УДК 681.142.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-3-30-33

А.М. Магомедов, Р.А. Якубов

Некоторые подходы к определению четности числа разбиений прямоугольной полосы[2]

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; magomedtagir1@yandex.ru, ramazan.dgu@mail.ru

Вычисление количества всевозможных разбиений прямоугольника с высотой n и шириной m на плитки 1×2 (обозначение $T(m,n)$) сопряжено даже при относительно небольших m и n с обширным списком многоразличных проблем. При этом ценность представляет не только решение конкретной проблемы из этого списка, но и разнообразие подходов к решению. В статье обсуждаются подходы к решению проблемы определения четности значения $T(m,n)$. Заметная роль при этом отведена компьютерному сопровождению исследования, выявлению закономерностей в цифровом материале – результате вычислительных экспериментов, формулировке их в виде математических утверждений с последующим доказательством правильности.

Ключевые слова: *прямоугольник, рекурсия, разбиение, четность.*

Введение

Число полных разбиений (п. р.) вырезанного из клетчатого листа прямоугольника с высотой n и шириной m на плитки 1×2 будем обозначать $T(m,n)$; когда значение параметра m известно из контекста, будем применять краткое обозначение a_n. Задаче вычисления a_n посвящена обширная литература ([1–12]), что объясняется актуальностью задачи для прикладных областей физики, химии и математики. Статья посвящена вопросу определения четности значений a_n.

1. Случаи $\boldsymbol{m = 3}$ и $\boldsymbol{m = 4}$. Для $m = 3$ и $m = 4$ известны рекуррентные формулы:

$$a_n = 4 \cdot a_{n-2} - a_{n-4} \quad (1)$$

и

$$a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4} \quad (2)$$

соответственно.

Формула (1) совместно с равенствами $a_0 = 1,\ a_2 = 3$ позволяет легко вычислить a_n для произвольного чётного n, $n \geq 4$: $a_4 = 4 \times 3 - 1 = 11$, $a_6 = 4 \times 11 – 3 = 41$, $a_8 = 4 \times 41 – 11 = 153$ и т. д. ($a_n = 0$ при нечетных n). Поскольку очередное значение a_n равно разности четного ($4a_{n-2}$) и нечетного (a_{n-4}) значений, то справедливо

Утверждение 1.1. Если $m = 3$ и n четно, то значение a_n нечетно.

Приведем «геометрическое» доказательство. Существует в точности одно п. р., где все плитки уложены вертикально (обозначим его X_0), а п. р., где все плитки уложены горизонтально, не существует. Для п. р. X, где некоторые плитки уложены горизон-

[2] Работа выполнена при поддержке отдела математики и информатики ДФИЦ РАН.

тально, остальные – вертикально, рассмотрим п. р. Y следующего вида: если в X горизонтальная плитка покрывает в некоторой строке i соседние две клетки: $(i,\ j)$ и $(i,\ j+1)$, $j=1$ или 2, то в Y горизонтальная плитка покрывает в строке i клетки $(i, 3-j)$ и $(i,\ 4-j)$; если в X вертикальная плитка покрывает клетки $(i,\ j)$ и $(i+1,$ $j)$, то в Y вертикальная плитка покрывает клетки $(i,\ 4-j)$ и $(i+1{,}4-j)$. Очевидно, для заданного п. р. X, содержащего как вертикальные, так и горизонтальные плитки, п. р. Y определяется единственным образом.

Таким образом, при четном n множество п. р. прямоугольника с шириной 3 состоит из непересекающихся пар п. р. вида $(X,\ Y)$ и п. р. X_0, следовательно, число п. р. нечетно. Утверждение доказано.

Утверждение 1.2. Для четности a_n в случае $m=4$ необходимо и достаточно выполнение условия $(n + 1) \bmod (m + 1) = 0$ (что в нашем случае равносильно условию «$n + 1$ и $m + 1$ взаимно просты»).

Доказательство. Будем называть $a_{n-1}, a_{n-2}, a_{n-3}, a_{n-4}$ *базой* элемента a_n. Поскольку умножение на нечетное число 5 сохраняет свойство четности / нечетности a_{n-2}, то четность числа

$$a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$$

совпадает с четностью суммы $a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} + a_{n-4}$ элементов базы, и следовательно, совпадает с четностью значения A_n – количества четных элементов в базе a_n.

Непосредственным вычислением значений: $a_0=1,\ a_1=1, a_2=5, a_3=11$ – убедимся, что первые четыре элемента последовательности $a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3,$ $\boldsymbol{a_4}, a_5, a_6, a_7, a_8, \boldsymbol{a_9},\ a_{10},\ a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ \boldsymbol{a_{14}},\ a_{15},\ a_{16}, a_{17}. \dots$

– нечетные числа, т. е. $A_4 = 0$ и a_4 – четное число. Т. к. $A_5 = A_6 = A_7 = A_8 = 1$, то $a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8$ – нечетные числа, а a_9 – четное число. Продолжая процесс, получим, что четными являются $a_4, a_9, a_{14}, \dots$ (и только они), т. е. числа a_n, для которых $(n+1)\ mod\ (m+1) = 0$, ч.т.д.

2. Случай произвольного *m*.

Подход, приведенный в данном пункте, заимствован из [4].

Вместо клеток удобно рассматривать точки плоскости, соответственно роль плитки играют две соседние (по горизонтали или по вертикали) точки. В декартовой системе координат рассмотрим квадрат с вершинами в точках $(0;0)$, $(n-1;0)$, $(n-1;\ n-1)$, $(0;n-1)$; правую и верхнюю стороны квадрата будем называть его границей, точки $(x;\ n-1)$ и $(n-1;\ x)$ будем называть *симметричными,* $0 \le x < n-1$. В дальнейшем такой квадрат, у которого удалена точка $(n-1, n-1)$ и, возможно, некоторые другие точки границы, будем называть *фигурой*.

Определение. Фигура называется *правильной*, если из каждой пары симметричных точек удалена в точности одна.

Утверждение [4]:

а) Если из правильной фигуры удалить плитки, содержащие все точки границы, то результат будет правильной фигурой тогда и только тогда, когда каждая удаляемая плитка содержит ровно одну точку границы. Имеется только один способ такого удаления плиток.

б) Число п. р. фигуры нечетно, если и только если фигура правильная.

Теорема 2.1 [4]. $T(m,n)$ нечетно тогда и только тогда, когда числа $m+1$ и $n+1$ взаимно просты.

3. Некоторые результаты вычислительных экспериментов. Будем считать, что m чётное. Известно, что $T(m,m)$ кратно $2^{\frac{m}{2}}$ (Christine Bessenrodt, Pachter 1997). Следующие утверждения первоначально были сформулированы на основе закономерностей в результатах вычислительных экспериментов.

Предложение 3.1. $T(m,\ 2m)$ и $T(m,\ m \pm 1)$ нечётны.

Доказательство.

1) Общий делитель чисел $m + 1$ и $2m + 1$ является и делителем их разности, т. е. числа m. Но $m + 1$ и m не имеют общих делителей, отличных от 1. Нечетность $T(m,$ $2m)$ доказана.

2) Очевидно, что общий делитель чисел $m+1$ и $m + 2$ ($m + 1$ и m) был бы и делителем их разности, т. е. числа 1; следовательно, эти числа взаимно просты. Остается применить теорему 2.1.

Предложение 3.2. При $n = (m+1) \cdot i + m$ значение $T(m,\ n)$ чётно при любом $i = 0, 1,\ 2, \ldots$

Доказательство. Числа $m + 1$ и $n + 1 = (m + 1) \cdot i + m + 1$ обладают общим делителем $m + 1$, т. е. не взаимно просты.

Предложение 3.3. $T(m,\ n)$ чётно:

а) при $m =\ 8$ или $26 -$ если и только если $n\ mod\ 3\ = 2$;

б) при $m = 24 -$ если и только если $n\ mod\ 5\ = 4$.

Доказательство. Ограничимся доказательством пункта (б): значения $24 + 1$ и $n + 1 = 5k + 4 + 1$ имеют общим делителем 5, т. е. не взаимно просты. Остается сослаться на теорему 2.1.

Заключение

Приведем пример применения к одной вычислительной коллизии.

В таблицу, приведенную в весьма содержательной работе [5, 1980 г.], вкрались незначительные погрешности (видимо, объяснимые ограниченными возможностями вычислительной техники того времени): в качестве значений T(10, 8) и T(11, 8) указаны 1031151240 и 8940739821 соответственно. Необязательно знать истинные значения (1031151241 и 8940739824), чтобы заметить расхождение с приведенным выше результатом работы [4]: T(10, 8) не может равняться четному числу, поскольку числа 10 + 1 и 8 + 1 взаимно просты; аналогично, T(11, 8) не может равняться нечетному числу, так как числа 11 + 1 и 8 + 1 не взаимно просты.

В заключение отметим, что было бы интересно вывести приведенные выше результаты непосредственно из известной формулы для $T(m,n)$, изложенной в [1].

Литература

1. *Kasteleyn P.W.* The statistic of dimers on a lattice I: The number of dimer arrangements on quadratic lattice // Physica. 1961. Vol. 27. – Pp. 1209–1225.

2. *Temperley H.N.V. and Fisher M.E.* Dimer problem in statistical mechanics – an exact result // Phil. Mag. 1961. Vol. 6. – Pp. 1061–1063.

3. *Ловас Л., Пламмер М.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии. – М.: Мир, 1998. – 653 с.

4. *Кохась К.* Разбиение ацтекских диамантов и квадратов на домино // Теория представлений, динамические системы, комбинаторные методы. XVI, Зап. научн. сем. ПОМИ, Т. 360, 2008. – С. 180–230.

5. *Klarner D. and Pollack J.* Domino tilings of rectangles with fixed width. Discrete Mathematics. 1980. Vol. 32. – Pp. 45–52.

6. *Магомедов А.М., Магомедов Т.А.* Компьютерный вывод рекуррентных формул разбиения прямоугольника // X Белорусская математическая конференция: тез. докл. Межд. науч. конф. г. Минск, 3–7 ноября 2008 г. Ч. 4. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2008.– С. 44.

7. *Магомедов А.М., Лавренченко С.А.* Вычислительные средства C# для решения задачи перечисления разбиений прямоугольника // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2020. Т. 35, вып. 4. – С. 13–26.

8. *Perepechko S.N.* Estimation of molecular freedom in the dimer model by the EFM method // Proceedings of the VI international conference "Mathematics, its applications and mathematical education" (MAME-2017). – Ulan-Ude, 2017. – Pp. 289–294.

9. Перепечко С.Н. Простые выражения для оценки параметра *молекулярная свобода* в задаче о димерах // Вестник ТвГУ. Сер.: Прикладная математика. 2018. № 2. – С. 27–47.

10. *Магомедов А.М., Магомедов Т.А., Лавренченко С.А.* Взаимно-рекуррентные формулы для перечисления разбиений прямоугольника // Прикладная дискретная математика. 2019. № 46. – С. 108–121.

11. *Магомедов А.М., Лавренченко С.А.* Вычислительные средства C# для решения задачи перечисления разбиений прямоугольника // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер. 1: Естественные науки. 2020. Т. 35, вып. 4. – С. 13–26.

12. *Раджабова Н.Ш.* Замощение клетчатой полосы шириной 4 // Информатика в школе. 2022. № 1 (174). – С. 81–84.

Поступила в редакцию 23 августа 2022 г.

UDC 681.142.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-3-30-33

Some Approaches to Determining the Parity in the Number of Partitions of a Straight-Carbon Strip

A.M. Magomedov, R.A. Yakubov

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a;magomedtagir1@yandex.ru, ramazan.dgu@mail.ru

Computing $T(m,n)$, the number of possible partitions of a rectangle with height n and width m into 1×2 tiles, is associated - even with relatively small m and n - with a long list of many different problems. At the same time, not only the solution of a specific problem from this list is valuable, but also the variety of approaches to the solution. The article attempts to demonstrate some approaches to solving the problem of determining the parity of the value $T(m,n)$. A significant role s given to the computer support – the identification of patterns in the numerical material, the result of computational experiments, their formulation in the form of mathematical statements with subsequent proof of correctness.

Keywords: *rectangle, recursion, partitioning, parity.*

Received 23 August 2022