УДК 517.51

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-2-27–32

К.А. Рыбаков

К ортогональному разложению повторных стохастических интегралов Стратоновича

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет); 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4; rkoffice@mail.ru

Рассматривается класс функций, для которых с помощью ортогонального разложения определен кратный стохастический интеграл Стратоновича или эквивалентный ему повторный стохастический интеграл Стратоновича с квадратично интегрируемыми весовыми функциями. Устанавливается равенство следа матрицы коэффициентов разложения функций этого класса и соответствующего интегрального следа.

Ключевые слова: *операторы следового класса, кратные стохастические интегралы Стратоновича, повторные стохастические интегралы Стратоновича, ортогональное разложение.*

Введение

В статье доказана теорема, имеющая важное значение для представления повторных стохастических интегралов Стратоновича по винеровским процессам, в том числе и в приложении к численному интегрированию систем стохастических дифференциальных уравнений [1; 2].

При ортогональном разложении кратных и повторных стохастических интегралов Стратоновича кратности k для функций из $L_2(\mathrm{T}^k)$, $\mathrm{T} = [t_0, T]$ возникает необходимость рассматривать специальный класс функций – линейное подпространство $L_2(\mathrm{T}^k)$ ($L_2(\mathrm{T}^k)$ (пространство действительнозначных квадратично интегрируемых функций), в котором для функций определены интегральные следы по разным парам переменных, а также матричные следы для коэффициентов разложения по базисным функциям (всевозможным произведениям базисных функций $L_2(\mathrm{T})$) по соответствующим парам индексов. В [4] для этого введено специальное пространство $L_2^{\mathrm{tr}(j1...jk)}(\mathrm{T}^k)$, где $j_1, ..., j_k$ – определенные натуральные числа, которыми нумеруются независимые винеровские процессы [1–4].

Приведем пример для $k = 2$. Пусть $f \in L_2(\mathrm{T}^2)$, $\{q_i\}$ – базис $L_2(\mathrm{T})$, F_{ij} – коэффициенты разложения функции f по базису $\{q_i\, q_j\}$:

$$F_{ij} = \int_{\mathrm{T}^2} f(t,\tau) q_i(t) q_j(\tau) dt d\tau, \quad i, j = 0,1,2,\ldots \tag{1}$$

Тогда для корректного определения кратного стохастического интеграла Стратоновича для функции f (одного из двух возможных вариантов) и его ортогонального разложения требуется выполнение условия

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_{ii} = \int_{\mathrm{T}} f(t,t) dt,$$

где левая часть – матричный след, а правая часть – интегральный след. Если это так, то $f \in L_2^{\mathrm{tr}(j1j2)}(\mathrm{T}^2)$ при $j_1 = j_2$. Хорошо известно, что это условие несправедливо для произвольных функций $f \in L_2(\mathrm{T}^2)$. Кроме того, интеграл в правой части нужно рассматривать или для непрерывных функций, или понимать его специальным образом, вводя операцию усреднения для перехода от функции f, которая в $L_2(\mathrm{T}^2)$ может быть определена произвольно на диагонали квадрата T^2, к функции, которая определена однозначно на T^2 или на диагонали и совпадает с исходной почти всюду [5; 6].

Для произвольного $k > 2$ необходимо рассматривать аналогичные условия по всем возможным парам или по части пар индексов и переменных [7; 8]: такие пары возникают при условии, когда интегрирование ведется относительно совпадающих винеровских процессов (для кратного или повторного стохастического интеграла Стратоновича).

Сосредоточим внимание на функции $f(t, \tau) = \varphi(t)\ \psi(\tau)\ 1(t - \tau)$, где $1(t - \tau)$ – единичная ступенчатая функция. Кратный стохастический интеграл для такой функции – это повторный стохастический интеграл, которому соответствует система линейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка, φ и ψ – весовые функции. В [1; 2] доказано утверждение

$$\sum_{i=0}^{\infty} F_{ii} = \frac{1}{2}\int_{\mathrm{T}} \varphi(t)\psi(t)\,dt$$

в предположении, что φ и ψ – непрерывно дифференцируемые функции, а $\{q_i\}$ – полиномы Лежандра или тригонометрические функции (базис Фурье). Здесь предлагается аналогичное утверждение, но при $\varphi, \psi \in L_2(\mathrm{T})$ и произвольном базисе $\{q_i\}$.

Необходимые определения и предварительные результаты

Будем рассматривать линейные операторы F в пространстве $L_2(\mathrm{T})$, $\mathrm{T} = [t_0, T]$, определяемые соотношением

$$\mathrm{F}g(t) = \int_{\mathrm{T}} f(t,\tau)g(\tau)\,d\tau \quad \forall g \in L_2(\mathrm{T}),$$

где $f \in L_2(\mathrm{T}^2)$ – ядро оператора. Подобный оператор является оператором следового класса [6; 9], если найдутся такие функции $f_1, f_2 \in L_2(\mathrm{T}^2)$, что

$$f(t,\tau) = \int_{\mathrm{T}} f_1(t,\xi) f_2(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{2}$$

Теорема 1 [5; 6]. Пусть линейный оператор F: $L_2(\mathrm{T}) \to L_2(\mathrm{T})$ с ядром $f \in L_2(\mathrm{T}^2)$ является оператором следового класса, $\{q_i\}$ – базис $L_2(\mathrm{T})$. Тогда

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{F} = \sum_{i=0}^{\infty} F_{ii} = \int_{\mathrm{T}} f(t,t)\,dt, \tag{3}$$

где F_{ij} – коэффициенты разложения (1) функции f относительно базиса $\{q_i\, q_j\}$, а интеграл в правой части понимается следующим образом:

$$\int_{\mathrm{T}} f(t,t)\,dt = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathrm{T}} \mathrm{S}_\varepsilon f(t,t)\,dt, \quad \mathrm{S}_\varepsilon f(t,\tau) = \frac{1}{4\varepsilon^2}\int\limits_{\substack{|t-\theta|\le\varepsilon \\ |\tau-\vartheta|\le\varepsilon}} f(\theta,\vartheta)\,d\theta\, d\vartheta,$$

т. е. S_ε – усредняющий оператор. В последнем соотношении функция f доопределяется нулем вне квадрата T^2.

Отметим, что ряд в правой части формулы (3) сходится абсолютно и его сумма не зависит от выбора базиса $\{q_i\}$.

Утверждение 1. Линейные операторы F с ядрами

$$f(t,\tau) = t^n \tau^{m+n} 1(t-\tau) + \tau^n t^{m+n} 1(\tau - t) = f(\tau,t), \tag{4}$$

$$f(t,\tau) = t^{m+n} \tau^{n} 1(t-\tau) + \tau^{m+n} t^{n} 1(\tau - t) = f(\tau,t), \tag{5}$$

где $m \in \mathrm{N}$ и $n \in \{0, 1, 2, ...\}$, являются операторами следового класса.

Доказательство. Положим $f_1(t,\tau) = m\, t^n\, \tau^{m-1}\, 1(t-\tau)$, $f_2(t,\tau) = \tau^n\, 1(\tau - t)$ и воспользуемся представлением (2). Тогда

$$f(t,\tau) = mt^n\tau^n \int_{\mathrm{T}} \xi^{m-1} 1(t-\xi) 1(\tau-\xi) d\xi =$$

$$= mt^n\tau^n \int_{t_0}^{\min\{t,\tau\}} \xi^{m-1} d\xi = t^n\tau^n \min\{t^m,\tau^m\} - t^n\tau^n t_0^m =$$

$$= t^n\tau^{m+n} 1(t-\tau) + t^{n+m}\tau^n 1(\tau-t) - t^n\tau^n t_0^m.$$

Последнее слагаемое $\tau^n t^n t_0^m$ определяет оператор следового класса с вырожденным ядром, поэтому функция (4) задает оператор следового класса (такие операторы образуют линейное пространство [9]).

Далее положим $f_1(t,\tau) = m\, t^n\, \tau^{m-1}\, 1(\tau - t)$, $f_2(t,\tau) = \tau^n\, 1(t-\tau)$, следовательно,

$$f(t,\tau) = mt^n\tau^n \int_{\mathrm{T}} \xi^{m-1} 1(\xi-t) 1(\xi-\tau) d\xi =$$

$$= mt^n\tau^n \int_{\max\{t,\tau\}}^{T} \xi^{m-1} d\xi = t^n\tau^n T^m - t^n\tau^n \max\{t^m,\tau^m\} =$$

$$= t^n\tau^n T^m - t^{n+m}\tau^n 1(t-\tau) - \tau^{m+n} t^n 1(\tau-t).$$

Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что функция (5) также задает оператор следового класса.

Основной результат

Сформулируем основной результат статьи в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть $\varphi, \psi \in L_2(\mathrm{T})$, $\{q_i\}$ – базис $L_2(\mathrm{T})$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{\infty} \int_{\mathrm{T}} \varphi(t) q_i(t) \int_{t_0}^{t} \psi(\tau) q_i(\tau) d\tau dt = \frac{1}{2}(\varphi,\psi)_{L_2(\mathrm{T})}. \tag{6}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции $g, g^* \in L_2(\mathrm{T}^2)$:

$$g(t,\tau) = \varphi(t)\psi(\tau) 1(t-\tau), \quad g^*(t,\tau) = \psi(t)\varphi(\tau) 1(\tau-t) = g(\tau,t),$$

тогда коэффициенты разложения G_{ij}, G_{ij}^* этих функции относительно базиса $\{q_i\ q_j\}$ определяются формулами

$$G_{ij} = \int_{\mathrm{T}} \varphi(t) q_i(t) \int_{t_0}^{t} \psi(\tau) q_j(\tau) d\tau dt, \quad G_{ij}^* = \int_{\mathrm{T}} \psi(t) q_i(t) \int_{t}^{T} \varphi(\tau) q_j(\tau) d\tau dt,$$

и для них выполняется условие $G_{ij} = G_{ji}^*$, $i, j = 0, 1, 2, \ldots$

Далее, пусть

$$f(t,\tau) = g(t,\tau) + g^*(t,\tau) = g(t,\tau) + g(\tau,t) = f(\tau,t), \quad f \in L_2(\mathrm{T}^2),$$

тогда коэффициенты разложения F_{ij} функции f определяются по свойству линейности

$$F_{ij} = G_{ij} + G_{ij}^* = G_{ij} + G_{ji}, \quad F_{ii} = 2G_{ii}.$$

Кроме того, можем записать интегральный след для функции f:

$$\lim_{\mathrm{T}\to 0} \mathrm{S}_{\varepsilon} f(t,t) = \varphi(t)\psi(t), \quad \mathrm{tr} f = \int_{\mathrm{T}} \varphi(t)\psi(t) dt = (\varphi,\psi)_{L_2(\mathrm{T})},$$

и это означает, что равенство (6) эквивалентно выражению (3), которое верно для оператора F следового класса с некоторым ядром f согласно теореме 1.

Далее можем сделать вывод, что интегральный оператор F является оператором следового класса, если

$$f(t,\tau) = g(t,\tau) + g^*(t,\tau), \quad \varphi(t) = t^{n_1}, \quad \psi(\tau) = \tau^{n_2}, \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

Действительно, при $n = n_1 = n_2$ получаем вырожденное ядро $f(t, \tau) = (t\ \tau)^n$ (ему соответствует оператор следового класса). При $n_1 \neq n_2$ нужный результат следует из утверждения 1: для функции (4) полагаем $n = n_1 < n_2 = m + n$, а для функции (5) – $m + n = n_1 > n_2 = n$.

Таким образом, функции φ, ψ могут быть полиномами, в том числе и полиномами Лежандра (операторы следового класса образуют линейное пространство [9]), с помощью которых сколь угодно точно приближаются произвольные функции из $L_2(\mathrm{T})$, поскольку в этом случае функция f представляется как линейная комбинация функций вида $(t\ \tau)^n$, а также (4) и (5).

Далее, пусть $\varphi, \psi \in L_2(\mathrm{T})$ и $\varphi = \lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n, \quad \psi = \lim\limits_{m\to\infty}\psi_m,$

где $\varphi_n(t) = \sum\limits_{i=0}^{n} \Phi_i \hat{P}_i(t), \quad \psi_m(\tau) = \sum\limits_{i=0}^{m} \Psi_i \hat{P}_i(\tau), \quad n, m \in \{0, 1, 2, \ldots\},$

а Φ_i, Ψ_i – коэффициенты разложения функций φ, ψ соответственно по полиномам Лежандра $\{\hat{P}_i\}$. Тогда устанавливаем справедливость следующего равенства для произвольных n и m:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[\int_{\mathrm{T}}\varphi_n(t)q_i(t)\int_{t_0}^{t}\psi_m(\tau)q_i(\tau)d\tau dt + \int_{\mathrm{T}}\psi_m(t)q_i(t)\int_{t_0}^{t}\varphi_n(\tau)q_i(\tau)d\tau dt\right] = (\varphi_n, \psi_m)_{L_2(\mathrm{T})}, \quad (7)$$

где числовой ряд в левой части записанного выражения сходится абсолютно, его сумма не зависит от выбора базиса $\{q_i\}$.

Зафиксируем n в формуле (7). Тогда она определяет ограниченный, а значит и непрерывный линейный функционал в $L_2(\mathrm{T})$, который задается функцией φ_n (в левой части формулы непрерывный функционал в пространстве операторов следового класса [9], но его можно рассматривать как линейный функционал в пространстве $L_2(\mathrm{T})$, используя продолжение по непрерывности [10]). Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем непрерывный линейный функционал, задаваемый функцией ψ:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left[\int_{\mathrm{T}}\varphi_n(t)q_i(t)\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)q_i(\tau)d\tau dt + \int_{\mathrm{T}}\psi(t)q_i(t)\int_{t_0}^{t}\varphi_n(\tau)q_i(\tau)d\tau dt\right] = (\varphi_n, \psi)_{L_2(\mathrm{T})}.$$

Далее остается перейти к пределу при $n \to \infty$, в результате получаем выражение (3), что доказывает равенство (6).

Доказанное утверждение позволяет обосновать принадлежность функций вида $f(t_1, \ldots, t_k) = \psi_1(t_1)\ldots\psi_k(t_k)\ 1(t_k - t_{k-1})\ldots 1(t_2 - t_1)$ пространству $L_2^{\mathrm{tr}(j1\ \ldots\ jk)}(\mathrm{T}^k)$, определенному в [4]. Этот класс функций характеризуется тем, что должны существовать матричные следы для коэффициентов их разложения (они нумеруются k-индексами) по парам индексов, для которых совпадают соответствующие числа $j_1, \ldots, j_k$, при этом следы не должны зависеть от выбора базисной системы. И эти матричные следы – свертки коэффициентов разложения – задают интегральные следы функции f по соответствующим парам переменных (соответствие понимается в смысле порядка следования чисел $j_1, \ldots, j_k$), индексов $i_1, \ldots, i_k$, которыми нумеруются коэффициенты разложения, и переменных $t_1, \ldots, t_k$.

С помощью теоремы 2 можно показать, что матричные следы по любой паре соседних индексов i_l, i_{l+1}, $= 1, \ldots, k - 1$ задают коэффициенты разложения функции $k - 2$ переменных, но такой же структуры, как и функция f, что позволяет применять теорему 2 «итерационно». А матричные следы по любой паре индексов i_l, i_m, где $l \in \{1, \ldots, k - 2\}$, $m \in \{3, \ldots, k\}$, $m - l > 1$, равны нулю, и соответствующий интегральный след – это нулевая функция $k - 2$ переменных.

Важность этого результата связана с тем, что кратный стохастический интеграл Стратоновича для такой функции – это повторный стохастический интеграл, которому соответствует система линейных стохастических дифференциальных уравнений k-того порядка, ψ_1, ..., ψ_k – весовые функции. Решение таких систем (моделирование повторных стохастических интегралов) необходимо для построения численных методов решения систем нелинейных стохастических дифференциальных уравнений с высокими порядками сильной сходимости [1; 2].

Отметим, что теорему 2 можно доказать, полагая, что $L_2(\mathrm{T}^k)$ – пространство комплекснозначных квадратично интегрируемых функций. Это влечет изменение формул, определяющих скалярное произведение. Кроме того, в доказательстве теоремы 2 можно представить функции φ, $\psi \in L_2(\mathrm{T})$ ортогональными разложениями по комплексным экспоненциальным функциям и использовать следующий результат вместо утверждения 1.

Утверждение 2. Линейный оператор F с ядром

$$f(t,\tau) = e^{\mathbf{i}nt} e^{\mathbf{i}m\tau} 1(t-\tau) + e^{\mathbf{i}n\tau} e^{\mathbf{i}mt} 1(\tau - t) = f(\tau,t),$$

где $m, n \in \mathrm{Z}$, $m \neq 0$, $\mathbf{i} = \sqrt{-1}$, является оператором следового класса.

Доказательство для краткости опустим, так как оно аналогично доказательству утверждения 1 и основано на представлении (2).

Литература

1. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. С программами в среде MATLAB // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2018. № 4. – С. A.1–A.1073.

2. *Kuznetsov D.F.* Mean-square approximation of iterated Ito and Stratonovich stochastic integrals: Method of generalized multiple Fourier series. Application to numerical integration of Ito SDEs and semilinear SPDEs // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 4. – С. A.1–A.788.

3. *Рыбаков К.А.* Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Ито // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 3. – С. 109–140.

4. Рыбаков К.А. Ортогональное разложение кратных стохастических интегралов Стратоновича // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2021. № 4. – С. 81–115.

5. *Brislawn C.* Kernels of trace class operators // Proc. Am. Math. Soc. 1988. Vol. 104, no. 4. – P. 1181–1190.

6. *Бирман М.Ш.* Простая теорема вложения для ядер интегральных операторов следового класса в $L^2(R^m)$. Применение к формуле Фредгольма для следа // Алгебра и анализ. 2015. Т. 27, № 2. – С. 211–217.

7. *Rosinski J.* On stochastic integration by series of Wiener integrals // Appl. Math. Optim. 1989. Vol. 19, no. 2. – P. 137–155.

8. *Johnson G.W., Kallianpur G.* Homogeneous chaos, p-forms, scaling and the Feynman integral // Trans. Am. Math. Soc. 1993. Vol. 340, no. 2. – P. 503–548.

9. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1965.

10. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984.

Поступила в редакцию 10 марта 2022 г.

UDK 517.51

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-2-27–32

On the Orthogonal Expansion of the Iterated Stratonovich Stochastic Integrals

K.A. Rybakov

Moscow Aviation Institute (National Research University); Russia, 125993, Moscow, Volokolamsk highway, 4; rkoffice@mail.ru

We consider a class of functions, defining the multiple Stratonovich stochastic integral or its equivalent iterated Stratonovich stochastic integral with square integrable weights with the help of an orthogonal expansion. The equality of the trace of expansion coefficients matrix for these functions and the corresponding integral trace is established.

Keywords: *trace class operators, multiple Stratonovich stochastic integrals, iterated Stratonovich stochastic integrals, orthogonal expansion.*

Received 10 March 2022