно полиномиальными аппроксимациями с разными требованиями гладкости в местах стыковки полиномов. Повышенный интерес

специалистов к полиномам объясняется не только историческими традициями интерполяции функций одного аргумента. Прежде всего это привлекательные интерполяционные и вычислительные свойства полиномов, а также возможность обобщения для функций с двумя и тремя аргументами.

Приближение функций многих переменных существенно труднее, чем функций одной переменной. Это обусловлено не только ростом измеримости задачи, но и рядом принципиальных затруднений [1]. Именно поэтому в МКЭ с момента его возникновения (1943) до появления серендиповых элементов (1968) специалисты использовали исключительно лагранжевые полиномы в 2D и 3D, которые строятся как произведение одномерных полиномов Лагранжа. При этом внутри конечных элементов появляются «лишние» внутренние узлы, увеличивающие объем вычислений. Межэлементную непрерывность гарантируют узлы на контуре КЭ, поэтому внутренние узлы лагранжевой интерполяции можно удалить, чтобы уменьшить порядок системы линейных алгебраических уравнений. В результате изобретательской селекции появились первые полезные элементы серендипной семьи. Эти элементы более эффективны с вычислительной точки зрения, но очень плохо поддаются любой формализации [2].

Особое значение серендиповых конечных элементов заключается в том, что при их конструировании и исследовании были найдены новые эффективные методы, позволившие выявить «скрытые» параметры интерполяции. В первый раз было подтверждено, что в отличие от лагранжевых частей на серендиповых элементах существует множество решений задачи приближения функций полиномами.

История полиномиальной интерполяции начиналась с формулы Лагранжа (последняя четверть XVIII века). Считается [3], что интерполяционную формулу Лагранжа первым применил Варинг. Затем независимо от Варинга ее открыл Эйлер в 1783 г. Публикация Лагранжа появилась в 1795 г. По мнению некоторых историков, эта формула была известна еще Ньютону (конец XVII века). В развитие теории полиномиальной интерполяции функций одной переменной внесли свой вклад многие известные ученые: Гаусс, Стирлинг, Бессель, Эверетт, Вандермонд, Чебышев, Эрмит и др. Классическая формула Лагранжа без труда обобщается на двумерные области (прямоугольники) и трехмерные (прямоугольные параллелепипеды). Этим объясняется некоторый интерес пользователей МКЭ к элементам лагранжевой семьи [4]. Первые конечные элементы серендиповой семьи были неожиданно открыты в 1968 г. [5] путем изобретательного подбора базисных функций (функций формы). Впоследствии эти результаты были подтверждены методом обратной матрицы и процедурой Тейлора [6] систематического генерирования функций формы. Так возникла ошибочная уверенность, что задача интерполяции на серендиповом конечном элементе имеет единое решение. Кстати, на лагранжевых конечных элементах единственность решения действительно имеет место. Неудивительно, что поиском альтернативных моделей некоторое время никто не занимался.

Основные задачи:

- выявить преимущества серендиповых конечных элементов;
- изучить роль когнитивной компьютерной графики в информационных технологиях конструирования стандартных и модифицированных элементов.

В статье анализируются методы систематизации и обобщения научных исследований в сфере теории приближения функций, а также трансформации в аспекте исследования лагранжевых двумерных конечных элементов.

Основная часть. Альтернативные модели серендиповых конечных элементов появились в 1982 г. [7], когда для конструирования функций формы серендиповых КЭ

был предложен универсальный вероятностно-геометрический метод. В последующих работах [8–10] были развиты именно геометрические аспекты этого подхода, и метод стал удобным, наглядным и простым. Геометрические методы аппроксимации функций постепенно вытесняют традиционные методы матричной алгебры. Это особенно отчетливо ощущается в МКЭ, где успешно работают Ю. Уачспресс, Р. Маклеод, Б. Барнхилл, а также другие авторы [10].

Была исследована проблематика трансформации лагранжевых двумерных конечных элементов в конечные элементы серендиповой семьи. В качестве конкретного объекта мы рассматриваем двумерную КЭ бикубической интерполяции: лагранжевую модель (16 узлов) и серендиповую модель (12 узлов). На рис. 1а «лишние» внутренние узлы обозначены крестиками. На рис. 1б в треугольнике Паскаля пунктиром ограничены 12 слагаемых интерполяционного полинома серендиповой модели. В стандартных элементах серендиповой семьи количество параметров интерполяционного полинома равно количеству узлов [2, 4–6].

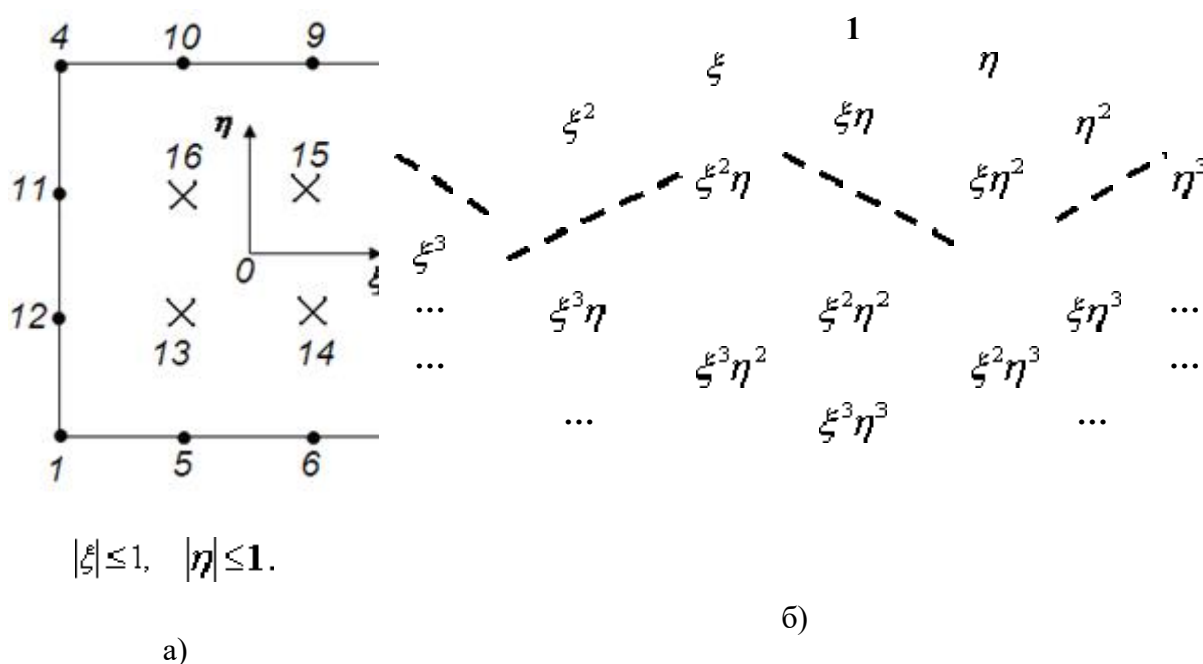


Рис. 1. Бикубическая интерполяция: а) две схемы расположения узлов; б) фрагмент треугольника Паскаля

Интерполяционный полином в форме Лагранжа для функций $f(\xi, \eta)$ имеет вид:

$$P(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^M N_i(\xi, \eta) \cdot f_i, \quad (1)$$

где $N_i(\xi, \eta)$ – функции формы КЭ; f_i – известные значения интерполируемой функции; $M = 16$ для лагранжевой модели; $M = 12$ для серендипной модели.

Чтобы построить функции формы лагранжевой семьи, достаточно найти четыре коэффициента Лагранжа (по количеству узлов в координатном направлении). На пример,

$$L_1(\xi) = \frac{1}{16}(1 - 9\xi^2)(\xi - 1); \quad L_5(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi); \quad (2)$$

$$L_6(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi); L_2(\xi) = \frac{1}{16}(1 - 9\xi^2)(\xi + 1).$$

Если в формулах (2) заменить ξ на η , получим соответственно $L_1(\eta)$, $L_{12}(\eta)$, $L_{11}(\eta)$ и $L_4(\eta)$. Теперь нетрудно найти $N_i(\xi, \eta)$ как произведение соответствующих лагранжевых коэффициентов одной переменной. На пример,

$$N_7(\xi, \eta) = L_2(\xi) \cdot L_{12}(\eta); N_{16}(\xi, \eta) = L_5(\xi) \cdot L_{11}(\eta).$$

Далее по формуле (1) определяется полином, имеющий 16 параметров (рис. 1б).

Для получения КЭ серендиповой семьи нужно удалить внутренние узлы (рис. 1а) таким образом, чтобы не нарушить интерполяционную гипотезу

$$N_i(\xi_k, \eta_k) = \delta_{ik}, i, k = \overline{1, 12}, \quad (3)$$

сохранить «весовой» баланс

$$\sum_{i=1}^{12} N_i(\xi, \eta) = 1, \quad (4)$$

а также обеспечить межэлементную непрерывность (согласованность). Б. Айронс, О. Зенкевич и И. Эргатудис первыми поняли, как это можно сделать. Функции, которые они получили, имеют вид:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{32}(1 + \xi_i \xi)(1 + \eta_i \eta)(9(\xi^2 + \eta^2) - 10), i = \overline{1, 4}, \xi_i, \eta_i = \pm 1; \quad (5)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 + \xi^2)(1 + \eta_i \eta)(1 + 9\xi_i \xi), i = 5, 6, 9, 10; \eta_i = \pm 1, \xi_i = \pm \frac{1}{3}; \quad (6)$$

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{9}{32}(1 + \eta^2)(1 + \xi_i \xi)(1 + 9\eta_i \eta), i = 7, 8, 11, 12; \xi_i = \pm 1, \eta_i = \pm \frac{1}{3} \quad (7)$$

Это стандартный базис КЭ серендиповой семьи. Название *серендиповая семья* предложил О. Зенкевич, имея в виду неожиданность открытия этих элементов. Несмотря на определенные недостатки серендиповых элементов, специалисты считают их полезными и эффективными. Нетрудно убедиться, что полиномы (5–7) обеспечивают межэлементную непрерывность, а также удовлетворяют условиям (3) и (4). Отметим некоторые недостатки стандартного базиса:

1) неестественное распределение по узлам равномерной массовой силы (наличие отрицательных нагрузок в угловых узлах);

2) чрезмерное количество кратных нулей в узлах, что увеличивает «жесткость» модели.

Предложенные предшественниками традиционные методы построения серендиповых полиномов не позволяют установить причины этих недостатков, а тем более устранить их. Надо коренным образом изменить подходы к задачам приближения функций полиномами серендиповой семьи. Новые подходы есть. Математика (особенно прикладная) всегда дает больше, чем от нее ожидают.

Первые попытки исследовать «анатомию» серендиповых полиномов (5–7) опирались на известный метод сечений. Чтобы получить общее представление о «рельефе» функции формы $N_i(\xi, \eta)$, достаточно воспользоваться пересекающимися плоскостями $\xi = const, \eta = const, N_i(\xi, \eta) = const$. Исключительное значение имеют изолинии нулевого уровня, образующие когнитивный узор в плоскости носителя.

Информативность этого узора (особенно для $N_i(\xi, \eta)$, $i = \overline{1,4}$) трудно переоценить. Оказывается, что существует множество изолиний, которые проходят через узлы на границе КЭ и при этом сохраняют свойства $N_i(\xi, \eta)$. Так родилась гипотеза о существовании альтернативных функций формы на КЭ высших порядков. Эта гипотеза полностью согласуется с основной теоремой алгебры Гаусса, что придает уверенности и стимулирует поиски новых подходов к конструированию альтернативных полиномов. Первые успехи в этом направлении связаны с геометрической вероятностью. На простых КЭ (треугольник – 3 узла и прямоугольник – 4 узла) вероятностное содержание функций формы было установлено ранее. Вероятно, геометрический способ конструирования функций формы использует разбиение сложного КЭ на прямоугольники и треугольники. В некоторых моделях одна сторона треугольника – кривая второго порядка. На рис. 2 пунктиром изображены линии нулевого уровня функций $N_1(\xi, \eta)$ и $N_5(\xi, \eta)$ стандартного базиса бикубической интерполяции.

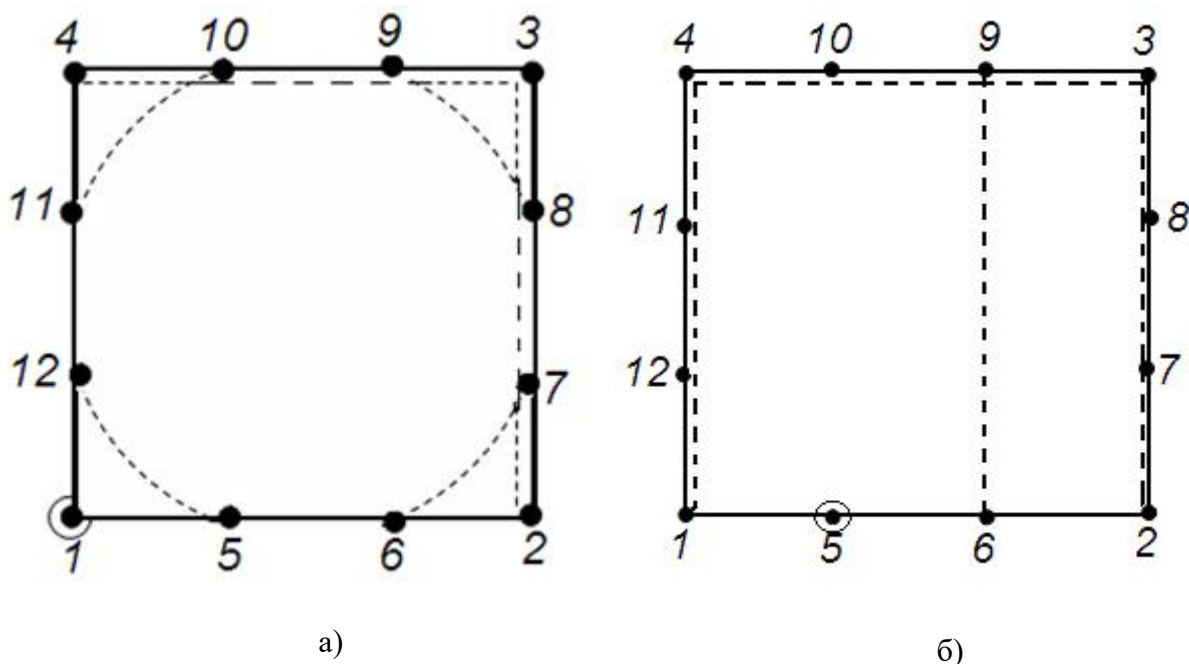


Рис. 2. Линии нулевого уровня: а) для $N_1(\xi, \eta)$; б) для $N_5(\xi, \eta)$

Для вероятностного метода рис. 2 дает правило разбиения сложного КЭ на простые подэлементы. Немаловажную роль рис. 2 играет в геометрическом моделировании. Анализ формул (5), (6) (для $i = 1$, $i = 5$) и внимательное изучение изолиний нулевого уровня (рис. 2) дают новые знания об «анатомии» функций формы серендиповой семьи. Есть основания утверждать, что поверхность $N_i(\xi, \eta)$ конструируется из фрагментов плоскостей и поверхностей второго порядка. Например, $N_1(\xi, \eta)$ – это суперпозиция гиперболического параболоида (гипара)

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

и параболоида вращения

$$N_1''(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(9(\xi^2 + \eta^2) - 10).$$

Кстати, гипар – это суперпозиция двух плоскостей. Поверхность $N_5(\xi, \eta)$ конструируется из гипара

$$N'_5(\xi, \eta) = \frac{3}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)$$

и параболического цилиндра

$$N''_5(\xi, \eta) = \frac{3}{4}(1 + \xi)(1 - 3\xi).$$

Есть также другие композиции.

Чтобы автоматизировать процедуру конструирования функций формы серендиповых КЭ, создан каталог плоскостей и поверхностей второго порядка, проходящих через узлы КЭ и точку $(\xi_i, \eta_i, 1)$. С помощью этого комплекса открыты новые модели серендиповых элементов бикубической интерполяции, выявлены «скрытые» параметры полиномов. Таким образом, при фиксированном количестве узлов (12) количество параметров бикубического интерполирования можно изменять от 12 до 16. Понятно, что традиционные алгебраические методы приближения функций не охватывают все эти случаи. Изолинии нулевого уровня серендиповых функций формы иллюстрируют неожиданную связь с известными узловыми линиями, которые открыл экспериментально немецкий физик Э. Хладни (1787). Круги Эйлера и фигуры Хладни можно считать первыми графическими образами в истории когнитивной графики.

Выводы

Реализована трансформация лагранжевых двумерных конечных элементов в конечные элементы серендиповой семьи. Показано, что наиболее плодотворные применения модифицированных конечных элементов касаются аппроксимации, в которых используют процедуру уточнения. Задача восстановления состоит в том, что функция известна на некотором множестве точек и нужно разработать алгоритм приближенного вычисления функции на более широком множестве точек. В статье сознательно фиксируется внимание преимущественно на конструктивном аспекте метода, чтобы сразу вовлечь пользователей в практику разработки программ, реализующих когнитивную функцию компьютерной графики. В этой процедуре новые степени воли вводятся не путем уменьшения размеров конечных элементов (h уточнения), а просто добавлением новых мономов высших порядков. Прагматическая сторона подхода составляет особенность и существенное преимущество работы – в ней геометрический и вычислительный анализ осуществляется просто и наглядно.

Литература

1. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Геометрическая теория приближений: в 2 ч. Ч. 1. Классические понятия и конструкции приближения множествами. – М.: ОнтоПринт, 2017. – 344 с.
2. Вакарчук С.Б., Вакарчук М.Б. Неравенства типа Колмогорова для аналитических функций одной и двух комплексных переменных и их приложение к теории аппроксимации // Укр. мат. журн. 2011. Т. 63, № 12. – С. 1579–1601.
3. Рамазанов А.-Р.К., Алиева Р.Ш. О гладкой интерполяции локальными полиномиальными сплайнами // Вестник ДГУ. Сер.: Естественные науки. 2022 Т. 37, № 1. – С. 32–39.
4. Трынин А.Ю. Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. высш. учебных заведений. Математика. 2016. № 3. – С. 72–81.

5. Трынин А.Ю. Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер.: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 3. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/neobhodimye-i-dostatochnye-usloviya-ravnomernoy-na-otrezke-sink-approksimatsii-funktsiy-ogranichennoy-variatsii> (дата обращения: 28.02.2022).
6. Трынин А.Ю. Равномерная сходимость процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля на одном функциональном классе // УМЖ. 2018. № 2. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/ravnomernaya-shodimost-protsessov-lagranzha-shturma-liuvillya-na-odnom-funktsionalnom-klasse> (дата обращения: 28.02.2022).
7. Трынин А.Ю. Сходимость процессов Лагранжа–Штурма–Лиувилля для непрерывных функций ограниченной вариации // Владикавказский математический журнал. 2018. № 4. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/shodimost-protsessov-lagranzha-shturma-liuvillya-dlya-nepreryvnyh-funktsiy-ogranichennoy-variatsii> (дата обращения: 28.02.2022).
8. Фарков Ю.А. О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 5. – С. 185–212.
9. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А. Наилучшие методы приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве $H_q, \rho, 1 \leq q \leq \infty, 0 < \rho \leq 1$ // Сиб. мат. журнал. 2016. Т. 57, № 2. – С. 469–478.
10. Шабозов М.Ш., Юсупов Г.А., Заргаров Дж.Дж. О наилучшей совместной полиномиальной аппроксимации функций и их производных в пространствах Харди // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2021. Т. 27, № 4. – С. 239–254.
11. Юкин И.В. Интерполяция навигационной функции сплайном лагранжева типа // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2020. № 1. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/interpolyatsiya-navigatsionnoy-funktsii-splaynom-lagranzheva-tipa> (дата обращения: 28.02.2022).

Поступила в редакцию 20 июня 2022 г.

UDC 519.65

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-3-34-41

Problems of Approximation of Functions from Lagrangian to Serendipal Polynomials

M.M. Shikhshinatova

Dagestan State Pedagogical University; Russia, 367003, Makhachkala, M. Yaragsky st., 57; shichmum_2006@mail.ru

The article deals with the topical problems from the theory of approximation of functions in the direction of problems of approximation of functions from Lagrangian to serendipal polynomials. The purpose of the article is the transformation of two-dimensional Lagrangian finite elements into finite elements of a serendipal family. As a result of the review carried out in the article, it is shown that, first of all, the application of the theory of approximation of functions includes the problems of approximating special and elementary functions, which are difficult to calculate. For example, integral sine, Bessel functions, trigonometric and inverse trigonometric functions, logarithmic and expo-

nential functions, etc. An important role is played by the methods of the theory of approximation of functions in restoration problems that often arise in various applied sciences: meteorology, geology, topography, etc. The recovery problem implies the fact that the function is known on a certain set of points and it is necessary to develop an algorithm for the approximate calculation of the function on a wider set of points. These problems are solved by means of interpolation methods. It is difficult to exaggerate the importance of the theory of approximation of functions in the development of computer graphics methods. As a part of the research, a procedure was identified in which new degrees of freedom are introduced not by reducing the size of the FE (h refinement), but simply by adding new higher-order monomials. The work deliberately focuses attention mainly on the constructive aspect of the method in order to immediately involve users in the practice of developing programs that implement the cognitive function of the computer graphics. The pragmatic side of the approach is a feature and a significant advantage of the work, where the geometric and computational analysis is carried out simply and clearly.

Keywords: *function approximation theory, transformation, finite elements, Lagrangian and serendipity families.*

Received 20 June 2022