УДК 517.958

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-54–60

Х.С. Тарамова

О глобальной разрешимости уравнения Аллера

Чеченский государственный педагогический университет; Россия, 364037, Чеченская Республика, г. Грозный, ул. Субры Кишиевой, 33; thedi@yandex.ru

В статье исследуется глобальная по времени разрешимость задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения в частных производных соболевского типа, не разрешенного относительно временной производной первого порядка, так называемого уравнения Аллера, которое описывает (при определенных физических допущениях) движение влаги в капиллярно-пористых средах. Рассматриваемое уравнение является псевдопараболическим уравнением соболевского типа, не разрешенным относительно производной по временной переменной t. Вопросы существования и поведения решений уравнения Аллера исследовались в работах многих авторов, в частности в работах А.М. Нахушева, А.И. Кожанова, Х.Г. Умарова.

В данной статье анализ глобальной разрешимости задачи Коши для уравнения Аллера проводится в банаховом пространстве непрерывных ограниченных на всей числовой оси функций, для которых существуют пределы на минус и плюс бесконечности. В статье доказаны существование и единственность глобального классического решения задачи Коши для псевдопараболического уравнения Аллера на произвольном временном отрезке. В работе также получены априорные оценки, обеспечивающие существование глобального решения задачи Коши для уравнения Аллера. Существование и единственность глобального классического решения задачи Коши для уравнения Аллера на произвольном временном отрезке в данной работе доказываются с использованием следующего алгоритма: принимая функцию $v(x, t_*)$ за новую начальную функцию, классическое решение $v(x,t)$ с отрезка $[0, t_*]$ продолжается до классического решения $v(x,t)$, $t \in [0, t_* + \delta]$, где величина δ зависит от нормы начальной функции $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ и параметров уравнения Аллера. Повторяя этот процесс достаточно большое число раз, получим классическое решение задачи Коши для уравнения Аллера на произвольном временном интервале.

Ключевые слова: *уравнение Аллера, априорные оценки решения уравнения, глобальная разрешимость.*

Введение

Движение влаги в капиллярно-пористых средах моделируется [1, с. 137] уравнением Аллера:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[d(w)\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha\frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x}\right], \qquad (1)$$

где α – варьируемый параметр, $d(w)$ – коэффициент диффузитивности, являющийся функцией искомой влажности w.

Уравнение (1) является псевдопараболическим уравнением соболевского типа [1; 2], не разрешенным относительно производной по временной переменной t.

Различные аспекты уравнения Аллера, вопросы существования и **поведения его решений** исследовались в работах [3–8] при различных допущениях относительно коэффициента диффузитивности $d(w)$; например, в [4] рассмотрены случаи линейной функции $d(w) = \beta + \gamma w$, где β, γ – физические параметры, характеризующие почву, и параметры экспоненциальной функции $d(w) = \beta e^{\gamma w}$ для почв типа Гарднера.

В статье [8] исследована задача Коши для уравнения Аллера в предположении, что варьируемый параметр $\alpha = \text{const} > 0$, и рассмотрены последовательно два случая: постоянного коэффициента диффузитивности $d(w) = \beta$ и степенной функции $d(w) = \beta + \gamma w^{\sigma}$. Задача Коши для уравнения Аллера в [8] рассматривается в банаховом пространстве [9, гл. VIII, § 1] $C[-\infty, +\infty] \equiv C[R^1]$ непрерывных функций $\psi = \psi(x)$, для которых существуют пределы при $x \to \pm\infty$ и норма которого определяется по формуле $\|\psi(x)\|_{C[R^1]} = \sup_{x \in R^1} |\psi(x)|$, основываясь на предположении, что начальная функция $\varphi = \varphi(x)$ задачи Коши

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \qquad x \in R^1, \tag{2}$$

и искомое классическое решение $w = w(x,t)$, $(x,t) \in R^1 \times \overline{R}_+^1$, $\overline{R}_+^1 = [0, +\infty]$ уравнения (1) для всех значений временной переменной $t \in \overline{R}_+^1$ по переменной $x \in R^1$ принадлежат банахову пространству $C[R^1]$.

В [8] доказано, что в случае постоянного коэффициента диффузитивности: $d(w) = \beta$, т. е. в случае рассмотрения задачи Коши для линейного уравнения Аллера вида

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{3}$$

и при выполнении начальной функцией условия $\varphi(x) \in C[R^1]$: $\varphi'(x)$, $\varphi''(x) \in C[R^1]$ имеет место глобальная разрешимость (для всех $t \in \overline{R}_+^1$) задачи Коши (3), (2) в явном виде, причем классическое решение $w(x,t)$ по временной переменной t удовлетворяет полугрупповому свойству, дважды непрерывно дифференцируемо по пространственной переменной x при $t \geq 0$ и бесконечно дифференцируемо по временной переменной $t \geq 0$.

В случае заданности коэффициента диффузитивности степенной функцией $d(w) = \beta + \gamma w^{\sigma}$, $\gamma \neq 0$, $\sigma > 0$, т. е. когда уравнение Аллера (1) рассматривается в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\sigma + 1} \frac{\partial^2 w^{\sigma+1}}{\partial x^2}, \tag{4}$$

в [8] доказано, что, если начальная функция $\varphi(x) \neq 0$ принадлежит пространству $C[R^1]$, тогда существует временной отрезок $[0, t_*]$, где

$$t_* < \frac{(\sigma + 1)\alpha}{2|\gamma|\sigma} \left(\sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \right)^{-\sigma},$$

на котором существует единственное классическое решение $w = w(x,t)$, $(x,t) \in R^1 \times [0, t_*]$ задачи Коши (5), (2) в пространстве $C[R^1]$ для этого пространства справедлива оценка

$$\sup_{x \in R^1} |w(x,t)| \leq \frac{\sup_{x \in R^1} |\varphi(x)|}{\left\{ 1 - \left(\sup_{x \in R^1} |\varphi(x)| \right)^{\sigma} \frac{2|\gamma|\sigma}{(\sigma + 1)\alpha} t \right\}^{1/\sigma}}.$$

Цель настоящей статьи – проанализировать глобальную разрешимость, т. е. выяснить условия существования решения $w = w(x,t)$ для всех $t \in \overline{R}_+^1$ (не рассмотрено в [8]) задачи Коши (4), (2).

Вместе с уравнением (4) будем рассматривать вспомогательное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\sigma+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma+1} = 0. \qquad (5)$$

Отметим, что после дифференцирования обеих частей уравнения (5) и последующей подстановки $\frac{\partial v}{\partial x} = w$ приходим к уравнению (4).

Предположим, что классические решения уравнений (4) и (5) принадлежат не только пространству $C[R^1]$, но и пространству Соболева $W_2^1(R^1)$, состоящему из функций $\psi = \psi(x)$ пространства $L_2(R^1)$, у которых существуют обобщенные производные $\psi' = \psi'(x)$, также принадлежащие пространству $L_2(R^1)$, и норма которого вводится по формуле

$$\|\psi(x)\|_{W_2^1(R^1)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} [(\psi(x))^2 + (\psi'(x))^2]\, dx \right)^{1/2}.$$

Здесь $L_2(R^1)$ – пространство функций с интегрируемым квадратом на R^1, скалярное произведение и норма которого вводятся соответственно по формулам

$$(\varphi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, \psi(x)\, dx, \qquad \|\varphi\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

Известно, что если функция $\psi(x) \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$, то справедлива оценка

$$\|\psi(x)\|_{C[R^1]} \le \|\psi(x)\|_{W_2^1(R^1)},$$

причем, если производная второго порядка функции $\psi(x)$ принадлежит пространству $C[R^1]$, то пределы как самой функции $\psi(x)$, так и ее производной $\psi'(x)$ при $x \to \pm\infty$ равны нулю [10].

Заметим, что если решения уравнений (4) и (5) по переменной x принадлежат пространству Соболева $W_2^1(R^1)$, то из существования локального классического решения $w = w(x,t)$, $(x,t) \in R^1 \times [0, t_*]$ уравнения (4)

$$w(x,t) = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \in C[R^1] \cap W_2^1(R^1)$$

следует существование соответствующего классического решения $v = v(x,t)$:

$$v(x,t) = \int_{-\infty}^{x} w(\xi, t) d\xi$$

уравнения (5) на том же временном отрезке $[0, t_*]$. Причем

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{t=0} = \varphi(x) \text{ и } v|_{t=0} = \varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi) d\xi,$$

и из оценки сверху нормы решения уравнения (5) $\|v\|_C \le M(t)$ следует оценка сверху нормы в $C[R^1]$ решения уравнения (4) $\|w\|_C \le N(t)$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (5) с начальной функцией $\varphi_1(x)$:

$$v|_{t=0} = \varphi_1(x). \qquad (6)$$

Умножим обе части уравнения (5) на функцию $v = v(x,t)$, где $(x,t) \in R^1 \times [0, t_*]$, и проинтегрируем полученное соотношение по переменной x от $-\infty$ до $+\infty$. Другими словами, рассмотрим скалярное произведение классического решения $v = v(x,t)$ задачи Коши (5), (6) на левую часть уравнения (1):

$$\left(v, \frac{\partial v}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial t} - \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{\sigma+1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma+1} \right) = 0$$

или

$$\left(v,\frac{\partial v}{\partial t}\right)-\alpha\left(v,\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial t}\right)-\beta\left(v,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)-\frac{\gamma}{\sigma+1}\left(v,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma+1}\right)=0. \qquad (7)$$

Преобразуем каждое слагаемое в левой части равенства (7) отдельно:

$$1)\ \left(v,\frac{\partial v}{\partial t}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}dx=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}v^2(x,t)dx=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\int_{-\infty}^{+\infty} v^2(x,t)dx$$
$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|v\|_2^2.$$

Интегрируя по частям и используя предельные равенства $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x\partial t}=0$, преобразуем второе слагаемое равенства (7):

$$2)\ \left(v,\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial t}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)\frac{\partial^3 v(x,t)}{\partial x^2\partial t}dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)d\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x\partial t}=v(x,t)\cdot\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x\partial t}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x\partial t}dx=-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2dx=-\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\|v_x\|_2^2.$$

Третье слагаемое также интегрируем по частям (два раза) и, используя сначала предельные равенства $\lim_{x\to\pm\infty}v(x,t)=0$, а затем – $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}=0$, получаем

$$3)\ \left(v,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}dx=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)d\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}-$$
$$=v(x,t)\cdot\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^2dx=-\left(\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2.$$

Четвертое слагаемое преобразуем, интегрируя по частям и применяя те же предельные равенства, что и при преобразовании третьего слагаемого.

$$4)\ \left(v,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma+1}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty} v\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^{\sigma+1}dx=$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)d\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^{\sigma+1}=v(x,t)\cdot\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^{\sigma+1}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}-$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^{\sigma+1}dv(x,t)=-\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right)^{\sigma+2}dx.$$

Подставляя найденные значения интегралов в равенство (7) и заменяя переменную t на τ, получим

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d\tau}}\left(\|v\|_2^2+\alpha\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2\right)+\beta\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2+\frac{\gamma}{\sigma+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma+2}dx=0. \qquad (8)$$

Откуда, интегрируя обе части равенства (8) по переменной τ от 0 до t и используя предельные равенства

$$\lim_{t\to 0}\|v(x,t)\|_2 = \|v(x,0)\|_2 = \|\varphi_1\|_2$$

и

$$\lim_{t\to 0}\left\|\frac{\partial v(x,t)}{\partial x}\right\|_2 = \left\|\frac{\partial v(x,0)}{\partial x}\right\|_2 = \|\varphi\|_2,$$

выводим

$$\|v\|_2^2 + \alpha\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2 + 2\beta\int_0^t \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2 d\tau + \frac{2\gamma}{\sigma+1}\int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^{\sigma+2} dx = V_0, \qquad (9)$$

где

$$V_0 = \|\varphi_1\|_2^2 + \alpha\|\varphi\|_2^2 > 0.$$

Пусть параметры уравнения Аллера удовлетворяют условиям

$$\alpha, \gamma, \sigma > 0, \beta < 0 \text{ и } \sigma = 2\omega \qquad (10)$$

Тогда из равенства (5) следует неравенство

$$\|v\|_2^2 + \alpha\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2 \le V_0 - 2\beta\int_0^t \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2 d\tau. \qquad (11)$$

Увеличивая правую часть неравенства (11), имеем

$$\|v\|_2^2 + \alpha\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2 \le V_0 - \frac{2\beta}{\alpha}\int_0^t \left[\|v\|_2^2 + \alpha\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2\right] d\tau. \qquad (12)$$

Применяя к неравенству (12) лемму Гронуолла [11, с. 108] выводим

$$\|v\|_2^2 + \alpha\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2 \le V_0 e^{-2\beta t/\alpha}, t \ge 0. \qquad (13)$$

Из неравенства (13) следует, что если начальная функция $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^1(R^1)$ и выполнены условия (10), то классическое решение $v = v(x,t)$ задачи Коши (5), (6) для уравнения Аллера также будет принадлежать $W_2^1(R^1)$, причем

$$\sup_{x\in R^1}|v(x,t)| \le \sqrt{\|v\|_2^2 + \left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2} \le \sqrt{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left(\|v\|_2^2 + \alpha\left\|\frac{\partial v}{\partial x}\right\|_2^2\right)} \le$$

$$\le \sqrt{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)V_0 e^{-\beta t/\alpha}} \qquad (14)$$

для всех $t \in \overline{R}_+^1$.

Оценка (14) обеспечивает существование глобального решения задачи Коши (5), (6), поскольку, принимая $v(x,t_*)$ за новую начальную функцию, классическое решение $v(x,t)$ с отрезка $[0,t_*]$ продолжается до классического решения $v(x,t)$, $t \in [0, t_* + \delta]$, где величина δ зависит от нормы начальной функции $\varphi_1 = \varphi_1(x)$ и параметров $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$. Повторяя этот процесс достаточно большое число раз, получим классическое решение задачи Коши (5), (6) на произвольном временном интервале.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть начальная функция $\varphi(x) \ne 0$ удовлетворяет условиям*

$$\varphi(x) \in C[R^1]\colon \varphi'(x), \varphi''(x) \in C[R^1]; \quad \int_{-\infty}^{x}\varphi(\xi)d\xi \in W_2^1(R^1),$$

а параметры $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ уравнения Аллера (4)

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \alpha\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} = \beta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{\sigma+1}\frac{\partial^2 w^{\sigma+1}}{\partial x^2}$$

подчинены следующим требованиям:

$$\alpha, \gamma, \sigma > 0, \beta < 0 \quad \text{и} \quad \sigma = 2\omega.$$

Тогда в пространстве $C[R^1]$ *существует единственное глобальное классическое решение* $w = w(x,t)$, $(x,t) \in R^1 \times \overline{R}^1_+$ *задачи Коши для уравнения Аллера.*

Литература

1. *Чудновский А.Ф.* Теплофизика почв. – М.: Наука, 1976. – 352 с.
2. *Демиденко Г.В., Успенский С.В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. – Новосибирск: Научная книга, 1998. – 436 с.
3. *Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: Физматлит, 2007. – 736 с.
4. *Нахушев А.М.* О некоторых способах линеаризации уравнений движения грунтовых вод и почвенной влаги // Межвуз. сб. «Краевые задачи для уравнений смешанного типа и родственные проблемы функционального анализа и прикладной математики». Вып 2. – Нальчик: КБГУ, 1979. – С. 173–183.
5. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. – 301 с.
6. *Солдатов А.П., Шхануков М.Х.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А.А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // ДАН СССР. – 1987. – Т. 297, № 3. – С. 547–552.
7. *Кожанов А.И.* Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнения теплопроводности и Аллера // Диф. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 6. – С. 763–774.
8. *Умаров Х.Г.* Разрешимость задачи Коши для уравнения Аллера в пространстве непрерывных ограниченных функций // Владикавк. мат. журн. – 2013. – Т. 15, вып. 4. – С. 65–75.
9. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы. Общая теория. – М.: ИИЛ, 1962. – 895 с.
10. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J.* Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Philos. Trans. R. Soc. – London. – 1972. – V. 272. – P. 47–78.
11. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 480 с.

Поступила в редакцию 9 сентября 2021 г.

UDC 517.958

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-54–60

On the Global Solvability of Aller Equation

Kh.S. Taramova

Chechen State Pedagogical University; Russia, 364037, Chechen Republic, Grozny, Subry Kishiev st., 33; thedi@yandex.ru

The article investigates the global-time solvability of Cauchy problem for the nonlinear differential equation of Sobolev type that is not resolved with respect to the time derivate of the first order, the so-called Aller equation, which describes (with certain physical assumptions) moisture movement in capillary-porous media. The equation under consideration is a pseudoparabolic Sobolev type equation which is implicit with respect to the time variable T. The issues of the existence and behavior of solutions of Aller equation were studied in the works of many authors, in particular, in the works of A.M. Nahushev, A.I. Kozhanov, Kh.G. Umarov. In this article, the study of the global solvability of Cauchy problem for Aller equation is carried out in Banach space of continuous limited functions on the entire numerical axis, for which there are limits for minus and plus infinity. The uniqueness of the global classical solution of Cauchy problem for the pseudoparabolic Aller equation on an arbitrary time section has been proven. The a priori estimates are also obtained in the work, ensuring the existence of a global solution to Cauchy problem for Aller equation. The existence and uniqueness of the global classical solution of Cauchy problem for Aller equation on an arbitrary time segment in this work is proved using the following algorithm: taking the function $v(x, t_*)$ for a new initial function, the classical solution $v(x, t)$from the segment $[0, t_*]$continues to a classic solution $v(x, t)$, $t \in [0, t_* + \delta]$, where the value δ depends on the norm of the initial function$\varphi_1 = \varphi_1(x)$ and the parameters of Aller equation. Repeating this process quite a large number of times, we obtain a classic solution of Cauchy problem for Aller equation at an arbitrary time interval.

Keywords: *Aller equation, estimates for the solution of an equation, global solvability.*

Received 9 September 2021