УДК 517.956.32

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-3-19-24

Ж.А. Балкизов, Р.Х. Макаова

Краевая задача для одного смешанно-гиперболического уравнения третьего порядка

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН; Россия, Кабардино-Балкарская Республика, 360000, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89А; Giraslan@yandex.ru, Makaova.ruzanna@mail.ru

В работе исследуется вопрос об однозначной разрешимости локальной краевой задачи типа задачи Трикоми для одного смешанно-гиперболического уравнения третьего порядка. Исследуемое уравнение совпадает с обыкновенным неоднородным уравнением Аллера в одной части области и модельным гиперболическим уравнением третьего порядка в другой.

Относительно следов искомого решения в работе найдены соответствующие фундаментальные соотношения, а затем с помощью метода Трикоми решение исследуемой задачи было выписано в явном виде. Получены достаточные условия на заданные функции, обеспечивающие регулярность найденного решения исследуемой задачи.

Ключевые слова: *волновое уравнение, модельное гиперболическое уравнение третьего порядка, уравнение Аллера, метод Трикоми.*

Введение. Постановка задачи

В настоящее время вызывают большой практический и теоретический интерес исследования локальных и нелокальных краевых задач для гиперболических уравнений третьего порядка. Известно [1–3], что модифицрованные уравнения диффузии, являются уравнениями в частных производных гиперболического типа третьего порядка.

В данной работе ставится и исследуется вопрос однозначной разрешимости локальной краевой задачи типа задачи Трикоми для одного смешанно-гиперболического уравнения третьего порядка.

В евклидовой плоскости точек (x, y) рассматривается уравнение вида

$$f(x,y)=\begin{cases} u_y - au_{xx} - bu_{xxy}, & y>0, \\ u_{xxx}+u_{xxy}-u_{xyy}-u_{yyy}, & y<0, \end{cases} \tag{1}$$

где a, b – заданные положительные числа; $f(x, y)$ – известная функция; $u = u(x, y)$ – искомая действительная функция.

Уравнение (1) при $y > 0$ совпадает с неоднородным уравнением Аллера [4]:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(au + b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + f(x,y), \tag{2}$$

которое относят к псевдопараболическим уравнениям [5], хотя оно является уравнением гиперболического типа [6, с. 72].

А при $y<0$ уравнение (1) представляет собой гиперболическое уравнение вида

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(u_{xx}-u_{yy}\right)=f(x,y). \tag{3}$$

Краевые задачи для различных смешанно-гиперболических уравнений исследовались в работах [7–11].

Пусть $\Omega=\Omega^{+}\cup\Omega^{-}\cup A_0A_r$, $\Omega^{+}=\{(x,y):\ 0<x<r,\ 0<y<T\}$, $A_0A_r=\{(x,0):0<x<r\}$, а Ω^{-} – область, ограниченная характеристиками $A_0C:x+y=0$, $A_rC:x-y=r$ уравнения (3) при $y<0$, выходящими из точек $A_0=(0,0)$, $A_r=(r,0)$ и пересекающимися в точке $C=\left(\frac{r}{2},-\frac{r}{2}\right)$.

Регулярным в области Ω *решением уравнения* (1) *назовем функцию* $u=u(x,y)$, *такую что* $u\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega^{+})\cap C^{i,j}_{x,y}(\Omega^{-})$, $\left(i+j=3,\ i=\overline{0,3},\ j=\overline{0,3}\right)$, $u_{xxy}(x,0)\in L_1(A_0A_r)$, *удовлетворяющую уравнению* (1).

Исследуется следующая

Задача. *Найти регулярное в области* Ω *решение* $u=u(x,y)$ *уравнения (1), удовлетворяющее следующим краевым условиям:*

$$u(0,y)=\tau(y),\quad u(r,y)=\tau_r(y),\quad 0\le y<T, \tag{4}$$

$$u[\theta_0(x)]=\phi_1(x),\quad 0\le x\le r, \tag{5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}[\theta_0(x)]=\phi_2(x),\quad 0\le x\le r, \tag{6}$$

где $\theta_0(x)=\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)$ – аффикс точки пересечения характеристики, выходящей из точки $(x,0)\in A_0A_r$, с характеристикой A_0C; $\tau(y)$, $\tau_r(y)$ – заданные на отрезке $y\in[0,T[$ функции; $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ – заданные на $x\in[0,r]$ функции, причем выполнено условие согласования $\tau(0)=\phi_1(0)$.

Теорема существования и единственности

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть заданные функции* $\tau(y)$, $\tau_r(y)$, $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$ *и* $f(x,y)$ *таковы, что*

$$\tau(y),\ \tau_r(y)\in C^1[0,T[\cap C^3]0,T[,$$
$$\phi_1(x),\ \phi_2(x)\in C[0,r]\cap C^3]0,r[,\ \phi_1'(x),\ \phi_2'(x)\in L_1[0,r],$$
$$f(x,y)\in C(\overline{\Omega}).$$

Тогда задача (4)–(6) для уравнения (1) имеет единственное регулярное решение.

Доказательство. Пусть существует решение $u=u(x,y)$ задачи (4) – (6) для уравнения (1) и пусть

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le r, \tag{7}$$

$$u_y(x,0)=\psi(x),\ 0<x<r. \tag{8}$$

Из (2), переходя к пределу при $y \to +0$, с учетом обозначений (7) и (8) находим фундаментальное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^+ на линию $y=0$ в виде

$$\psi(x) - a\varphi''(x) - b\psi''(x) = f(x,0), \quad 0 < x < r, \tag{9}$$

а из краевых условий (4) имеем, что

$$\varphi(0) = \tau(0), \ \varphi(r) = \tau_r(0), \tag{10}$$

$$\psi(0) = \tau'(0), \ \psi(r) = \tau_r'(0). \tag{11}$$

Далее найдем фундаментальное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^- на линию $y=0$. Для этого найдем общее решение уравнения (3).

В характеристических координатах $\xi = x + y$, $\eta = x - y$ уравнение (3) перепишется в следующем виде:

$$u_{\xi\xi\eta} = \frac{1}{8} f\left(\frac{\xi+\eta}{2}; \frac{\xi-\eta}{2}\right). \tag{12}$$

Интегрируя уравнение (12) сначала два раза по первой переменной ξ, а затем один раз по второй переменной η, находим, что

$$u(\xi,\eta) = g_1(\xi) + \xi\, g_2(\eta) + g_3(\eta) + \frac{1}{8}\int_0^\eta\int_0^\xi (\xi - s) f\left(\frac{s+t}{2}; \frac{s-t}{2}\right) ds dt, \tag{13}$$

где g_k, $k = \overline{1,3}$, – произвольные функции своих аргументов.

Возвращаясь к прямоугольным координатам (x,y), из (13) получим общее решение уравнения (3) в виде

$$u(x,y) = g_1(x+y) + (x+y) g_2(x-y) + g_3(x-y) + \frac{1}{8}\int_0^{x-y}\int_0^{x+y} (x+y-s) f\left(\frac{s+t}{2}; \frac{s-t}{2}\right) ds dt. \tag{14}$$

Удовлетворяя (14) заданным краевым условиям (5), (6) с учетом обозначений (7) и (8), получим систему относительно функций g_k, $k = \overline{1,3}$:

$$\begin{cases} g_1(x) + x\, g_2(x) + g_3(x) = \varphi(x) - \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^x\int_0^x (x-s) f\left(\frac{s+t}{2}; \frac{s-t}{2}\right) ds dt, \\ g_1(0) + g_3(x) = \phi_1(x), \\ g_1'(0) + g_2(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\phi_2(x). \end{cases}$$

Отсюда получаем, что

$$g_1(x) = \varphi(x) - \frac{x}{\sqrt{2}}\phi_2(x) + x g_1'(0) - \phi_1(x) + g_1(0) - \frac{1}{8}\int_0^x\int_0^x (x-s) f\left(\frac{s+t}{2}; \frac{s-t}{2}\right) ds dt,$$

$$g_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2(x) - g'_1(0),$$

$$g_3(x) = \phi_1(x) - g_1(0).$$

Подставляя найденные функции g_k, $k = \overline{1,3}$, из (14) получаем решение задачи (5)–(7) для уравнения (3) в виде

$$u(x,y)=\varphi(x+y)+\frac{x+y}{\sqrt{2}}\left[\phi_2(x-y)-\phi_2(x+y)\right]+\phi_1(x+y)-\phi_1(x-y)-$$

$$-\frac{1}{8}\int_{x-y}^{x+y}\int_{0}^{x+y}(x+y-s)f\left(\frac{s+t}{2};\frac{s-t}{2}\right)dsdt. \quad (15)$$

Из (15) при условии (8) находим фундаментальное соотношение между функциями $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, принесенное из области Ω^- на линию $y=0$ в виде

$$\psi(x)=\varphi'(x)-F(x), \qquad 0<x<r, \quad (16)$$

$$F(x)=\sqrt{2}x\phi_2'(x)+2\phi_1'(x)+\frac{1}{4}\int_0^x(x-s)f\left(\frac{s+x}{2};\frac{s-x}{2}\right)ds.$$

Из (9) и (16) относительно функции $\psi(x)$ приходим к следующему дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\psi''(x)+\frac{a}{b}\psi'(x)-\frac{1}{b}\psi(x)=w(x), \qquad 0<x<r, \quad (17)$$

$$w(x)=-\frac{1}{b}f(x,0)-\frac{a}{b}F'(x).$$

Решение задачи (11) для уравнение (17) выписывается по формуле

$$\psi(x)=\frac{1}{e^{k_1r}-e^{k_2r}}\left[\tau'(0)\left(e^{k_1r+k_2x}-e^{k_1x+k_2r}\right)+\tau_r'(0)\left(e^{k_1x}-e^{k_2x}\right)-I(r)\left(e^{k_1x}-e^{k_2x}\right)\right]+I(x), \quad (18)$$

где

$$I(x)=\frac{1}{k_1-k_2}\int_0^x\left[e^{k_1(x-\xi)}-e^{k_2(x-\xi)}\right]w(\xi)d\xi,$$

$$k_1=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2b},\; k_2=\frac{-a-\sqrt{a^2+4b}}{2b}.$$

Из (16) с учетом (18) находим, что

$$\varphi(x)=\tau(0)+\int_0^x\left[\psi(\xi)+F(\xi)\right]d\xi. \quad (19)$$

После того как функция $\varphi(x)$ найдена, решение исследуемой задачи при $y<0$ выписывается по формуле (15), а при $y>0$ решение задачи (4), (7) для уравнения (2) можно выписать в следующем виде

$$u(x,y)=\int_0^r\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\eta\, d\xi-\frac{1}{r}\int_0^r\int_0^y G(x,y;\xi,\eta)\left[(r-\xi)\tau'(\eta)+\xi\tau_r'(\eta)\right]d\eta\, d\xi+$$

$$+\int_0^r G(x,y;\xi,0)\left[\varphi(\xi)-b\varphi''(\xi)\right]d\xi-\frac{1}{r}\int_0^r G(x,y;\xi,0)\left[(r-\xi)\tau(0)+\xi\tau_r(0)\right]d\xi+\frac{r-x}{r}\tau(y)+\frac{x}{r}\tau_r(y), \quad (20)$$

где функция $G(x,y;\xi,\eta)$ определяется по формуле [12, 13]:

$$G(x,y;\xi,\eta)=\frac{2}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+b\mu_n}e^{-\frac{a\mu_n}{1+b\mu_n}(y-\eta)}\sin\left(\sqrt{\mu_n}x\right)\sin\left(\sqrt{\mu_n}\xi\right), \quad \mu_n=\left(\frac{\pi n}{r}\right)^2.$$

Из (18) и (19) следует, что однородная задача, соответствующая задаче (9), (16), (10), (11), будет обладать только нулевым решением $\varphi(x)=\psi(x)\equiv 0\ \forall\, x\in[0,r]$. А значит, из представлений (15) и (20) заключаем, однородная задача, соответствующая задаче (4)–(6), для уравнения (1) будет иметь только тривиальное решение $u(x, y) \equiv 0 \ \forall (x, y) \in \overline{\Omega}$, что говорит о единственности регулярного решения исследуемой задачи.

Литература

1. *Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 25, вып. 5. – С. 852–864.

2. *Рубинштейн Л.И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Известия АН ССР. Сер.: География. 1948. Т. 12, № 1. – С. 27–45.

3. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. – М.: Наука, 1976. – 352 с.

4. *Hallaire M.* L’eau et la production vegetable // Institute National de la Recherche Agronomique. 1964. № 9.

5. *Showalter R.E., Ting T.W.* Pseudoparabolic partial differential equations // SIAM J. Math. Anal. 1970. Vol. 1, № 1. – Pp. 1–26.

6. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.

7. *Балкизов Ж.А.* Краевые задачи для смешанно-гиперболического уравнения // Вестник Дагестанского государственного университета. Сер.: Естественные науки. 2021. Т. 36, вып. 1. – С. 7– 14.

8. *Балкизов Ж.А., Водахова В.А.* Внутреннекраевые задачи со смещением для смешанно-волнового уравнения // Вестник КРАУНЦ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2021. Т. 36, № 3. – С. 8–14.

9. *Балкизов Ж.А.* Внутреннекраевая задача со смещением для одного смешанно-гиперболического уравнения второго порядка // Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики: материалы XIV Международной конференции, приуроченной к 90-летию Дагестанского государственного университета. – Махачкала, 2021. – С. 66–69.

10. *Макаова Р.Х.* Краевая задача для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения третьего порядка с оператором Аллера в главной части // Итоги науки и техники. Сер.: Современная математика и ее приложения. Тематический обзор. 2018. Т. 149. – С. 64–71.

11. *Макаова Р.Х.* Краевая задача для гиперболического уравнения третьего порядка с вырождением порядка внутри области // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер.: физ.-мат. науки. 2017. Т. 21, № 4. – С. 651–664.

12. *Макаова Р.Х.* Первая краевая задача для неоднородного уравнения Аллера // Вестник КРАУНЦ. Сер.: Физ.-мат. науки. 2021. Т. 36, № 4-1. – С. 8–14.

13. *Макаова Р.Х.* Первая краевая задача в нелокальной постановке для обобщенного уравнения Аллера с дробной производной Римана–Лиувилля // Вестник Адыгейского государственного университета. Сер. 4: Естественно-математические и технические науки. 2017. № 4 (211). – С. 34–41.

Поступила в редакцию 31 августа 2022 г.

UDC 517.956.32

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-3-19-24

The Boundary Value Problem for One Mixed-Hyperbolic Equation of the Third Order

Zh.A. Balkizov, R.Kh. Makaova

Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences; Russia, Kabardino-Balkarian Republic, 360000, Nalchik, Shortanov st., 89a; Giraslan@yandex.ru, Makaova.ruzanna@mail.ru

The paper investigates the question of the unique solvability of a local boundary value problem of the Tricomi type for a mixed-hyperbolic equation of the third order. The equation under study coincides with the ordinary inhomogeneous Aller equation in one part of the domain and the third-order model hyperbolic equation in the other. Regarding the traces of the desired solution, the corresponding fundamental relations are found in the paper, and then, using the Tricomi method, the solution of the problem under study is written out in the explicit form. Sufficient conditions are obtained for the given functions ensuring the regularity of the found solution to the problem under study.

Keywords: *wave equation, hyperbolic equation of the third order, Hallere equation, Tricomi method*.

Received 31 August 2022