УДК 517.9+43

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-68–75

***М.К. Ризаев*[1], *А.Г. Баламирзоев*[1, 2], *С.А Агаханов*[2]**

Об одном фундаментальном утверждении математики и его обобщениях и приложениях

[1] *Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; rizaev.56@mail.ru;*
[2] *Дагестанский государственный педагогический университет; 367003, Россия, г. Махачкала, Ярагского, 57; abdul2000@yandex.ru*

В статье приведены различные обобщения теоремы Пифагора, играющие существенную роль в различных вопросах анализа, механики. Бесконечномерным аналогом данного утверждения является теорема Парсеваля, занимающая стержневое положение в анализе. Вопросы полноты ортогональных систем функций и разложений по ним неизбежно приводят к использованию равенства Парсеваля, обобщения теоремы Пифагора. Как известно, теория возмущений линейных операторов, созданная Рэлеем и Шредингером, представляет собой курс результатов по спектральной теории линейных операторов, занимающий важное место в прикладной математике, механике. В теории возмущений важной проблемой является вопрос разложения функций по ортогональным системам функций, связанный равенством Парсеваля. С использованием метода теории возмущений получено асимптотическое представление критических нагрузок по малому параметру ε в задаче продольного изгиба стержня.

Ключевые слова: *ортогональная система, равенство Парсеваля, краевая задача, асимптотика, критическая нагрузка.*

1. Теорема Пифагора и некоторые ее обобщения в конечномерных пространствах

Одна из жемчужин всей математики – теорема Пифагора – имеет простую формулировку.

Теорема 1. Квадрат длины гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин его катетов.

В зависимости от рассматриваемой задачи данное утверждение формулируется в различных формах [1–2]: квадрат длины диагонали прямоугольника равен сумме квадратов двух его непараллельных сторон; площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах; квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин его трех ребер с общей вершиной и т. д.

Пусть в *n*-мерном евклидовом пространстве E_n выбрана ортогональная система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. При любых действительных числах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ имеет место равенство [1; 5]:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i, \vec{a}_i\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2, |\vec{a}_i|^2. \quad (1)$$

Безусловно, равенство (1) является обобщением теоремы Пифагора на случай многомерного евклидова пространства.

Рассмотрим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из евклидова пространства E_n, имеющие в заданной ортонормированной системе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ координатные представления

$$\vec{a} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \qquad \vec{b} = (y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Имеет место следующее предложение, являющееся также обобщением теоремы Пифагора [1; 5].

Теорема 2. Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n = 0. \tag{2}$$

В трехмерном пространстве рассмотрим регулярную кривую

$$\vec{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big), \qquad a < t < b.$$

Имеет место своеобразный аналог теоремы Пифагора, выражаемый следующим равенством для дифференциалов [3; 4; 6; 7]:

$$(d\vec{r})^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \tag{3}$$

В случае регулярной кривой

$$\vec{r}(t) = \big(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\big)$$

многомерного пространства R^n равенство (3) допускает обобщение и принимает вид

$$(d\vec{r})^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + \dots + (dx_n)^2\,. \tag{4}$$

Равенства (3)–(4) имеют место для длины $S(t)$ дуги регулярной кривой, заданной уравнением $\vec{r} = \vec{r}(t)$, ибо в случае регулярности кривой

$$dS(t) = |\vec{r}(t)|dt.$$

Обобщение теоремы Пифагора, задаваемое равенствами (3)–(4), имеет самые различные приложения в механике [6; 7]. Приведем примеры из механики, иллюстрирующие данный факт.

Пусть нам дано трехмерное ориентированное риманово многообразие M. Предположим, что в нем даны локальные координаты x_1, x_2, x_3. Если квадрат элемента длины имеет вид

$$dS^2 = E_1dx_1^2 + E_2dx_2^2 + E_3dx_3^2,$$

то координаты x_1, x_2, x_3 называются триортогональной системой координат в M.

Различные математические преобразования, в частности векторные операции, в триортогональной системе координат существенно упрощаются. К примеру, если векторное поле имеют вид

$$\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + A_3\vec{e}_3,$$

где $\vec{e}_i$ – координатные орты, то для ротора и дивергенции этого поля имеет место соответственно следующие представления:

$$\operatorname{rot}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\begin{vmatrix} \sqrt{E_1}\vec{e}_1 & \sqrt{E_2}\vec{e}_2 & \sqrt{E_3}\vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{dx_2} & \dfrac{\partial}{dx_3} \\ A_1\sqrt{E_1} & A_2\sqrt{E_2} & A_3\sqrt{E_3} \end{vmatrix},$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(A_1\sqrt{E_2E_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(A_2\sqrt{E_3E_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(A_3\sqrt{E_1E_2}\right)\right].$$

Оператором Лапласа на многообразии M называется оператор

$$\Delta = \operatorname{di}v\operatorname{grad}.$$

Для его выражения на скалярном поле $f = f(x_1, x_2, x_3)$, заданном на M, в случае триортогональной системы имеет место упрощенное представление

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{E_1E_2E_3}}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{\frac{E_2E_3}{E_1}}\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{\frac{E_1E_3}{E_2}}\frac{df}{dx_2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{\frac{E_1E_2}{E_3}}\frac{df}{dx_3}\right)\right].$$

В произвольной системе координат приведенные формулы имеют сложный вид. Условие ортогональности системы координат, выполнение обобщенной теоремы Пифагора существенно упрощают многие математические объекты, инвариантные относительно выбора декартовой системы координат.

Положение механической системы с числом частиц N определяется вектором

$$X(t) = \left(\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_N(t); \vec{p}_1(t), \dots, \vec{p}_N(t)\right)$$

значений координат и значений импульсов всех частиц этой системы. Пространство $n = 6N$ переменных образует 6N-мерное фазовое пространство рассматриваемой механической системы. Всякие функции координат и импульсов частиц системы $f = f(X)$ являются функциями динамических переменных. Состояние механической системы задается набором значений основных динамических переменных системы. Вопросы поведения функций динамических переменных удобно рассматривать в ортогональных системах.

2. Бесконечномерный аналог теоремы Пифагора

Пусть задано бесконечномерное евклидово пространство E с заданным скалярным произведением (f, g) для произвольных векторов f и g из E. Длина вектора f определяется как норма $\|f\|$ по формуле

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}\ ,$$

а углом φ между векторами f и g – согласно формуле

$$(f, g) = \|f\| \cdot \|g\| \cos\varphi.$$

Пусть система векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$ является попарно ортогональной в евклидовом пространстве E. Тогда для любых вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ имеет место равенство

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\,\|f_i\|^2$$

при любом конечном n. Данное равенство очевидно, и оно по смыслу является обобщением теоремы Пифагора; задаваемое равенство (1) для конечномерного случая.

Рассмотрим произвольную ортогональную систему элементов

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

из евклидова пространства E. Для произвольного вектора f из E определим коэффициенты Фурье

$$c_k = (f, \varphi_k), k = 1, 2, \dots.$$

Как известно, имеет место следующее неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2\,\|\varphi_k\|^2 \le \|f\|^2. \qquad (5)$$

Ортогональная система $\{\varphi_k\}$ называется полной в E, если для любого элемента f данного пространства E и для любого положительного числа ε найдется такая линейная комбинация

$$\sigma_n = \alpha_1\varphi_1 + \alpha_2\varphi_2 + \dots + \alpha_n\varphi_n$$

конечного числа элементов $\{\varphi_k\}$, отклонение которой от f по норме пространства E меньше ε.

Иными словами, система $\{\varphi_k\}$ называется полной, если любой элемент данного пространства E можно приблизить по норме этого пространства с любой степенью точности линейными комбинациями конечного числа элементов из $\{\varphi_k\}$.

Имеет место следующее предложение, являющееся обобщением теоремы Пифагора на случай бесконечномерного евклидового пространства.

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_k\}$, $k = 1,2,\dots$ есть полная ортогональная система векторов в евклидовом пространстве E и $c_k = (f, \varphi_k)$. Тогда для любого элемента f из E имеет место равенство Парсеваля

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \|f\|^2. \tag{6}$$

Равенство Парсеваля (6) вполне понятно и по своему смыслу так же очевидно. Вектор

$$f_k = c_k \varphi_k = (f, \varphi_k)\varphi_k$$

является проекцией вектора f на направление вектора φ_k. Следовательно, геометрически равенство Парсеваля означает, что сумма квадратов длин проекций вектора f на взаимно ортогональные направления равна квадрату длины самого вектора f. В этом и состоит утверждение теоремы Пифагора в случае конечномерных евклидовых пространств E_n, в частности пространств R^2 и R^3. Если же система $\{\varphi_k\}$ не полна, не задает, не замыкает всё евклидово пространство E, то имеет место неравенство Бесселя [8–10].

Систему векторов называют замкнутой в евклидовом пространстве E, если ее линейная оболочка плотна в E. В сепарабельном евклидовом пространстве полнота и замкнутость ортогональной системы эквивалентны.

Для замкнутости в E ортогональной системы векторов необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора f имело место равенство Парсеваля (6). Равенство Парсеваля по праву часто называют уравнением замкнутости.

3. Приложение равенства Парсеваля к задачам механики и математической физики

Решение различных задач естествознания сводится к исследованию соответствующих им краевых задач, математических моделей. Как известно, решение краевых задач эквивалентно исследованию спектральных характеристик соответствующего дифференциального оператора. При этом возникает задача разложения функции в ряд Фурье по собственным функциям рассматриваемой краевой задачи. Можно указать большое число задач, решение которых приводит к разложению по собственным функциям дифференциальных операторов. Среди этих задач большой интерес представляют задачи квантовой механики, для которых дифференциальные операторы являются основным математическим аппаратом. Сама задача разложения функции по собственным функциям оператора неразрывно связана с задачей обоснования равенства Парсеваля для полученного разложения [10; 13].

Рассмотрим задачу произвольного изгиба стержня, в которой требуется определить критические нагрузки P_n, под воздействием которых стержень теряет свою первоначальную прямолинейную форму и изгибается. В случае стержня длины l с одним свободным и другим защемленными концами данная задача механики приводится к решению следующей краевой задачи [14–16]:

$$-E(x)J(x)y''(x) = Py(x), \; 0 < x < l \tag{7}$$

$$y(0) = 0, y'(l) = 0, \tag{8}$$

где *P* – приложенная к свободному концу стержня сила; E(x) и *J(x)* – соответственно модуль упругости Юнга и осевой момент инерции стержня, характеризующие деформационные свойства стержня; *y(x)* – уклонение изогнутого стержня от первоначального прямолинейного положения в точке с абсциссой *x*. Как нетрудно понять, *y(x)* есть уравнение изогнутой формы стержня в выбранной системе координат, принимаемой под воздействием приложенной силы *P*.

Если рассмотреть дифференциальный оператор

$$Hf(x) = -E(x)J(x)\, f''(x) \tag{9}$$

на пространстве функций

$$D(H) = \{\in C^2[0,l] \mid f(0) = 0, f''(l) = 0\}, \tag{10}$$

то решение краевой задачи (7)–(8) приводится к исследованию спектральных свойств оператора H.

Определение собственных значений оператора H в общем случае осложняется в зависимости от свойств функции $\rho(x) = E(x)J(x)$. Воспользуемся методом теории возмущений для получения асимптотики собственных чисел оператора H.

Обозначим через H_0 оператор, в который вырождается оператор H при постоянных параметрах

$$E(x) = E_0, \qquad J(x) = J_0, \qquad 0 \le x \le l.$$

Тогда собственные числа оператора H_0 распределены по закону [14–15]:

$$P_n = E_0 J_0 \left(\frac{2n+1}{2l}\right)^2 \pi^2, \ \ n = 0,1,2,\dots; \tag{11}$$

соответствующие им нормированные собственные функции имеют вид

$$\Psi_n(x, p_n) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{2n+1}{2l}\pi x, \qquad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{12}$$

Ортонормированная система функций (12) является полной в пространстве $L^2(0,l)$ действительных функций с обычным скалярным произведением [10; 15]. Для разложений непрерывных функций по данной системе имеет место равенство Парсеваля. Этот факт позволяет нам использовать метод теории возмущений для получения асимптотики спектра оператора H [11; 12].

Пусть εB есть малое возмущение оператора H_0, т. е. $H = H_0 + \varepsilon B$, где ε – вещественное малое число, а операторы H, H_0, B определены на одном и том же пространстве. При выполнении соответствующих условий для собственных чисел $P_n(\varepsilon)$ оператора H имеет место разложение

$$P_n(\varepsilon) = P_n + P_n^{(1)}\varepsilon + P_n^{(1)}\varepsilon^2 + \dots + P_n^{(k)}\varepsilon^k + \dots, \tag{13}$$

где $P_n^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots -$ постоянные, коэффициенты при степенях разложения.

Как мы видим из (13), постоянная $P_n^{(1)}$ есть коэффициент при параметре малости ε в главном члене поправки к величине $P_n(\varepsilon)$. Для этого коэффициента имеет место следующее представление в виде скалярного произведения [11–13]:

$$P_n^{(1)} = (B\Psi_n, \Psi_n). \tag{14}$$

Предположим, что оператор *B* на множестве функций D(H) порождается выражением

$$Bf(x) = -E_0 J_0 Q_5(x) f''(x), \tag{15}$$

где

$$Q_5(x) = \sum_{i=0}^{5} a_i x^{5-i}$$

есть многочлен степени *n* = 5.

Теорема. Пусть в краевой задаче (7)–(8) функция жесткости равна $\rho(x) = E_0 J_0[1 + \varepsilon Q_5(x)]$, $\widehat{Q}_6(x)$ есть произвольная первообразная многочлена $Q_5(x)$ и

$$\alpha_n(l) = \frac{l}{\pi(2n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Тогда для собственных значений $P_n(\varepsilon)$ краевой задачи (7)–(8) при малых вещественных ε справедлива асимптота

$$P_n(\varepsilon) = E_0 J_0 \left[\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right]^2 \{1 + \frac{\varepsilon}{l}\{\widehat{Q}_6(l) - \widehat{Q}_6(0) - \\ -\alpha_n^2(l)\left[Q'_5(l) + Q'_5(0)\right] + \alpha_n^4(l)\left[Q'''_5(l) + Q'''_5(0)\right] - \\ -\alpha_n^6(l)\left[Q^{V}_5(l) + Q^{V}_5(0)\right]\}\} + O(\varepsilon^2). \tag{16}$$

Доказательство. Поскольку согласно равенству (12)

$$\Psi''_n(x) = -\sqrt{\frac{2}{l}}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right]^2 \sin\frac{\pi(2n+1)x}{2l}dx,$$

то в силу равенств (14)–(15) будем иметь

$$P_n^{(1)} = E_0 J_0 \frac{2}{l}\left[\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right]^2 \int_0^l Q_5(x)\sin^2\frac{\pi(2n+1)x}{2l}dx. \tag{17}$$

Обозначим через J интеграл в правой части соотношения (17).

Нетрудно видеть, что

$$J = \frac{1}{2}\left[\int_0^l Q_5(x)dx - \int_0^l Q_5(x)\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}dx\right]. \tag{18}$$

Значение первого интеграла из последнего выражения равно $\widehat{Q_6}(l) - \widehat{Q_6}(0)$; проводя во втором интеграле из данного выражения два раза интегрирование по частям, мы придем к соотношению

$$J = \frac{1}{2}\left\{\widehat{Q_6}(l) - \widehat{Q_6}(0) + \left[\frac{l}{\pi(2n+1)}\right]^2 \times \right. \\ \times \left[Q'_5(l) + Q'_5(0) \right. \\ \left.\left. + \int_0^l Q''_5(x)\cos\frac{\pi(2n+1)}{l}dx\right]\right\}. \tag{19}$$

Вполне очевидно равенство

$$\int_0^l Q''_5(x)\cos\frac{\pi(2n+1)}{l}dx = \\ = -\frac{l}{\pi(2n+1)}\int_0^l Q'''_5(x)\sin\frac{\pi(2n+1)x}{l}dx. \tag{20}$$

Обозначим интеграл в правой части (20) через J_1. Однократное интегрирование по частям в нем показывает, что

$$J_1 = \frac{l}{\pi(2n+1)}\left[Q'''_5(l) + Q'''_5(0) + \int_0^l Q^{IV}_5(x)\cos\frac{\pi(2n+1)x}{l}dx\right]. \qquad (21)$$

Введем для интеграла из (21) обозначение J_2. Понятно, что

$$J_2 = -\left[\frac{l}{\pi(2n+1)}\right]^2 \left[Q^{V}_5(l) + Q^{V}_5(0)\right].$$

Следовательно, для интеграла J_1 имеем формулу

$$J_1 = \frac{l}{\pi(2n+1)}\left[Q'''_5(l) + Q'''_5(0)\right] - \left[\frac{l}{\pi(2n+1)}\right]^3 \left[Q^{V}_5(l) + Q^{V}_5(0)\right],$$

соответственно для интеграла J будем иметь представление

$$J = \frac{1}{2}\left\{\widehat{Q_6}(l) - \widehat{Q_6}(0) + \left[\frac{l}{\pi(2n+1)}\right]^2 \left[Q'_5(l) + Q'_5(0)\right] - \left[\frac{\pi(2n+1)}{l}\right]^4 \left[Q'''_3(l) + Q'''_3(0)\right] + \left[\frac{\pi(2n+1)}{l}\right]^6 \left[Q^{V}_5(l) + Q^{V}_5(0)\right]\right\}. \qquad (22)$$

Согласно принятому обозначению *J* для интеграла (17) имеем, что

$$P_n^{(1)} = E_0 J_0 \left[\frac{\pi(2n+1)}{2l}\right]^2 J. \qquad (23)$$

Из соотношений (13), (22) и (23) имеем требуемую асимптотику (16). Теорема доказана.

Литература

1. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. – М.: Наука, 2012. – 272 с.
2. *Погорелов А.В.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 2015. – 208 с.
3. *Погорелов А.В.* Дифференциальная геометрия. – М.: Наука, 2018. – 172 с.
4. *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия. – М.: Наука, 1990. – 672 с.
5. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. – 476 с.
6. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1979. – 432 с.
7. *Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1979. – 760 с.
8. *Суетин П.К.* Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
9. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматлит, 1962. – 500 с.
10. *Левитан Б.М.* Разложение по собственным функциям. – М.: Гостехиздат, 1950. – 160 с.
11. *Маслов В.П.* Теория возмущений и асимптотические методы. – М.: Изд-во МГУ, 1950. – 166 с.
12. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
13. *Костюченко А.Г., Саргсян И.С.* Распределение собственных значений. – М.: Наука, 1979. – 400 с.
14. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. – М.: Наука, 1969. – 504 с.
15. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 504 с.
16. *Тимошенко С.П.* Теория упругости. – М.: Наука, 1974. – 576 с.

17. *Ризаев М.К.* Приложение метода стационарной теории возмущений к вычислению критических нагрузок в задаче продольного изгиба стержня // Сб. материалов XIII Межд. конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики». – Махачкала: Изд-во ДГУ, 2019. – С. 136–138.
18. *Ризаев М.К.* Приложение метода стационарной теории возмущений к вычислению критических нагрузок в задаче продольного изгиба стержня // Вестник ДГУ. – 2020. – Т. 5, вып. 3. – С. 24–30.
19. *Мирзоев К.А., Шкаликов А.А.* Дифференциальные операторы четного порядка с коэффициентами-распределениями // Мат. заметки. – 2016. – Т. 99, № 5. – С. 788–793.
20. *Шкаликов А.А.* О базисных свойствах корневых функций дифференциальных операторов, содержащих спектральный параметр в краевых условиях // Диф. уравнения. – 2019. – Т. 55, № 5. – С. 631–643.

Поступила в редакцию 7 октября 2021 г.

UDC 517.9 + 43

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-68–75

On a Fundamental Statement of Mathematics and Its Generalizations and Applications

M.K. Rizaev[1], A.G. Balamirzoev[1, 2], S.A. Agakhanov[2]

[1] Dagestan State University; Russia, 367000,Makhachkala, Gadzhiev st., 43a; rizaev.56@mail.ru;
[2] Dagestan State Pedagogical University; Russia, Makhachkala, Yaragskiy st., 57; abdul2000@yandex.ru

The paper presents various generalizations of the Pythagorean theorem, that play an essential role in various issues of analysis and mechanics. An infinite-dimensional analogue of this statement is Parseval's theorem which occupies a pivotal position in the analysis. Questions of the completeness of orthogonal systems of functions and their expansions inevitably lead to the use of Parseval's equality, a generalization of the Pythagorean theorem. As is known, the perturbation theory of linear operators, created by Rayleigh and Schrödinger, is a course of results on the spectral theory of linear operators, which occupies an important place in applied mathematics and mechanics. In perturbation theory, an important problem is the question of the expansion of functions in terms of orthogonal systems of functions, connected with the Parseval equality. Using the method of perturbation theory, an asymptotic representation of critical loads with respect to the small parameter ε in the problem of longitudinal bending of a bar is obtained.

Keywords: *orthogonal system, Parseval's equality, boundary value problem, asymptotics, critical load*.

Received 7 October 2021