УДК 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-2-16–19

М.С. Алиев

Об одной системе функций Маркова

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; aliev.mingazhudin@yandex.ru

В статье устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых произвольные целые степени переменной образуют систему Маркова на промежутке числовой оси, содержащей внутри себя начало координат. Указывается на различие свойств полиномов по этим степеням на интервале, не содержащем начало координат.

Ключевые слова: *определитель, система Чебышева, система Маркова, интеграл Стилтьеса, теорема Ролля.*

Систему [1] вещественных функций $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$, определенных на [а, в], называют системой Чебышева (T_n-системой) порядка n, если каждый полином $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k(x)$ $(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k^2 > 0)$ имеет на [а, в] не более n корней.

Требование к количеству корней полинома в определении системы Чебышева равносильно условию: определитель

$$D\begin{pmatrix} u_{0,} u_{1,} \ldots & u_n \\ x_{0,} x_1, \ldots & x_n \end{pmatrix} \neq 0 \text{ при любых } a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b.$$

Систему функций $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)$, определенных на [а, в], называют системой Маркова (M_n-системой) порядка n, если каждая из систем $u_0(x), u_1(x), \ldots, u_m(x)$ $(m = 0,1 \ldots, n)$ будет T_m-системой на [а, в].

Классическим примером M_n-системы на любом промежутке [а, в] является система функций $1, x, x^2, \ldots x^n$. Определитель Вандермонда

$$D\begin{pmatrix} 1, x, \ldots, & x^n \\ x_{0,} x_{1,} \ldots, & x_n \end{pmatrix} = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) > 0 .$$

В статье найдены условия, которые нужно наложить на функции $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}$, чтобы они образовали M_n-систему на [а, в] при а $< 0 <$ в.

Доказательство проведем двумя способами: опираясь на структуру систем Маркова [1] и устанавливая знаки определителей для некоторых наборов функций.

Теорема. Для того чтобы функции $x^{\alpha_0}, x^{\alpha_1}, \ldots, x^{\alpha_n}$ $(\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n)$ образовали M_n-систему на [а, в] (а$< 0 <$ в), необходимо и достаточно

1) $\alpha_0 = 0$,

2) все разности $\alpha_{k+1} - \alpha_k = m_k$ должны быть нечетными числами.

Достаточность. Так как первая функция не должна иметь корней, $x^0 = 1$.

Докажем, что любой полином $P_к(x) = c_0 + c_1 x^{\alpha_1} + \cdots + c_к x^{\alpha_к}$ к = 1, 2, …, n может иметь на [а, в] не более *к* нулей.

Для доказательства представим $x^{\alpha_к}$ в виде интеграла Стилтьеса от функций $x^{m_к}$ k=1,2,…, n.

Заметим, $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = m_1, \alpha_2 = m_1 + m_2, \ldots, \alpha_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$

$$x^{\alpha_1} = \int_0^x d(x^{m_1}), \quad x^{\alpha_2} = \frac{m_1+m_2}{m_1} \int_0^x d({t_1}^{m_1}) \int_0^{t_1} d({t_2}^{m_2}) \quad , \ldots,$$

$$x^{\alpha_k} = \frac{(m_k+m_{k-1})\dots(m_k+m_{k-1}+\dots+m_1)}{m_1 m_2 \dots m_k} \int_0^x d({t_1}^{m_1}) \int_0^{t_1} d({t_2}^{m_2}) \dots \int_0^{t_k} d(t_k^{m_k}).$$

В полиноме $P_к(x)$ функции $x^{\alpha_к}$ заменим их выражениями через интеграл Стилтьеса. Коэффициенты перед интегралами включим в произвольные постоянные $c_к$ $к = 1, 2, \dots, n$.

$$P_к(x) = c_0 + c_1 \int_0^x d(x^{m_1}) + c_2 \int_0^x d({t_1}^{m_1}) \int_0^{t_1} d({t_2}^{m_2}) + \dots +$$

$$+ c_к \int_0^x d({t_1}^{m_1}) \int_0^{t_1} d({t_2}^{m_2}) \dots \int_0^{t_k} d(t_k^{m_k}).$$

Чтобы установить, что число нулей полинома $P_к(x)$ не превосходит к, начнем рассуждать с конца этого полинома: полином $s_1(x) = A_1 + A_2 \int_0^x d(t_k^{m_k})$ имеет на $[а, в]$ не более одного нуля, так как функция $s_1(x) = A_1 + A_2 x_k^{m_k}$ строго монотонна. Полином $s_2(x) = A_1 + A_2 \int_0^x d(t_1^{m_{k-1}}) + A_3 \int_0^x d({t_1}^{m_{к-1}}) \int_0^{t_1} d({t_2}^{m_к})$ имеет не более двух нулей на $[а, в]$. Если предположить наличие трех и более нулей, то продифференцируем $s_2(x)$ по монотонно возрастающей на $[а, в]$ функции $x^{m_{k-1}}$. По обобщенной теореме Ролля полином $s_1(x) = A_2 + A_3 \int_0^x d(t_k^{m_k})$ обращается в нуль не менее двух раз, получаем противоречие. Далее $s_3(x)$ дифференцируем по $x^{m_{k-2}}$ и так далее повторяем эти рассуждения к + 1 раз. В итоге, полином $P_к(x) = s_к(x)$ может иметь на $[а, в]$ не более *к* нулей.

Необходимость. Предположим противное: хотя бы одно m_k – четное число.

Для определенности пусть $m_1 = m_2 = m_n = 1, m_{n+1} = 2$.

Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 1\, x_1\, x_1^2 \dots & x_1^{n-1} & x_1^{n+1} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots \\ 1 x_{n+1} x_{n+1}^2 \dots & x_{n+1}^{n-1} & x_{n+1}^{n+1} \end{vmatrix} = \sum_{1 \le i < j \le n+1} (x_j - x_i)\,(x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}).$$

Легко подобрать точки на $[а, в]$ $(а < 0 < в)$, чтобы определитель обратился в нуль.

При $m_1 = 3, \; m_2 = 2$ имеем

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^3 & x_1^5 \\ 1 & x_2^3 & x_2^5 \\ 1 & x_3^3 & x_3^5 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)\,(x_2 - x_1)\left[\sum_{i_1+i_2+i_3=5} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}\right].$$

Если положить $x_1 = -1, \quad x_2 = 0, x_3 = 1,$ определитель равен нулю 112 $(x_1^3 x_3^2 + x_1^2 x_3^3) = 0$.

Рассмотрим возможность доказательства теоремы, находя знаки определителей. Пусть $x^{\alpha_0} \equiv 1$ и $\alpha_1 - \alpha_0 = 3 - 0 = 3, \alpha_{к+1} - \alpha_к = 1$ к = 1, 2, …, n–1, то есть рассмотрим систему функций $1, x^3, x^4, \dots, x^n$. Определитель

$$D\begin{pmatrix} 1, x^3, & x^4, \dots, & x^n \\ x_{1,} & x_2, \dots, & x_{n-1} \end{pmatrix} = \prod (x_j - x_i) \left[\sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-2}}^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_1^{n-1} x_{i_1}^2 \dots x_{i_{n-3}}^2 x_{i_{n-2}} x_{i_{n-1}} \right], \qquad [4],$$

где в первой сумме $C_{n-1}^{n-2} = n - 1$ слагаемых, во второй – $C_{n-1}^2 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *слагаемых.* Каждый индекс i_k принимает значения от 1 до $n - 1$, и слагаемые отличаются друг от друга хотя бы одним индексом

$$D\begin{pmatrix}1 & x^3\\ x_1 & x_2\end{pmatrix} = \prod(1,2)(x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = \prod(1,2)\,\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + (x_1 + x_2)^2) > 0$$

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix}1 & x^3 & x^4\\ x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix} = \prod(1,2,3)(\textstyle\sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 + \sum_1^3 x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3}) = \prod(1,2,3)\sum_1^3 x_{i_1}^2 \left(x_{i_2+}x_{i_3}\right)^2.$$

В общем случае $4 \leq m \leq n.$ Для определения знака определителя воспользуемся непрерывностью функций x^i и тем, что а $< 0 <$ в. Пусть
а = $x_0 \leq x_1 < \dots < x_{m-1} \leq x_m = b$ – произвольные точки, и $x_{к-1} < 0 < x_{к+1}$,
к = 1, 2, …, m–1. Sign D $\begin{pmatrix}1 & x^3 \dots & x^m\\ x_1,\dots,x_{k-1},x_k, & x_{k+1},\dots & x_{m-1}\end{pmatrix} =$

$= \mathrm{sign\ D}\begin{pmatrix}1 & x^3 \dots & x^m\\ x_1,\dots,x_{k-1},0, & x_{k+1},\dots & x_{m-1}\end{pmatrix} =$

$= sign|x_1^3|\dots|x_{k-1}^3|x_{k+1}^3 \dots x_{m-1}^3 D\begin{pmatrix}1 & x \dots & x^{m-3}\\ x_1 \dots & x_{k-1,}x_{k+1} \dots & x_{m-1}\end{pmatrix} =$

$= sign|x_1^3|\dots|x_{k-1}^3|x_{k+1}^3 \dots x_{m-1}^3 \prod(x_1,\dots,x_{k-1,}x_{r+1},\dots,x_{m-1}) > 0.$

Рассмотрим теперь систему функций $1, x, x^4, x^5, \dots, x^n$. Для любого $4 \leq m \leq n$ при $x_{к-1} < 0 < x_{к+1}$ имеем

$$\mathrm{sign\ D}\begin{pmatrix}1\,x & x^4 \dots & x^m\\ x_1,\dots & x_{k-1},0,x_{k+1},\dots, & x_{m-1}\end{pmatrix} = sign|x_1|\dots|x_{k-1}|x_{k+1}\dots x_{m-1}$$

$$\mathrm{D}\begin{pmatrix}1 & x^3x^4 \dots & x^{m-1}\\ x_1 \dots & x_{k-1},x_{k+1,} \dots & x_{m-1}\end{pmatrix} > 0,$$

учитывая результат предыдущего случая.

Далее, используя математическую индукцию приходим к выводу, что функции 1, x, $x^2, \dots, x^p, x^{p+3}, x^{p+4}, \dots, x^n$ образуют систему Маркова при $0 \leq p \leq n-3$.

По этой схеме рассуждений доказываем теорему при $\alpha_1 - \alpha_0 = 5$; $\alpha_1 - \alpha_0$=7. При 0 ≤ а < в (а < в ≤ 0) функции x^m монотонно возрастают (убывают) независимо от четности m. Определители тоже отличны от нуля, так как
все x_i одного знака.

Литература

1. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973.
2. *Алиев М.С.* Об определителях Вандермонда с двумя вычеркнутыми степенями // Вестник ДГУ. 2017. Вып. 3. – С. 67–73.
3. *Самовол В.С.* О разложениях решений тригонометрических полиномов в сходящиеся ряды // Математические заметки. 2019. Т. 105, вып. 4.
4. *Потапов М.К., Симонов Б.В.* Неравенства различных метрик для тригонометрических полиномов // Известия вузов. 2019. № 1. – С. 46–52.
5. *Рамазанов А.-Р., Магомедова В.Г.* Рациональные сплайн-функции двух переменных // Вестник ДГУ. 2020. Т. 35, вып. 2. – С. 33–43.
6. *Баладай Р.А., Хабибуллин Б.Н.* От интегральных оценок функций к равномерным // Известия вузов. 2018. № 2. – С. 53–62.
7. *Буслаев В.И.* Об особых точках функций, задаваемых непрерывными дробями // Математические заметки. 2018. Т. 103, вып. 4.
8. *Васильев А.А.* Аппроксимация с интерполяцией сплайнами произвольного дефекта // Математические заметки. 2018. Т. 29, вып. 5 – С. 743–748.

9. *Алиев М.С.* К вопросу реализации нормы одного функционала // Вестник ДГУ. 2013. Вып. 1.

10. *Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г.* Оценка наилучших приближений ограниченных функций со знакочувствительным весом // Вестник ДГУ. 2015. Вып. 6.

11. *Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш.* Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник ДГУ. 2012. Вып. 6.

Поступила в редакцию 21 января 2022 г.

UDK 517.512

DOI: 10.21779/2542-0321-2022-37-2-16–19

On Markov's System Functions

M.S. Aliev

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiyev st., 43a; aliev. mingazhudin @yandex.ru

The article presents some necessary and sufficient conditions under which the arbitrary integer powers of a variable form a Markov system on the interval of a numerical axis, containing the internal coordinate system.

It is indicated that the properties of polynomials in these degrees differ on an interval that does not contain the origin of coordinates.

Keywords: *determinant, Chebyshev system, Markov system, Stiltjes integral, Roll's theorem.*

Received 21 January 2022