УДК 517.929

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-2-20–26

С.М. Алейдаров

Устойчивость решений уравнения теплопроводности с запаздыванием в краевых условиях в пространствах со степенным весом

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; Seydullaaley@mail.ru

В статье [1] для функционально-дифференциального уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве со степенным весом получены условия разрешимости и устойчивости решений. Применение преобразования Фурье к абстрактному уравнению с постоянными запаздываниями привело к получению резольвенты. В терминах резольвенты получены условия разрешимости и устойчивости решений. В данной статье для конкретного уравнения математической физики, а именно уравнения теплопроводности с запаздыванием в краевых условиях в пространствах со степенным весом, проверяем выполнимость этих условий. Для уравнения теплопроводности с запаздывающим аргументом и запаздыванием в краевых условиях в пространствах со степенным весом получены условия разрешимости и устойчивости решений.

Ключевые слова: *теплопроводность, степенной вес, разрешимость, устойчивость, запаздывание.*

Введение

Уравнение теплопроводности с отклоняющимся аргументом и отклонениями в граничных условиях в пространствах со степенным весом является актуальной физической проблемой. Эта проблема в пространствах с экспоненциальным весом изучена в работах Р.Г. Алиева [2]. Однако в пространствах со степенным весом данная проблема не была решена. В настоящей статье получены условия существования решений и их устойчивости в пространствах со степенной весовой функцией для уравнения теплопроводности с запаздыванием в краевых условиях в пространствах со степенным весом. Также получены условия существования решений и их устойчивости для уравнения теплопроводности с запаздывающим аргументом и запаздыванием в краевых условиях. Полученные условия являются новыми для уравнения теплопроводности с отклоняющимся аргументом и отклонением в краевых условиях.

Решением уравнения

$$LU(t) \equiv D_t U(t) - \sum_{j=0}^{m} A_j\, U\big(t-h_j\big) = f(t), \tag{1}$$

где $D_t = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}$, $A_j -$ неограниченные операторы, $h_j = const,$ является функция

$$U(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} R(\lambda) \widetilde{f}(\lambda) d\lambda. \tag{2}$$

Здесь $R(\lambda) \equiv \big(\lambda E - \sum_{j=0}^{m} A_j \exp\big(-i\lambda h_j\big)\big)^{-1} -$ резольвентный оператор для оператора L, $\widetilde{f}(\lambda) -$ преобразование Фурье-функции $f(t)$.

Для доказательства существования решения вида (2) как элемента пространства

$$X^1_{(-\infty,+\infty)} = \{\, U(t), \|U(x)\| = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+t^{2n})(\, \|u(x)\|^2_x + \|D_t U(t)\|^2_y dt \right)^{1/2} < \infty \,\}$$

для $\forall f(t) \in Y^0_{(-\infty,+\infty)} = \{\, U(t), \|U(x)\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}(1+t^{2n})\, \|U(t)\|^2_y dt\right)^{1/2} < \infty \,\}$,
где $D(A_j) \subset$ X, $R\left(A_j\right) \subset$ Y, требуется выполнение условий: $R(\lambda)$ регулярна на

$$Im\lambda = \alpha,\ \ \|R(\lambda)\|_x = 0 \qquad (1)$$

$$\|\lambda R(\lambda)\|_y = 0 \qquad (1)$$

| $$\lambda \mid\to \infty, Im\lambda = \alpha. \qquad (3)$$

Вопросы устойчивости решений связаны с полюсами резольвенты.

Рассмотрим уравнение теплопроводности с отклонением аргумента в краевых условиях. Проверим выполнимость условий (3).

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \frac{d^2u(x,t)}{dx^2} \qquad (4)$$

с условиями $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u'(1,t\,) + au(1,t-h) = 0\,. \end{cases}$ (5)

Здесь a – вещественное число, связанное с запаздыванием неравенства $|a|e^{Hk} < 1$.

Уравнение (4) является частным случаем уравнения (1).

Действительно, переписав (4) в виде

$$\frac{1}{i}\,\frac{du}{dt} - \frac{1}{i}\frac{d^2u}{dx^2} = 0 \text{ или } \frac{1}{i}\,\frac{du}{dt} + i\frac{d^2u}{dx^2} = 0,$$

мы видим, что оно получается из (1), если

$$A_0 = i\frac{d^2}{dx^2}, h_0 = 0, m = 0.$$

Определим пространства $a\ x$ и y следующим образом:

$$X = \Big\{ u(x), u(0), u'(1) + ae^{-i\lambda h}u(1) = 0, \|u(x)\| == \left(\int_0^1 (|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + \right.$$

$$\left. +|u''(x)|^2)dx\right)^2 < \infty \Big\},$$

$$Y = \ \Big\{ u(x), \|u(x)\| = \left(\int_0^1 |u(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty \Big\}.$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (4)

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} * \frac{du}{dt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} * \frac{d^2u}{dx^2}dt.$$

Интегрируя подынтегральное выражение в левой части по частям, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda} \ * \frac{du}{dt}dt = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}}u(x,t)e^{-i\lambda t}|^{+\infty}_{-\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} * u(x,t)dt = i\lambda\, \hat{u}(x,\lambda).$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda} \ * \frac{d^2u}{dx^2}dt = \frac{d^2\, \hat{u}(x,\lambda)}{dx^2}$, то после применения преобразования Фурье имеем: $i\lambda\, \hat{u}(x,\lambda) = \frac{d^2\, \hat{u}(x,\lambda)}{dx^2}$ или $\left(i\lambda - \frac{d^2}{dx^2}\right)\hat{u}(x,\lambda) = 0$.

Таким образом, резольвента $R(\lambda) = (i\lambda - \frac{d^2}{dx^2})^{-1}$.

Для простоты обозначим через $\mu = \ -i\lambda, \hat{u}(x,\lambda) = u(x)$.

Тогда из уравнения $R_p(\lambda)\psi(x) = u(x)$ следует, что

$$u''(x) + \mu u(x) = \ \psi(x). \qquad (6)$$

Условие (5) после преобразования Фурье перейдет в

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} * u(0,t)dt = \hat{u}(0,\lambda) = u(0) = 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} * \frac{du}{dx}dt + \frac{ae^{-i\lambda t}}{\sqrt{2\Pi}} *$$

$$* \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} * u(x,t)dt = \widehat{u_x^1}(x,\lambda)|_{x=1} ae^{-i\lambda t}u(x,\lambda)|_{x=1} =$$

$$= u'(1) + a\,e^{-i\lambda t}u(1) = 0.$$

Таким образом, задачи (4) и (5) после преобразования Фурье перейдут в

$$u''(x) + \mu u(x) = \psi(x)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(1) + ae^{-i\lambda t}u(1) = 0 \end{cases} \qquad (7)$$

Рассматривается горизонтальная полоса $|Zm\,\lambda| \le H$ в λ-плоскости.

Из равенства $\mu = -i\lambda = -i(\sigma + i\tau) = \tau - i\sigma$ видно, что $\mu = Re\mu + i?$ $\mu = Zm\lambda - iRe\lambda$. Таким образом, горизонтальная полоса λ-плоскости переходит в вертикальную полосу μ-плоскости.

Из уравнения (6) имеем

$$|u''(x) + Re\mu u(x) + iZm\mu u(x)| = |\psi(x)|,$$

так как модуль мнимой части не превосходит модуля самого комплексного числа. Отсюда следует, что

$$|Zm\mu u(x)| \le |\psi(x)|$$

$$\int_0^1 |Zm\mu u(x)|^2 dx \le \int_0^1 |\psi(x)|^2 dx$$

$$\int_0^1 |u(x)|^2 dx \le \frac{1}{|Z\mu|^2}\int_0^1 |\psi(x)|^2 dx$$

$$\|u(x)\|_y^2 \le \frac{1}{|Z\mu|^2}\|\psi(x)\|_y^2$$

$$\|u(x)\|_y \le \frac{1}{|Z\mu|}\|\psi(x)\|_y. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что $\left\|R_p(\lambda)\right\|_y = 0\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$.

Далее, умножая обе части уравнения (6) на сопряженную с $u(x)$ функцию $\bar{u}(x)$ и интегрируя полученное равенство в пределах от 0 до 1, получим

$$\int_0^1 u''(x)\bar{u}(x)dx + \mu\int_0^1 u(x)\bar{u}(x)dx = \int_0^1 \psi(x)\bar{u}(x)dx.$$

Интегрируя по частям интеграл $\int_0^1 u''\bar{u}(x)dx$, получим

$$\int_0^1 u''(x)\bar{u}(x)dx = u'(x)\bar{u}(x)|_0^1 - \int_0^1 |u'(x)|^2 dx,$$

и мы знаем, что

$$\int_0^1 u'(x)dx = u(1) - u(0) = u(1) \to |u(1)|^2 = \left|\int_0^1 u'(x)dx\right|^2 \le \int_0^1 |u'(x)|^2\,dx,$$

тогда следует, что

$$-ae^{\mu h}|u(1)|^2 - \int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \mu\int_0^1 |u(x)|^2 dx = \int_0^1 \psi(x)\bar{u}\,(x)dx,$$

$$-ae^{Re\mu}\ |u(1)|^2\cos Zm\mu h+iae^{Re\mu}\ |u(1)|^2\sin Zm\,\mu h-\int_0^1|u'(x)|^2dx+$$
$$+Re\mu\int_0^1|u(x)|^2dx+iZm\int_0^1|u(x)|^2dx=\int_0^1\psi(x)\bar{u}\,(x)dx,$$

так как модуль действительности не превосходит модуль самого комплексного числа. Тогда получим

$$\left|-\left(\int_0^1|u'(x)|^2dx+ae^{Re\mu}\ *|u(1)|^2\cos Zm\mu h-Re\mu\int_0^1|u(x)|^2dx\right)\right|\le$$
$$\le\int_0^1\ |\psi(x)\bar{u}(x)dx|$$

и $\left|\int_0^1|u'(x)|^2dx+\ ae^{Re}\quad *|u(1)|^2\cos Zm\mu h\right|-\left|Re\mu\int_0^1|u(x)|^2dx\right|\le\ \left|\int_0^1|u'(x)|^2dx+\right.$
$$\left.+ae^{Re\mu h}*|u(1)|^2\cos Zm\mu h\ \ Re\mu\int_0^1|u(x)|^2dx\right|$$

и $\left|\int_0^1|u'(x)|^2dx\right|-|ae^{Re\mu h}|u(1)|^2|\ \le\ \left|\int_0^1|u'(x)|^2dx+ae^{Re\mu h}*|u(1)|^2\cos Zm\mu h\right|.$

В результате получим:

$$\int_0^1|u'(x)|^2dx-|a|e^{Re\mu h}\int_0^1|u'(x)|^2dx\le|Re\mu|*\int_0^1|u(x)|^2dx+\int_0^1\psi(x)\bar{u}\,(x)dx.$$

Используем свойство интеграла Лебега:

$$\int_0^1\psi(x)\bar{u}\,(x)dx\le\frac{1}{2}\left(\int_0^1|\psi(x)|^2dx+\int_0^1|u(x)|^2dx\right)$$

и получим

$$(1-|a|e^{Re\mu h})\int_0^1|u'(x)|^2dx\ \le\ \left(|Re\mu|+\tfrac{1}{2}\right)\int_0^1|u(x)|^2dx+\tfrac{1}{2}\int_0^1|\psi(x)|^2dx.$$

Используя равенство (8), получим

$$(1-|a|e^{Re\mu h})\int_0^1|u'(x)|^2dx\ \le\ \left[\left(|Re\mu|+\tfrac{1}{2}\right)|Zm\mu|^{-2}+\tfrac{1}{2}\right]*\ \int_0^1|\psi(x)|^2dx\to$$
$$\to\int_0^1|u'(x)|^2dx\le\left(\frac{\left(|Re\mu|+\frac{1}{2}\right)|Zm\mu|^{-2}+\frac{1}{2}}{1-|a|e^{Re\mu h}}\right)*\ \int_0^1|\psi(x)|^2dx$$

или

$$\|u'(x)\|_y=\left(\int_0^1|u'(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(\frac{\left(|Re\mu|+\frac{1}{2}\right)|Zm\mu|^{-2}+\frac{1}{2}}{1-|a|e^{Re\mu h}}\right)^{\frac{1}{2}}*\ \|\psi(x)\|_y=$$
$$=0(1)\|\psi(x)\|_y$$

при $|\lambda|\to\infty$ в полосе $|Zm\,\lambda|\le H$.

Наконец, из уравнения (6) и неравенства (8) по норме в пространстве Y получим

$$\|u'(x)\|_y=\|\psi(x)-\mu u(x)\|_y\le\|\psi(x)\|_y+\ |\mu|*\|u(x)\|_y\le$$
$$\le\ \|\psi(x)\|_y+|\mu||Zm\mu|^{-1}*\|\psi(x)\|_y=(1+|\mu||Zm\mu|^{-1})*\|\psi(x)\|_y=0(1)\|\psi(x)\|_y$$

при $|\lambda|\to\infty$ в полосе $|Zm\,\lambda|\le H$.

Таким образом,

$$\left\|R_p(\lambda)\psi(x)\right\|_x = \|u(x)\|_x = \left(\int_0^1 (\,|u(x)|^2 + |u'(x)|^2 + |u''(x)|^2\,)dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \left(\int_0^1 |u(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |u'(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 |u''(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|u(x)\|_y + \|u'(x)\|_y + \|u''(x)\|_y \le$$

$$\le |Zm\mu|^{-1} * \|\psi(x)\|_y + \left(\frac{\left(|Re\mu| + \frac{1}{2}\right)|Zm\mu|^{-2} + \frac{1}{2}}{1-|a|e^{Re}}\right)^{\frac{1}{2}} * \|\psi(x)\|_y +$$

$$+(1+|\mu||Zm\mu|^{-1})\|\psi(x)\|_y =$$

$$= \left[|Zm\mu|^{-1} + \left(\frac{\left(|Re\mu| + \frac{1}{2}\right)|Zm\mu|^{-2} + \frac{1}{2}}{1-|a|e^{Re\mu h}}\right)^{\frac{1}{2}} + |\mu||Zm\mu|^{-1} + 1\right] * \|\psi(x)\|_y$$

$$= 0(1)\|\psi(x)\|_y,$$

т. е. $\left\|R_p(\lambda)\right\|_x = 0(1)$ при $|\lambda|\to\infty$ в полосе $|\mathrm{Im}\,\lambda| \le H$ при любом $H \in \mathbb{R}_+^0$.

Таким образом, условия (3) выполняются.

Аналогичные исследования разрешимости и устойчивости решений можно провести и для уравнения теплопроводности с запаздыванием и отклонением аргумента в граничных условиях.

Рассмотрим уравнение с отклоняющимся аргументом с отклонением аргумента в граничных условиях.

$$\frac{du(x,\ t)}{dt} = \frac{d^2u(x,t)}{dx^2} + bu(x,t-h) \qquad (9)$$

с условием $\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u'(1,t\,) + au(1,t-h) = 0\,\cdot \end{cases}$ (10)

Здесь a, b являются вещественными числами, a – число, связанное с запаздыванием h неравенством $|\,a\,|\;e^{Hh} < 1$.

Уравнение (9) является частным случаем уравнения (1).

Действительно, переписав (9) в виде

$$\frac{1}{i}\frac{du}{dt} - \frac{1}{i}\frac{d^2u}{dx^2} - \frac{1}{i}\ bu(x,t-h) = 0 \text{ или } \frac{1}{i}\frac{du}{dt} - i\frac{d^2u}{dx^2} + ibu(x,t-h) = 0,$$

мы видим, что оно получается из (1) , если

$$A_0 = -i\frac{d^2}{dx^2}, A_1 = -ib \in Z_\infty(X,Y), h_0 = 0, h_0 = h, m = 1.$$

Определим пространства X и Y следующим образом:

$$X = \{u(x), u(0) = 0, u'(1) + ae^{-\iota\lambda h}u(1) = 0,$$

$$\|\,u(x)\,\| = \left(\int_0^1 |\,u(x)\,|^2 + +\,|\,u'(x)\,|^2 + |\,u''^{(x)}\,|^2)dx\right)^{1/2} < \infty\},$$

$$\mathrm{Y} = \{u(x), \|\,u(x)\,\| = (\int_0^1 |\,u(x)\,|^2\,dx)^{1/2} < \infty\}.$$

Применим преобразование Фурье к уравнению (9)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}\frac{\partial u}{\partial t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}\frac{d^2u}{dx^2}dt + \frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}\,u(x,t-h)dt.$$

Интегрируя подынтегральное выражение в левой части по частям, получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}\frac{\partial u}{\partial t}dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}u(x,t)e^{-i\lambda}\ \Big/_{+\infty}^{-\infty} + \frac{i\lambda}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}u(x,t)dt = i\lambda\tilde{u}(x,\lambda),$$

так как $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dt = \frac{d^2\tilde{u}\,(x,\lambda)}{dx^2}$

и $\frac{b}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}\,u(x,t-h)dt = be^{-i\lambda h}\ \tilde{u}(x,\lambda)$, то после применения преобразования Фурье имеем

$$i\lambda\tilde{u}(x,\lambda) = \frac{d^2\tilde{u}\,(x,\lambda)}{dx^2} + be^{-i\lambda h}\ \tilde{u}(x,\lambda),$$

или $\left(i\lambda - be^{-\iota\lambda h} - \frac{d^2}{dx^2}\right)\tilde{u}(x,\lambda) = 0$.

Таким образом, резольвента $R_p(\lambda) \equiv \left(\iota\lambda - be^{-\iota\lambda h} - \frac{d^2}{dx^2}\right)^{-1}$.

Для простоты обозначим через $\mu = be^{-\iota\lambda h} - \iota\lambda, \tilde{u}(x,\lambda) \equiv u(x)$.

Тогда из уравнения $R_p(\lambda)\psi(x)$ следует, что

$$u''(x) + \mu u(x) = \psi(x) \tag{11}$$

Условия (10) после преобразования Фурье перейдут в

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(1) + ae^{-\iota\lambda h}u(1) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, задача (9), (10) после преобразования Фурье перейдет в

$$u''(x) + \mu u(x) = \psi(x)$$

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(1) + ae^{-\iota\lambda h}u(1) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Далее аналогичными выкладками можно доказать, что условия (3) выполняются.

Литература

1. *Алейдаров С.М.* Асимптотика решений ФДУ первого порядка в гильбертовом пространстве со степенным весом. Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики. – Махачкала: Издательство ДГУ, 2017. – С. 24–27.

2. *Алиев Р.Г.* ФДУ в гильбертовом пространстве. – Махачкала: Издательство ДГУ, 2010. – 348 с.

3. *Крейн С.Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М., 1990. – 620 с.

4. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.: Наука, 1993.

5. *Колмогоров А.И., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 2017.

6. *Алейдаров С.М.* Конечномерность ядра оператора L в гильбертовом пространстве со степенным весом // Вестник ДГУ. 2011. Вып. 1. – С. 60–64.

7. *Алейдаров С.М.* Исследование ФДУ нейтрального типа в пространствах со степенным весом // Вестник ДГУ. 2020. Вып. 4. – С. 27–33.

8. *Треногин В.А.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М., 2018. – 256 с.

9. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы фундаментального анализа. – М., 2017. – 560 с.

10. *Эмирова И.С.* Оценка характеристического показателя решения уравнения с ОА в гильбертовом пространстве // Вестник ДГУ. 2021. Вып. 4. – С. 48–56.

Поступила в редакцию 10 марта 2022 г.

UDK 517.929

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-2-20–26

The Stability of Solutions of the Heat Equation with Delay under Boundary Conditions in Spaces with Power-law Weight

S.M. Aleydarov

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; Seydullaaley@mail.ru

In the article [1] for a functional-differential equation with unbounded operator coefficients in a Hilbert space with a power-law weight, conditions for the solvability and stability of solutions are obtained. By applying Fourier transforms to an abstract equation with constant delays, a resolvent is obtained. The conditions for the solvability and stability of solutions are obtained in terms of the resolvent. In this article, for a specific equation of mathematical physics, namely the heat equation with delay in boundary conditions in spaces with a power-law weight, we check the feasibility of these conditions. For the heat equation with a retarded argument and delay under boundary conditions in spaces with a power-law weight, conditions for the solvability and stability of solutions are obtained.

Keywords: *thermal conductivity, power-law weight, solvability, stability, delay.*

Received 10 March 2022