УДК 517.956

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-76–82

А.А. Кулиев[1], Н.А. Алиев[2], Н.С. Ибрагимов[1]

Определение фундаментального решения уравнения эллиптического типа порядка $\frac{1}{3}$ из фундаментального решения уравнения Коши–Римана

[1] *Ленкоранский государственный университет; Азербайджан, AZ4200, г. Лянкяран, пр. А. Асланова, 50; quliyev_allahsukur@mail.ru;*

[2] *Бакинский государственный университет; Азербайджан, AZ1148, г. Баку, ул. Академика Захида Халилова, 23.*

В статье рассматривается получение фундаментального решения для двумерного эллиптического уравнения порядка $\frac{1}{3}$. Для этого проводится метод факторизации в уравнении эллиптического типа первого порядка Коши–Римана. Тогда фундаментальные решения уравнения эллиптического типа порядка $\frac{1}{3}$ получаются от фундаментального решения уравнения эллиптического типа первого порядка Коши–Римана. В статье сначала проведена факторизация уравнения Коши–Римана. После этого с использованием определения дробной производной Римана–Луивилля построено фундаментальное решение дифференциального уравнения с частными производными $\frac{1}{3}$ порядка. Для этого решено дифференциальное уравнение с частными производными порядка $\frac{2}{3}$. В результате с помощью метода факторизации получено фундаментальное решение дифференциального уравнения с частными производными $\frac{1}{3}$ порядка, полученного из фундаментального решения уравнения первого порядка Коши–Римана эллиптического типа. Появление дробной производной уточнено многими результатами полученных из теории дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: *уравнения эллиптического типа первого порядка, уравнения эллиптического типа порядка* $\frac{1}{3}$, *фундаментальное решение, уравнения Коши–Римана.*

Введение

Как известно, исследование решения граничной задачи связано с построением функции Грина рассматриваемой граничной задачи. Построение функции Грина – нелегкая задача. Функция Грина связана как с уравнением, так и с граничными условиями, но главная часть функции Грина является фундаментальным решением, и связана также с уравнением поставленной задачи.

Поэтому при построении фундаментального решения можно рассматривать все пространство. Тогда можно успешно применить преобразования Фурье, что показано в [1].

Как известно, фундаментальные решения уравнения Коши–Римана даются в работе [1], где целая глава посвящена получению фундаментальных решений различных уравнений.

Далее на сайте [2] приводится работа, посвященная фредгольмовости граничных задач для уравнения эллиптического, параболического, гиперболического, смешанного, составного и других типов с граничными условиями, соединяющими как нелокальные, так и глобальные (интервалы как по границам, так и по области) слагаемые; отметим, что на сайте [2] содержится более 200 работ. Что касается граничных задач с локальными граничными условиями, то таким задачам посвящены многочисленные работы, из которых отметим [3–13].

Как известно, дробная производная, проявленная в теории памяти металла, в настоящем времени показывает себя во всех работах дифференциального уравнения. В последнее время даже появилось влияние дробной производной на нефтяную промышленность. Так что в математической модели, получаемой в нефтяной промышленности, линейные уравнения второго порядка после замены первого порядка производной на произвольный порядок 1,82 дали отличные результаты [14].

Данная статья посвящена методу факторизации. Оператор Коши–Римана факторизуется к оператору порядка $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$. Оператор порядка $\frac{2}{3}$ применяется к фундаментальному решению уравнения Коши–Римана, и получается фундаментальное решение уравнения эллиптического типа порядок $\frac{1}{3}$.

Постановка задачи

Как известно, фундаментальное решение уравнения Коши–Римана

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_2} + i\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} = 0 \tag{1}$$

имеет вид [1]

$$U(x-\xi) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{x_2 - \xi_2 + i(x_1 - \xi_1)}, \tag{2}$$

образует уравнения

$$(D_2 + iD_1)U(x) = \delta(x), \tag{3}$$

где $i = \sqrt{-1}$, $\delta(x) -$ функция Дирака, $D_k = \frac{d}{dx_k}$, $k = 1, 2$.

Оператор эллиптического типа первого порядка Коши–Римана факторизуем следующим образом:

$$(D_2^{\frac{1}{3}} + \alpha D_1^{\frac{1}{3}})(D_2^{\frac{2}{3}} + \beta D_1^{\frac{1}{3}} D_2^{\frac{1}{3}} + \gamma D_1^{\frac{2}{3}})U(x) = \delta(x). \tag{4}$$

Сравнивая после раскрытия левую часть (4) с выражением (3), получаем

$$\begin{cases} \beta+\alpha=0, \\ \gamma+\alpha\beta=0, \\ \alpha\gamma=i, \end{cases} \tag{5}$$

из которого мы находим

$$\alpha=-i, \ \beta=i, \quad \gamma=-1. \tag{6}$$

Тогда (4) примет вид

$$D_2^{\frac{1}{3}}W(x)-iD_1^{\frac{1}{3}}W(x)=\delta(x), \tag{7}$$

где

$$W(x)=(D_2^{\frac{2}{3}}+iD_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}}-D_1^{\frac{2}{3}})U(x). \tag{8}$$

Исходя из определения дробной производной Римана–Лиувилля [5], правую часть (8) вычислим следующим образом:

$$W(x-\xi)=(D_2^{\frac{2}{3}}+iD_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}}-D_1^{\frac{2}{3}})U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}D_2^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}+\frac{i}{2\pi}D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}-$$

$$-\frac{1}{2\pi}D_1^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}. \tag{9}$$

Здесь

$$D_1^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}=\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{d\tau}{x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)}=-\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{d}{d\tau}\frac{(x_1-\tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\frac{d\tau}{x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{(x_1-\tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)}\Bigg|_{\tau=0}^{x_1}-\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\frac{-id\tau}{[x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)]^2}\right]=-\frac{\partial}{\partial x_1}\left[-\frac{x_1^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\frac{1}{x_2-\xi_2-i\xi_1}+\right.$$

$$\left.+i\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}!}\frac{d\tau}{[x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)]^2}\right]=\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{1}{x_2-\xi_2-i\xi_1}-i\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{d\tau}{[x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)]^2}, \tag{10}$$

где $(-\frac{1}{3})!=\Gamma(\frac{1}{3})$, $\quad \frac{2}{3}!=\Gamma(\frac{2}{3})$, $\quad \Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-t}t^{s-1}dt.$ $\Gamma(s)$ – функция Гамма Эйлера.

Полученное из (10) выражения вставляем в (9) и приходим к следующему:

$$D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}=D_2^{\frac{1}{3}}\left\{\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{1}{x_2-\xi_2-i\xi_1}-i\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{d\tau}{[x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)]^2}\right\}=$$

$$=\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}D_2^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2-i\xi_1}-i\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}d\tau\, D_2^{\frac{1}{3}}\frac{1}{[x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)]^2}=$$

$$=\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{dt}{t-\xi_2-i\xi_1}-i\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}d\tau\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{dt}{\left[t-\xi_2+i(\tau-\xi_1)\right]^2}=$$

$$=-\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{1}{\xi_2+i\xi_1}-\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{dt}{\left[t-\xi_2-i\xi_1\right]^2}-i\frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{d\tau}{\left[-\xi_2+i(\tau-\xi_1)\right]^2}+$$

$$+2i\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}d\tau\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{dt}{\left[t-\xi_2+i(\tau-\xi_1)\right]^3}\ . \qquad (11)$$

Теперь рассмотрим оставшиеся два слагаемых из (9):

$$D_2^{\frac{2}{3}}U(x-\xi) \text{ и } D_1^{\frac{2}{3}}U(x-\xi).$$

Тогда

$$D_2^{\frac{2}{3}}U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{dt}{t-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}, \qquad (12)$$

$$D_1^{\frac{2}{3}}U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{d\tau}{x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)}. \qquad (13)$$

Далее принимая в (12) обозначение $x_2-t=\varphi^3$, а в (13) обозначение $x_1-\tau=\eta^3$, приходим к следующему выражению:

$$D_2^{\frac{2}{3}}U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{dt}{t-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}=\frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{\sqrt[3]{x_2}}^{0}\frac{-3\varphi^2d\varphi}{\varphi^2(x_2-\varphi^3-\xi_2+i(x_1-\xi_1))}=$$

$$=-\frac{3}{2\pi(-\frac{2}{3})!}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\varphi}{\varphi^3-(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))}, \qquad (14)$$

$$D_1^{\frac{2}{3}}U(x-\xi)=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{2}{3}}}{(-\frac{2}{3})!}\frac{d\tau}{x_2-\xi_2+i(\tau-\xi_1)}=\frac{1}{2\pi(-\frac{2}{3})!}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\sqrt[3]{x_1}}^{0}\frac{-3\eta^2d\eta}{\eta^2(x_2-\xi_2+i(x_1-\eta^3-\xi_1))}=$$

$$=\frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\eta}{\eta^3-(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))}. \qquad (15)$$

Разложив на простейшие дроби и вычислив интегралы, находим:

$$D_2^{\frac{2}{3}}U(x-\xi) = -\frac{3}{2\pi(-\frac{2}{3})!}\cdot\frac{\partial}{\partial x_2}\int_0^{\sqrt[3]{x_2}}\frac{d\varphi}{\xi^3-(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))} =$$

$$= \frac{1}{\pi(-\frac{2}{3})!}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^5}}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)})^3}{\xi_2-i(x_1-\xi_1)}\right|-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctg\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}-\frac{\pi}{6}\right]\right]+\frac{1}{2\sqrt[3]{x_2^2}\,(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))}\right\}. \qquad (16)$$

Точно так же для второго слагаемого имеем

$$D_1^{\frac{2}{3}}U(x-\xi) = \frac{3i}{2\pi(-\frac{2}{3})!}\cdot\frac{\partial}{\partial x_1}\int_0^{\sqrt[3]{x_1}}\frac{d\eta}{\eta^3-(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))} =$$

$$= -\frac{i}{\pi(-\frac{2}{3})!}\left\{-\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))^5}}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\left(\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)}\right)^3}{\xi_1+i(x_2-\xi_2)}\right|-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\frac{2\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt[3]{x_1^2}\,\sqrt[3]{(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))^2}}\right\}. \qquad (17)$$

Таким образом, для функции $W(x-\xi)$ из (9) имеем

$$W(x-\xi) = (D_2^{\frac{2}{3}}+iD_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}}-D_1^{\frac{2}{3}})U(x-\xi) = \frac{1}{2\pi}D_2^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}+$$

$$+\frac{i}{2\pi}D_2^{\frac{1}{3}}D_1^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}-\frac{1}{2\pi}D_1^{\frac{2}{3}}\frac{1}{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)},$$

что совместно с (15), (16) и (17) позволяет нам утверждать следующее:

Теорема. Для фундаментального решения уравнения эллиптического типа порядка $\frac{1}{3}$ из уравнения Коши–Римана с помощью метода факторизации получаем следующие выражения:

$$W(x-\xi) = \frac{1}{\pi(-\frac{2}{3})!}\left\{\frac{1}{\sqrt[3]{(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))^5}}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(\sqrt[3]{x_2}-\sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)})^3}{\xi_2-i(x_1-\xi_1)}\right|-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\left[arctg\,\frac{2\cdot\sqrt[3]{x_2}+\sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1)}}-\frac{\pi}{6}\right]\right]+\frac{1}{2\sqrt[3]{x_2^2}\,(x_2-\xi_2+i(x_1-\xi_1))}\right\}-$$

$$-\frac{i}{2\pi}\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{1}{\xi_2+i\xi_1}-\frac{i}{2\pi}\frac{x_1^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{dt}{\left[t-\xi_2-i\xi_1\right]^2}+\frac{1}{2\pi}\frac{x_2^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{d\tau}{\left[-\xi_2+i(\tau-\xi_1)\right]^2}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{x_1}\frac{(x_1-\tau)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}d\tau\int_0^{x_2}\frac{(x_2-t)^{-\frac{1}{3}}}{(-\frac{1}{3})!}\frac{dt}{\left[t-\xi_2+i(\tau-\xi_1)\right]^3}-\frac{i}{\pi(-\frac{2}{3})!}\left\{-\frac{1}{\sqrt[3]{(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))^5}}\left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{\left(\sqrt[3]{x_1}-\sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)}\right)^3}{\xi_1+i(x_2-\xi_2)}\right|-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(arctg\,\frac{2\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)}}{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2)}}-\frac{\pi}{6}\right)\right]+\frac{1}{2\sqrt[3]{x_1^2}\,\sqrt[3]{(x_1-\xi_1-i(x_2-\xi_2))^2}}\right\}. \quad (18)$$

Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
2. Home page of Professor Dr. Aliev: http://nihan.jsoft.ws, List of publications of Professor Nihan A. Aliev.
3. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1966. – 352 с.
4. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. – М.: Высшая школа, 1977. – 432 с.
5. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.
6. *Aliev N.A., Ibrahimov N.S., Guliev A.A.* A factorization method for the determination of the fundamental solution to the linear $\frac{1}{3}$-order elliptic equation//XXXI International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties, (PDMU–2018). – July 3–8, 2018. – Lankaran–Baku, Republic of Azerbaijan. – 2018. – P. 14–16.
7. *Aliev N.A., Ibrahimov N.S., Kuliev A.A.* On a fundamental solutions of some fractional differential equations. XXXII International Conference Problems of Decision Making Under Uncertainties, (PDMU–2018). – August 27–31, 2018. – Prague, Czech Republic, 2018. – P. 53–55.
8. *Rashedi K., Borzabadi A.H., Zarhoun M.* Application of the method of fundamental solutions for designing the optimal shape in heat transfer // Computational methods for differential equations. – 2021. – Vol. 9, Iss. 1. – P. 273–288.
9. *Rek Z., Sarler B*. The method of fundamental solutions for the Stokes flow with the subdomain technique // Engineering analysis with boundary elements. – 2021. – Vol. 128. – P. 80–89.
10. *Qu W.Z., Fan C.M., Gu Y., Wang F.J.* Analysis of three-dimensional interior acoustic fields by using the localized method of fundamental solutions // Applied mathematical modelling. – 2019. – Vol. 76. – P. 122–132.
11. *Grabski J.K.* Numerical solution of non-Newtonian fluid flow and heat transfer problems in ducts with sharp corners by the modified method of fundamental solutions and radial basis function collocation // Engineering analysis with boundary elements. – 2019. – Vol. 109. – P. 143–152.

12. *Ravnik J., Tibuat J.* Fast boundary-domain integral method for unsteady convection-diffusion equation with variable diffusivity using the modified Helmholtz fundamental solution // Numerical algorithms. – 2019. – Vol. 82, Iss. 4. – P. 1441–1466.

13. *Yang X.J., Gao F., Ju Yang., Zhou H.W.* Fundamental solutions of the general fractional-order diffusion equations // Mathematical methods in the applied sciences. – 2018. – Vol. 41, Iss. 18. – P. 9312–9320.

14. *Aliev F.A., Aliev N.A.* New inverse problem to determine the order fractional derivatives of the oscillation system. – Baku: The reports of National Academy of sciences of Azerbaijan, physcial-mathematical sciences. – 2019. – № 75. – P. 13–16.

Поступила в редакцию 2 июня 2021 г.

UDC 517.956

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-76–82

Determination of the Fundamental Solution of the Elliptic Equation of $\frac{1}{3}$ Order Out of the Fundamental Solution of the Cauchy–Riemann Equation

A.A. Guliev[1], N.A. Aliev[2], N.S. Ibrahimov[1]

[1] Lankaran State University; Azerbaijan, AZ4200, Lankaran, A. Aslanov ave., 50; quliyev_allahsukur@mail.ru;
[2] Baku State University; Azerbaijan, AZ1148, Baku, Acad. Zahid Khalilov st., 23;

The work is devoted to obtaining the fundamental solution for the two-dimensional elliptic equation of order $\frac{1}{3}$. For this purpose, the factorization method is applied to the first-order elliptic type Cauchy–Riemann equation. Then the fundamental solutions of the equation of elliptic type of order $\frac{1}{3}$ are derived from the fundamental solution of the Cauchy–Riemann equation. First, the factorization of the Cauchy–Riemann equation is carried out, unknown coefficients are found and substituted into the equation. Second, using the definitions of the Riemann–Louiville fractional derivative, the fundamental solution of the partial differential equation of the order $\frac{1}{3}$ is constructed. For this purpose, the differential equation of the order $\frac{2}{3}$ is solved. As a result, using the factorization method, a fundamental solution of the differential equation with fractional derivatives of the order $\frac{1}{3}$ is obtained, composed of the fundamental solution of the Cauchy–Riemann equation of elliptic type.

Keywords: *first order elliptic type equations, elliptic type equations of order* $\frac{1}{3}$, *fundamental solutions, Cauchy–Riemann equation.*

Received 2 June 2021