УДК 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-38–53

***М.М. Сиражудинов [1, 2], С.П. Джамалудинова [1]***

## Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами с локально-периодическим коэффициентом

*[1] Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; sirazhmagomed@yandex.ru, dzh-saida2012@yandex.ru;*

*[2] Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45*

Локальные характеристики математических моделей сильно неоднородных сред, как правило, описываются функциями вида $a(\varepsilon^{-1}x)$, или $b(x,\varepsilon^{-1}x)$, или $c(\varepsilon^{-1}x,\delta^{-1}x)$, или $d(\varepsilon^{-1}x,\delta^{-1}x,\gamma^{-1}x)$ и т. д., где $\varepsilon,\delta,\gamma>0$ – малые параметры, при этом функции $a,b,c,d$ имеют упорядоченную структуру (они, например, периодические по переменным $y=\varepsilon^{-1}x$, $z=\delta^{-1}x$ и т. д.). Следовательно, соответствующие математические модели – дифференциальные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами.

Настоящая работа посвящена оценкам погрешности усреднения. Изучается скалярное уравнение Бельтрами с локально периодическим коэффициентом $\mu(x,\varepsilon^{-1}x)$.

Ключевые слова: *уравнение Бельтрами, усреднение, G-сходимость.*

Вопросы погрешности усреднения дивергентных эллиптических и параболических операторов второго порядка с локально периодическими коэффициентами рассмотрены в работах [1; 2].

В работах [3], [4] изучены вопросы погрешности усреднения обобщенных уравнений Бельтрами, в частности уравнения Бельтрами с периодическими коэффициентами. В этой работе получены оценки погрешности локально-периодического усреднения.

**Обозначения:** $\mathbb{R}^2$ – плоскость, $Q\subset\mathbb{R}^2$ – ограниченная односвязная область, $\bar{Q}$ – замыкание области $Q$, запись $Q_1\Subset Q$ означает, что замыкание $\overline{Q}_1$– компакт из $Q$. $\partial_{\bar{z}}=2^{-1}(\mathcal{D}_1+i\mathcal{D}_2)$, $\partial_z=2^{-1}(\mathcal{D}_1-i\mathcal{D}_2)$, $\mathcal{D}_j=\frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1,2$, $i$ – мнимая единица, $L_2(Q;\mathbb{C})$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично суммируемых функций, $W_p^k(Q;\mathbb{C})$ $(k\in\mathbb{N},1\le p<\infty)$ – пространство Соболева, $\overset{0}{W}{}_2^1(Q;\mathbb{C})$ – подпространство пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, состоящее из элементов с нулевым следом на границе, $\square$ – квадрат (ячейка периодов) со стороной, параллельной оси координат, длина стороны 1. Периодической будем называть функцию периода 1 по каждой переменной. $\langle u\rangle$ – среднее значение периодической функции $u$, то есть

$$\langle u\rangle=\int_{\square}u(x)dx.$$

Пусть $u(x,y)$ – периодическая по $y$ функция, тогда $\langle u(x,\cdot)\rangle_y$ – среднее значение по $y$. $L_p(\square;\mathbb{C}),W_p^1(\square;\mathbb{C}),p\ge1$ – пространства Лебега и Соболева периодических функций. $W_2^{-1}(\square;\mathbb{C})$ – сопряженное $W_2^1(\square;\mathbb{C})$ пространство. Пространство, сопряженное с пространством $L_2(\square;\mathbb{C})$, отождествляется с $L_2(\square;\mathbb{C})$, что возможно в силу теоремы Рисса. $\rightharpoonup$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

Пусть $\Omega$ – произвольная подобласть плоскости $\mathbb{R}^2$, и пусть $\mathrm{g}(x,y)$ $(x\in\overline{\Omega}, y\in\mathbb{R}^2)$ – непрерывная по $x\in\overline{\Omega}$ периодическая по $y$ функция, такая, что $\mathrm{g}(\mathrm{x},y)$ для любого $x\in\overline{\Omega}$ как функция переменной $y$, принадлежит $L_p(\square;\mathbb{C})$, $p\geq 1$, тогда $\mathrm{g}(x,\varepsilon^{-1}x)\rightharpoonup\langle \mathrm{g}(\mathrm{x},\cdot)\rangle_y$ в пространстве $L_p(\Omega_1;\mathbb{C})$ при $\varepsilon\to 0$, где $\Omega_1$ – произвольная ограниченная подобласть области $\Omega$. $W_0(Q)$ – подпространство пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\operatorname{Re} w|_{\partial Q}=0,\qquad \int_Q \operatorname{Im} w\,dx=0.$$

Уравнение и оператор краевой задачи, если это не вызывает разночтений, обозначаем одним и тем же символом. $y_j=\varepsilon^{-1}x_j$, $j=1;2$ – «быстрые» переменные. $\nabla,\nabla_y$ – градиент, $y$ в индексе означает, что производные берутся по переменным $y_1,y_2$. Запись $c>0$, $c=\mathrm{const}\,(a,b,\dots)$ означает, что $c$ – положительная постоянная, зависящая от величин в скобках.

## 1. Формулировка результатов

### 1.1. *Задача Римана–Гильберта*

В ограниченной односвязной области $Q$ с кусочно-гладкой границей рассмотрим задачу для скалярного уравнения Бельтрами

$$\begin{cases} Au\equiv\partial_{\bar z}w+\mu\partial_z w=f\in L_2(Q)\,,\\ w\in W_0(Q)\,,\end{cases}\tag{1.1}$$

где коэффициент $\mu$ – ограниченная измеримая функция, удовлетворяющая условию.

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{x\in Q}|\mu(x)|\ \leq k_0<1,\tag{1.2}$$

$k_0>0$ – постоянная (*константа эллиптичности*).

Имеет место (см. [5; 6])

ТЕОРЕМА 1. *Задача Римана–Гильберта* (1.1) *однозначно разрешима для любой правой части из* $L_2(Q;\mathbb{C})$, *причем имеют место априорные оценки:*

$$(1-k_0)\|\partial_{\bar z}w\|^2_{L_2(Q;\mathbb{C})}\leq \operatorname{Re}\int_Q Aw\cdot\overline{\partial_{\bar z}w}\,dx\,,\tag{1.3}$$

$$(1-k_0)\|\partial_{\bar z}w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\leq\|Aw\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\leq(1+k_0)\|\partial_{\bar z}w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\,.\tag{1.4}$$

Выражение $\|w\|_{W_0(Q)}=\|\partial_{\bar z}w\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}$, $w\in W_0(Q)$ задает норму (см. [5; 6]) в подпространстве $W_0(Q)$, эквивалентную норме исходного пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, поэтому справедливы следующие оценки:

$$\mathrm{c}_1\|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}\leq\|Aw\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}\leq \mathrm{c}_2\|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})},\tag{1.5}$$

где $\mathrm{c}_1,\mathrm{c}_2>0$ – постоянные, зависящие только от $k_0$ и области $Q$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $w\in W_2^1(\mathrm{Q};\mathbb{C})$ *– решение уравнения* (1.1), *коэффициент* $\mu=\mu(x)$ *которого равномерно непрерывен по Липшицу в* $\overline{Q}$, *т. е.*

$$|\mu(x')-\mu(x)|\leq l|x'-x|\,,\quad x',x\in\overline{Q},$$

*где* $l>0$ *– постоянная. И пусть* $f\in W_2^1(\mathrm{Q};\mathbb{C})$, *тогда* $w\in W^2_{2,\mathrm{loc}}(\mathrm{Q};\mathbb{C})$ *и в любой компактной подобласти* $Q_1\subset Q$ *имеет место оценка*

$$\|w\|_{W_2^2(Q_1;\mathbb{C})}\leq c\big(\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}+\|w\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}\big)\,,\tag{1.6$_1$}$$

*где* $c>0$ *– постоянная, зависящая только от* $k_0$, $l$ *и* $dist\,(Q_1,\partial Q)$ .

*Если дополнительно граница $\partial Q$ принадлежит классу* $C^2$ *и* $w \in W_0(Q) \cap W_2^1(Q;\mathbb{C})$, *то тогда* $w \in W_2^2(Q;\mathbb{C})$ *и имеет место оценка*

$$\|w\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \le c\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \tag{1.6$_2$}$$

*где* $c > 0$ *– постоянная,* $c = c(k_0, l, Q)$.

## 1.2. G-сходимость

Обозначим через $A(k_0;Q)$ множество операторов Бельтрами (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $A(k_0;Q)$ называется *G*-сходящейся в области $Q$ к оператору $A \in A(k_0;Q)$ (обозначение: $A_k \xrightarrow{G} A$), если $A_k^{-1} \rightharpoonup A^{-1}$ при $k \to \infty$.

Это определение ввиду оценок (1.5) и компактности вложения $W_2^1(Q;\mathbb{C}) \subset L_2(Q;\mathbb{C})$ эквивалентно следующему: последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $A(k_0;Q)$ называется *G*-сходящейся в области $Q$ к оператору $A \in (k_0;Q)$, если для любого $f \in L_2(Q)$ последовательность $u_k$ решений задачи Римана–Гильберта $A_k w_k = f$, $w_k \in W_0(Q)$ сходится в $L_2(Q)$ к решению задачи Римана–Гильберта $Aw = f$ и $\in W_0(Q)$ при $k \to \infty$.

Класс $A(k_0;Q)$ $G$-компактен (см. [5]), *G*-предел определен единственным образом.

*G*-сходимость обладает следующим свойством *сходимости «произвольных» решений:* пусть $A_k \xrightarrow{G} A$, $w_k \rightharpoonup w$ в $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, $f_k \to f$ в $L_2(Q)$, $A_k w_k = f_k$, тогда $Aw = f$ (см. [5]).

## 1.3. Понятие усреднения

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта с малым параметром $\varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} A_\varepsilon w_\varepsilon \equiv \partial_{\bar z} w_\varepsilon + \mu^\varepsilon(x)\,\partial_z w_\varepsilon = f \in L_2(Q;\mathbb{C}), \\ w_\varepsilon \in W_0(Q), \end{cases} \tag{1.7}$$

где коэффициент $\mu^\varepsilon(x) = \mu(x, \varepsilon^{-1}x)$, $x = (x_1, x_2)$, $\mu^\varepsilon \in L_\infty(Q \times \square;\mathbb{C})$ – локально-периодическая функция, т. е. функция $\mu(x,y)$ периодическая (периода 1) по $y$, непрерывная по $x$ (периодичность по $x$ не требуется). Кроме того, $\mu(x,y)$ удовлетворяет условию эллиптичности

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{(x,y)\in Q\times\square} |\mu(x,y)| \le k_0 < 1, \tag{1.7$'$}$$

$k_0 > 0$ – постоянная (*константа эллиптичности*) и равномерно непрерывна по Липшицу

$$|\mu(x,y) - \mu(x',y)| \le l|x - x'|, \quad x, x' \in \overline{Q}, \quad \text{п.в. } y \in \square.$$

Заметим, что оператор $A_\varepsilon$ принадлежит классу $A(k_0;Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если $A_\varepsilon \xrightarrow{G} A \in A(k_0;Q)$ при $\varepsilon \to 0$.

В вопросах, связанных с усреднением, важную роль играет ядро оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного оператору следующей периодической по $y = (y_1, y_2)$ задачи:

$$\mathcal{A}u \equiv \partial_{\bar\xi} w + \mu(x,y)\partial_\xi w = f \in L_2(\square;\mathbb{C}), \qquad w(x,\cdot) \in W_2^1(\square;\mathbb{C}), \tag{1.8}$$

где $x$, $x \in \overline{Q}$, выступает в роли параметра,

$$\partial_{\bar\xi} = 2^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} + i\frac{\partial}{\partial y_2}\right), \quad \partial_\xi = 2^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - i\frac{\partial}{\partial y_2}\right).$$

Приведем необходимые нам в дальнейшем результаты по периодической задаче из работы [7].

ТЕОРЕМА 3. *Для каждого* $x \in \overline{Q}$ *справедливы следующие утверждения:*

• *Для периодической задачи* (1.8) *имеют место оценки*

$$(1-k_0)\left\langle \left|\partial_{\bar\xi} w(x,\cdot)\right|^2\right\rangle_y \le \operatorname{Re}\left\langle \mathcal{A}w(x,\cdot)\cdot\overline{\partial_{\bar\xi} w(x,\cdot)}\right\rangle_y,$$

$$w(x,\cdot)\in W_2^1(\square;\mathbb{C}), \tag{1.9}$$

$$(1-k_0)\left\langle \left|\partial_{\bar\xi} w(x,\cdot)\right|^2\right\rangle_y^{1/2} \le \left\langle |\mathcal{A}w(x,\cdot)|^2\right\rangle_y^{1/2} \le (1+k_0)\left\langle \left|\partial_{\bar\xi} w(x,\cdot)\right|^2\right\rangle_y^{1/2}. \tag{1.9'}$$

(Первое из этих неравенств будем называть *неравенством острого угла.)*

• *Периодическая задача* (1.8) *является фредгольмовой.*

• *Сопряженный оператор* $\mathcal{A}^*: L_2(\square;\mathbb{C}) \to W_2^{-1}(\square;\mathbb{C})$ *определяется формулой*

$$-\mathcal{A}^* p \equiv \partial_\xi p(x,\cdot) + \partial_{\bar\xi}\left(\overline{\mu(x,\cdot)}p(x,\cdot)\right), \qquad p(x,\cdot)\in L_2(\square;\mathbb{C}), \tag{1.10}$$

*где производные понимаются в смысле распределений,* $\overline{\mu}$ *– комплексносопряженная* $\mu$ *функция.*

• *Ядра* $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A}\ (=\mathbb{C})$ *есть одномерные подпространства соответствующих пространств, причем один из базисов* $p(x,\cdot)$ *ядра* $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$ *обладает следующим свойством: среднее значение* $p(x,y)$ *по* $y$ *равно единице,* $\langle p(x,\cdot)\rangle_y = 1$.

## 1.4. *Задача на ячейке*

Пусть $Q$ – ограниченная односвязная область с гладкой (класса $C^2$) границей.

Всюду в дальнейшем $\mu^0(x)$ – функция, определённая формулой

$$\mu^0(x) = \langle \overline{p(x,\cdot)}\mu(x,\cdot)\rangle_y, \tag{1.11}$$

где $p$ – базисный вектор ядра $\mathcal{A}^*$ из теоремы 3. (В дальнейшем мы покажем, что $\mu^0(x)$ – коэффициент усредненного уравнения.)

Для применения асимптотических методов при усреднении уравнения Бельтрами нам потребуется периодическое решение следующей задачи на ячейке:

$$\begin{cases} \mathcal{A}N \equiv \partial_{\bar\xi}N(x,y) + \mu(x,y)\partial_\xi N(x,y) = \mu^0(x) - \mu(x,y), \\ N(x,\cdot)\in W_2^1(\square;\mathbb{C}), \quad \langle N(x,\cdot)\rangle_{\mathrm{y}} = 0, \end{cases} \tag{1.12}$$

где «производные» по $\xi$ и $\bar\xi$ определены в (1.8) и $x$ выступает в роли параметра.

ТЕОРЕМА 4 (О задаче на ячейке). Для каждого $x \in \overline{Q}$ *периодическая задача* (1.12) *однозначно разрешима.*

Действительно, для разрешимости (1.12) согласно теореме 3 необходимо и достаточно, чтобы функция $\mu^0(x) - \mu(x,y)$, как функция $y$, была ортогональна базисному элементу $p(x,y)$ ядра $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$, что очевидно.

## *1.5. Свойства решения задачи на ячейке (1.12)*

Приведем ряд свойств решения задачи (1.12) и коэффициента $\mu^0(x)$ усредненного оператора, которые понадобятся нам в дальнейшем. Они будут доказаны в § 3.

СВОЙСТВО 1. *Пусть* $N$ *– решение задачи* (1.12), *тогда отображение* $\overline{Q} \ni x \mapsto N(x,\cdot)\in W_2^1(\square;\mathbb{C})$ *ограничено, причем имеет место оценка*

$$\|N(x,\cdot)\|_{W_2^1(\square;\,\mathbb{C})} \le c, \quad x\in\overline{Q}, \tag{1.13}$$

*где* $c$ *– постоянная, определяемая только по постоянной эллиптичности* $k_0$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Функция* $\mu^0(x)$, *определенная* формулой (1.11), *ограничена постоянной, зависящей только от постоянной эллиптичности* $k_0$.

СВОЙСТВО 2. *Найдется число $q > 2$, зависящее только от постоянной эллиптичности $k_0$, такое, что функция $N$ принадлежит $W_q^1(\square; \mathbb{C})$ и имеют место неравенства*

$$\|N(x,\cdot)\|_{C^\alpha(\square;\mathbb{C})} \le c, \quad \|N(x,\cdot)\|_{W_r^1(\square;\mathbb{C})} \le c \quad \text{для всех } x \in \overline{Q}, \tag{1.14}$$

*где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности $k_0$, $2 < r \le q$, $\alpha = (r-2)/r$.*

СВОЙСТВО 3. *Пусть $N$ – решение задачи* (1.12), *тогда отображение $\overline{Q} \ni x \mapsto N(x,\cdot) \in W_2^1(\square; \mathbb{C})$ липшицево, т. е.*

$$\|N(x+h,\cdot) - N(x,\cdot)\|_{W_2^1(\square;\mathbb{C})} \le c|h|, \qquad x, x+h \in \overline{Q}, \tag{1.15}$$

*где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности $k_0$ и постоянной Липшица $l$ из* (1.7).

СЛЕДСТВИЕ 2. *Функция $\mu^0(x)$, определенная формулой (1.11), – функция, равномерно непрерывная по Липшицу в замыкании $\overline{Q}$, т. е.*

$$|\Delta_h \mu^0(x)| \equiv |\mu^0(x+h) - \mu^0(x)| \le l_1|h|, \quad x+h, x \in \overline{Q},$$

*где $l_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$ и $l$ из* (1.7) *и* (1.11).

СВОЙСТВО 4. *Пусть $q > 2$ – показатель повышенной суммируемости, и пусть $2 < r \le q$. Тогда отображение $Q \ni x \mapsto N(x,\cdot) \in W_r^1(\square; \mathbb{C})$ липшицево, т. е.*

$$\|N(x+h,\cdot) - N(x,\cdot)\|_{W_r^1(\square;\,\mathbb{C})} \le c|h|, \qquad x+h, x \in \overline{Q}, \tag{1.16}$$

*где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности $k_0$ и постоянной Липшица $l$ из* (1.7) *и* (1.11).

СЛЕДСТВИЕ 3. Функция $N = N(x,y)$ непрерывна в $\overline{Q} \times \square$, липшицева по $x$ в $\overline{Q}$ и гельдерова по $y$ с показателем $\alpha = (r-2)/r$, ($2 < r \le q$, $q > 2$ – показатель повышенной суммируемости) в $\square$, т. е. для любых $x, x' \in \overline{Q}$, $y, y' \in \square$ имеем:

$$|N(x',y') - N(x,y)| \le c_0|x'-x| + c_1|y'-y|^\alpha, \tag{1.17}$$

где $c_0,\ c_1 > 0$ – постоянные, зависящие только от $k_0$ и $l$ (из (1.7) и (1.11)). Кроме того, производные $\mathcal{D}_j N(x,y) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x_j}$, $j = 1,2$ принадлежат пространству $L_\infty(Q \times \square;\ \mathbb{C})$ и имеют место оценки

$$\|N\|_{L_\infty(Q\times\square;\,\mathbb{C})} \le c, \qquad \left\|\mathcal{D}_j N\right\|_{L_\infty(Q\times\square;\,\mathbb{C})} = \left\|\frac{\partial N}{\partial x_j}\right\|_{L_\infty(Q\times\square;\,\mathbb{C})} \le c,\ \ j = 1,2, \tag{1.18}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$ и $l$.

### 1.5. *Формулировка теорем об усреднении*

ТЕОРЕМА 5 (Об усреднении). *Для семейства операторов* (1.7), $A_\varepsilon = \partial_{\bar z} + \mu^\varepsilon \partial_z$ *имеет место усреднение, причем коэффициент усредненного оператора $A_0 = \partial_{\bar z} + \mu^0 \partial_z$ определяется равенством* (1.12): $\mu^0(x) = \langle \overline{p(x,\cdot)} \mu(x,\cdot) \rangle_y$, *где $p$ – базисный вектор ядра $\mathcal{A}^*$ из теоремы* 3.

Отметим, что теорема об усреднении есть следствие леммы 1 и основного результата работы теоремы 6 (см. ниже). Действительно, сходимость $w_\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f \to A_0^{-1} f = w_0$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$ при ε → 0 согласно теореме 6 имеет место для любого $f$ из всюду плотного в $L_2(Q; \mathbb{C})$ множества $W_2^1(Q; \mathbb{C})$. Отсюда с учетом оценок (1.5), (1.22) легко следует требуемая сходимость для любого $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$. Таким образом теорема 5 доказана.

### 1.6. *Оценки погрешности усреднения*

Пусть в задаче (1.7) коэффициент $\mu(x,y)$ такой же, как выше в пункте 1.6, правая часть $f \in W_2^1(\mathrm{Q})$ и пусть $w_\varepsilon$ является решением задачи Римана–Гильберта (1.7). Как отмечалось в пункте 1.1, задача Римана–Гильберта (1.7) для уравнения Бельтрами однозначно разрешима. В качестве первого приближения к данному решению возьмем функцию

$$w_1^\varepsilon(x) = w_0(x) + \varepsilon N(x,y)\partial_z w_0(x), \tag{1.19}$$

где $w_0$ – решение усредненной задачи $A_0 w_0 \equiv \partial_{\bar z} w_0 + \mu^0 \partial_z w_0 = f,\ w_0 \in W_0(Q)$, функция $N(x,y)$ – есть периодическое по $y$ решение задачи на ячейке (см. теорему 4), $y = \varepsilon^{-1}x$. При этом справедливо соотношение

$$A_\varepsilon w_1^\varepsilon = f + \varepsilon r_\varepsilon \tag{1.20}$$

где $r_\varepsilon$ – невязка, определенная формулой $r_\varepsilon = \partial_z w_0(x)\big(\partial_{\bar z} N(x,y) + \mu(x,y)\partial_z N(x,y)\big) + N(x,y)\big(\partial_{\bar z z}^2 w_0(x) + \mu(x,y)\partial_{zz}^2 w_0(x)\big),\ y = \varepsilon^{-1}x$.

Имеет место следующая

ЛЕММА 1.

• *Усредненный оператор* $A_0 = \partial_{\bar z} + \mu^\varepsilon \partial_z$ *принадлежит классу* $A(k_0; Q)$.

• *Пусть правая часть $f$ уравнения Бельтрами* (1.7) *принадлежит пространству* $W_2^1(Q;\ \mathbb{C})$ *и область $Q$ имеет гладкую* (*класса* $C^2$) *границу, тогда решение усредненной задачи* $A_0 w_0 = f,\ w_0 \in W_0(Q)$, *принадлежит пространству* $W_0(Q) \cap W_2^2(Q;\mathbb{C})$, *первое приближение* $w_1^\varepsilon$ принадлежит $W_2^1(Q;\mathbb{C})$ *и невязка* $r_\varepsilon$ *принадлежит* $L_2(Q;\mathbb{C})$.

Сформулируем основное утверждение работы.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* в задаче *Римана–Гильберта* (1.7) коэффициент $\mu(x,y)$ такой же, как в пункте 1.6, *правая часть f принадлежит пространству* $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, $w_\varepsilon$ *– решение задачи Римана–Гильберта* (1.7), $Q$ *– ограниченная односвязная область с гладкой* (*класса* $C^2$) *границей, тогда имеют место оценки*

$$\|w_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})} \le c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})}, \quad \|w_\varepsilon - w_0\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \le c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})}, \tag{1.21}$$

*где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянных* $k_0$, $l$ (из $(1.7)$, $(1.11)$) и *области* $Q$.

Доказательство теоремы 6 см. в параграфе 5.

## 2. Доказательство теоремы 2

Пусть в уравнении (1.1) $w = u + iv$, $\mu = a + ib$, $f = f_1 + if_2$. Тогда уравнение (1.1), выделив действительную и мнимую части, легко представить в виде системы двух действительных уравнений

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial v}{\partial x_2} + \dfrac{|1+\mu|^2}{1-|\mu|^2}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{2b}{1-|\mu|^2}\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = F_1 \equiv \dfrac{2}{1-|\mu|^2}\big((1+a)f_1 + bf_2\big), \\ \dfrac{\partial v}{\partial x_1} + \dfrac{2b}{1-|\mu|^2}\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \dfrac{|1-\mu|^2}{1-|\mu|^2}\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = F_2 \equiv \dfrac{2}{1-|\mu|^2}(bf_1 + (1-a)f_2). \end{cases} \tag{2.1}$$

Система (2.1) – равномерно эллиптическая система. Действительно, если запишем её в матричной форме с искомым $\binom{u}{v}$, то условие эллиптичности – положительная определенность квадратичной формы

$$K(\xi_1,\xi_2) = (1-|\mu|^2)^{-1}((|1+\mu|^2)\xi_1^2 + 4b\xi_1\xi_2 + (|1-\mu|^2)\xi_2^2). \tag{2.2}$$

Таким образом, имеют место неравенства

$$\frac{1-k_0}{1+k_0}|\xi|^2 \le K(\xi_1,\xi_2) \le \frac{1+k_0}{1-k_0}|\xi|^2, \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \qquad \text{п. в. } x \in Q,$$

где $k_0 > 0$ – постоянная эллиптичности из (1.2). Это и означает равномерную эллиптичность системы (2.1).

По условию $u = \mathrm{Re}\, w$ принадлежит пространству $W_2^1(Q)$, и из системы (2.1) вытекает, что $u$ удовлетворяет дивергентному эллиптическому уравнению второго порядка:

$$\mathrm{div}\,(a(x)\nabla u) = g, \tag{2.3}$$

где $a(x)$ – матрица квадратичной формы (2.2), $g = \mathcal{D}_1 F_1 + \mathcal{D}_2 F_2$. Коэффициенты матрицы $a(x) = \{a_{jl}(x)\}$ и коэффициенты при $f_1$ и $f_2$ в (2.1) – липшицевы функции. Причем коэффициенты Липшица зависят только от $k_0$ и $l$. Например: коэффициент Липшица функции $a_{11}(x)$ равен $l(2k_0+1)/(1-k_0)^2$. Согласно теореме Радемахера–Степанова липшицевы функции принадлежат пространству $W_\infty^1(Q)$, следовательно ввиду $f_1,\ f_2 \in W_2^1(\mathrm{Q})$ функция $g$ принадлежат пространству $L_2(Q)$. Отсюда согласно [8, гл. 8, теорема 8.8] имеем: для любой компактной подобласти $Q_1 \Subset Q$ функция $u$ принадлежит пространству $W_2^2(\mathrm{Q}_1)$ и справедлива оценка

$$\|u\|_{W_2^2(\mathrm{Q}_1)} \le c\big(\|g\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{W_2^1(Q)}\big), \tag{2.4}$$

где $c > 0$ – постоянная, определяемая только по $l, k_0$ и $\mathrm{dist}\,(\mathrm{Q}_1, \partial Q)$. Отсюда ввиду $g = \mathcal{D}_1 F_1 + \mathcal{D}_2 F_2$ и (2.1) получим

$$\|u\|_{W_2^2(\mathrm{Q}_1)} \le c\big(\|f\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)}\big) \le c_1\big(\|f\|_{W_2^1(\mathrm{Q};\,\mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})}\big), \tag{2.5}$$

где $c,\ c_1 > 0$ – постоянные, аналогичные постоянной в (2.4).

Перейдём теперь к оценке $v = \mathrm{Im}\, w$. По доказанному $u \in W_2^2(\mathrm{Q}_1)$, следовательно, из равенств (2.1), ввиду (2.5) получим оценки вторых производных $v$

$$\big\|\mathcal{D}_j \mathcal{D}_l v\big\|_{W_2^1(\mathrm{Q}_1)} \le c\big(\|f\|_{W_2^1(\mathrm{Q};\,\mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)}\big),$$

где $c > 0$ – постоянная, такая же, как и выше. Отсюда вытекает оценка

$$\|v\|_{W_2^2(\mathrm{Q}_1)} \le c\big(\|f\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})} + \|u\|_{W_2^1(Q)} + \|v\|_{W_2^1(Q)}\big) \le c_1\big(\|f\|_{W_2^1(\mathrm{Q};\,\mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})}\big).$$

Из этой оценки и оценки (2.5) получим $(1.6_1)$. Первая часть теоремы 2 доказана.

Перейдем к доказательству второй части. Теперь $w \in W_0(Q)$, следовательно, $u \in \overset{0}{W}{}_2^1(Q;\mathbb{C})$ и $u$ является решением задачи Дирихле для уравнения (2.3). Тогда, как известно (см. [8, гл. 8, теорема 8.12]), имеет место оценка (2.4) с $Q_1 = Q$. Отсюда, рассуждая, как и выше, получим

$$\|w\|_{W_2^2(Q;\,\mathbb{C})} \le c\big(\|f\|_{W_2^1(\mathrm{Q};\,\mathbb{C})} + \|w\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})}\big).$$

Здесь второе слагаемое справа можно опустить ввиду (1.5). Следовательно, имеет место $(1.6_2)$. Теорема 2 доказана.

## 3. Доказательства свойств решения задачи на ячейке

### *3.1. Доказательство свойства 1*

Очевидно, что $\langle \mu^0(x)\overline{\partial_{\bar\xi} N(x,\cdot)}\rangle_y = 0$, так как $\mu^0$ зависит только от $x$, а производные см. (1.8) и среднее значение берутся по $y$. Поэтому, согласно неравенству острого угла (1.9) и условию эллиптичности (1.7), имеем

$$(1-k_0)\,\langle \big|\partial_{\bar\xi} N(x,\cdot)\big|^2\rangle_y \le \mathrm{Re}\,\langle -\mu(x,\cdot)\overline{\partial_{\bar\xi} N(x,\cdot)}\rangle_y \le k_0\,\langle \big|\partial_{\bar\xi} N(x,\cdot)\big|^2\rangle_y^{\frac12}.$$

Следовательно, $\langle \big|\partial_{\bar\xi} N(x,\cdot)\big|^2\rangle_y^{\frac12} \le k_0/(1-k_0)$. Отсюда и из неравенства Пуанкаре получим (1.14). Свойство доказано.

### *3.2. Доказательство следствия 1*

Согласно (1.13) имеем

$$\partial_{\bar{\xi}} N(x,y) + \mu(x,y)\partial_{\xi} N(x,y) + \mu(x,y) = \mu^0(x), \quad (x,y) \in Q \times \square\,.$$

Отсюда и из очевидного равенства $|\mu^0(x)| = \langle |\mu^0(x)|^2 \rangle_y^{1/2}$ с учетом (1.7) и (1.9′) имеем

$$|\mu^0(x)| \le (1+k_0)\,\langle \left|\partial_{\bar{\xi}} N(x,\cdot)\right|^2 \rangle_y^{\frac{1}{2}} + k_0 \le (1+k_0)c + k_0.$$

Следствие 1 доказано.

### *3.3. Доказательство свойства 2*

Ввиду следствия 1 и (1.7) имеем $\mu^0(x) - \mu(x,y) \in L_\infty(Q \times \square; \mathbb{C})$. Отсюда, согласно [7, теорема 5], следует справедливость утверждений Свойства 2.

### *3.4. Доказательство свойства 3*

Подставим $N$ в уравнение (1.13). Полученное равенство запишем для $x$, $x+h$, принадлежащих $Q$, и отнимем из второго равенства первое. Тогда имеем

$$\partial_{\bar{\xi}} \Delta_h N(x,y) + \mu(x+h,y)\partial_{\xi}\Delta_h N(x,y) = F_h(x,y), \tag{3.1}$$

где

$$F_h(x,y) = -\Delta_h\mu(x,y)\partial_{\xi}N(x,y) + \Delta_h\mu^0(x) - \Delta_h\mu(x,y),$$
$$\Delta_h g(x,y) = g(x+h,y) - g(x,y),\ \ g = N,\mu,\ \ \Delta_h\mu^0(x) = \mu^0(x+h) - \mu^0(x).$$

Применив неравенство острого угла к равенству (3.1), получим

$$(1-k_0)\,\langle \left|\partial_{\bar{\xi}}\Delta_h N(x,\cdot)\right|^2\rangle_y \le \left|\langle \overline{\tilde{F}_h(x,\cdot)}\partial_{\bar{\xi}}\Delta_h N(x,\cdot)\rangle_y\right|, \tag{3.2}$$

где $\tilde{F}_h(x,y)$ есть $F_h(x,y)$ без второго слагаемого $\Delta_h\mu^0(x)$ заметим, что $\Delta_h\mu^0(x)$ не зависит от $y$, поэтому $\langle\overline{\Delta_h\mu^0(x)}\,\partial_{\bar{\xi}}\Delta_h N(x,\cdot)\rangle_y = 0$. Применим к правой части (3.2) неравенство Гельдера, тогда получим

$$\left\|\partial_{\bar{\xi}}\Delta_h N(x,\cdot)\right\|_{L_2(\square;\mathbb{C})} \le \tfrac{1}{1-k_0}\left\|\tilde{F}_h(x,\cdot)\right\|_{L_2(\square;\mathbb{C})}. \tag{3.3}$$

Отсюда ввиду (1.11) и (1.14) и с учетом неравенства Пуанкаре вытекает (1.16). Свойство 3 доказано.

### *3.5. Доказательство следствия 2*

Ввиду независимости $\mu^0(x)$ от $y$ и оценки (1.11) имеем

$$|\Delta_h\mu^0(x)| = \langle|\Delta_h\mu^0(x)|^2\rangle_y^{\frac{1}{2}} \le \langle|\Delta_h\mu^0(x) - \Delta_h\mu(x,\cdot)|^2\rangle_y^{\frac{1}{2}} + \langle|\Delta_h\mu(x,\cdot)|^2\rangle_y^{\frac{1}{2}}$$
$$\le J(x) + l|h|,$$

где $J(x) = \langle|\Delta_h\mu^0(x) - \Delta_h\mu(x,\cdot)|^2\rangle_y^{\frac{1}{2}}$. Поэтому достаточно доказать липшицевость функции $J(x)$. Пусть $N$ – решение задачи на ячейке (1.13). Тогда аналогично (3.1) получим

$$\Delta_h(\mu^0(x) - \mu(x,y))$$
$$= \partial_{\bar{\xi}}\Delta_h N(x,y) + \mu(x+h,y)\partial_{\xi}\Delta_h N(x,y) + \Delta_h\mu(x,y)\partial_{\xi}N(x,y). \tag{3.3}$$

Оценим слагаемые справа (3.3). Пусть $J_1(x) = \partial_{\bar{\xi}}\Delta_h N(x,y) + \mu(x+h,y)\partial_{\xi}\Delta_h N(x,y)$, тогда согласно свойству 3 и (1.9′) имеем

$$\|J_1(x)\|_{L_2(\square;\mathbb{C})} \le (1+k_0)\left\|\partial_{\bar{\xi}}\Delta_h N(x,\cdot)\right\|_{L_2(\square;\mathbb{C})} \le c\|\Delta_h N(x,\cdot)\|_{W_2^1(\square;\mathbb{C})} \le c|h|,$$

где $c > 0$ – постоянная, определяемая только по $k_0$ и $l$. Оценим последнее слагаемое $J_2(x) = \Delta_h\mu(x,y)\partial_\xi N(x,y)$. Согласно (1.11) и свойству 1 получим $\|J_2(x)\|_{L_2(\square;\mathbb{C})} \leq c_1|h|$. Из полученных для $J_1(x)$ и $J_2(x)$ оценок вытекает аналогичная оценка для $J(x)$. Следствие 2 доказано.

### 3.6. Доказательство свойства 4

Для оператора $\mathcal{A} \equiv \partial_{\bar{\xi}} + \mu(x,y)\partial_\xi : W_r^1(\square;\mathbb{C}) \to \mathrm{L_r}(\square;\mathbb{C})$ (напомним, что $x \in \overline{Q}$ выступает в роли параметра) справедлива априорная оценка (см. [7, п. 3])

$$c\left(\|\mathcal{D}_1 w\|_{\mathrm{L_r}(\square;\,\mathbb{C})} + \|\mathcal{D}_2 w\|_{\mathrm{L_r}(\square;\,\mathbb{C})}\right) \leq \|\mathcal{A}w\|_{\mathrm{L_r}(\square;\,\mathbb{C})}, \quad w \in W_r^1(\square;\mathbb{C}), \tag{3.4}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$. Теперь, рассуждая аналогично свойству 3, применив неравенство (3.4) вместо неравенства острого угла, получим (1.17). Свойство доказано.

### 3.7. Доказательство следствия 3

Из ограниченности вложения $W_r^1(\square;\mathbb{C}) \subset C^\alpha(\square;\mathbb{C})$ ввиду свойства 2 см. (1.15) получим

$$|N(x,y') - N(x,y)| \leq c_0|y' - y|, \quad x \in \overline{Q},\ \ y',y \in \square\,,$$

где $c_0 > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$. Аналогично из свойства 4 см. (1.17) имеем

$$|N(x',y') - N(x,y')| \leq c_1|x' - x|, \qquad x',x \in \overline{Q}, \qquad y' \in \square\,,$$

где $c_1 > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности $k_0$ и постоянной Липшица l из (1.7) и (1.11). Из полученных двух неравенств вытекает (1.18) и непрерывность функции $N(x,y)$.

Докажем вторую часть следствия. Первая из оценок (1.19) следует из (1.15). Согласно свойству 4 или следствию 2 $N = N(x,y)$ – решение периодической задачи (1.13) – липшицевое по $x$. Поэтому ввиду теоремы Радемахера–Степанова определены производные $\mathcal{D}_j N(x,y) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x_j}$, $j = 1,2$, и они принадлежат пространству $L_\infty(Q;\mathbb{C})$ для любого $y \in \square$. Кроме того, имеет место оценка

$$\left\|\mathcal{D}_j N(\cdot,y)\right\|_{L_\infty(Q;\mathbb{C})} = \left\|\frac{\partial N(\cdot,y)}{\partial x_j}\right\|_{L_\infty(Q;\mathbb{C})} \leq c \quad \text{для любого } y \in \square, \quad j = 1,2, \tag{3.5}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$ и $l$. Подставим в (1.13) $N$ и продифференцируем полученное равенство по $x_j$. Тогда получим, что $M_j = \mathcal{D}_j N(x,y)$ – решение уравнения

$$\mathcal{A}M_j \equiv \partial_{\bar{\xi}} M_j(x,y) + \mu(x,y)\partial_\xi M_j(x,y) = \mathcal{D}_j\mu^0(x) - \mathcal{D}_j\mu(x,y) - \mathcal{D}_j\mu(x,y)\partial_\xi N(x,y).$$

Применим здесь неравенство (3.4) и оценим правую часть, используя следствие 2, формулу (1.11), теорему Радемахера–Степанова и свойство 2. Тогда с учетом неравенства Пуанкаре (см. [5, гл. 7, формула 7.45]) получим $\left\|M_j(x,\cdot)\right\|_{W_{\mathrm{r}}^1(\square;\,\mathbb{C})} \leq c$, для всех $x \in \overline{Q}$, где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$ и $l$. Применив теорему вложения $W_{\mathrm{r}}^1(\square;\ \mathbb{C}) \subset C(\square;\ \mathbb{C})$, получим $\left\|M_j(x,\cdot)\right\|_{C(\square;\,\mathbb{C})} \leq c$ для всех $x \in \overline{Q}$. Отсюда и (3.5) следует (1.19). Следствие доказано.

## 4. Доказательство леммы 1

### *4.1. Вспомогательные оценки*

Пусть Q – ограниченная гладкая (класса $C^2$) область плоскости, тогда справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Пусть* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x,y) \in \mathrm{Lip}\left(\overline{Q}, L_r(\square;\mathbb{C})\right)$, $1 < r < 2$ (*т. е.* $\mathfrak{a}$ *периодична по* y *и равномерно непрерывна по Липшицу как функция* $x \in \overline{Q}$ *со значениями в* $L_r(\square;\mathbb{C})$), $\mathfrak{a}(x,y) \geq 0$, $(x \in \overline{Q},\ y \in \square)$ *и* $\mathfrak{a}^\varepsilon(x) = \mathfrak{a}(x, \varepsilon^{-1}x))$, $x \in \overline{Q}$. *Тогда для любого* $w \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$ *имеют место неравенства*

$$\int_Q \mathfrak{a}^\varepsilon(x)|w|^2 dx \leq c\left(\|w\|^2_{L_2(\mathrm{Q};\mathbb{C})} + \varepsilon^2\|w\|^2_{W_2^1(\mathrm{Q};\mathbb{C})}\right), \tag{4.1}$$

$$\int_{Q\cap Q_\varepsilon} \mathfrak{a}^\varepsilon(x)|w|^2 dx \leq c\varepsilon\|w\|^2_{W_2^1(\mathrm{Q};\mathbb{C})} \tag{4.2}$$

*для всех достаточно малых* $\varepsilon$, $\varepsilon \leq \varepsilon_0(Q)$, *где* $Q_\varepsilon$ – $\varepsilon$*-окрестность границы* $\partial Q$, *постоянная* c *зависит только от области* Q *и* $\max_{x\in\overline{Q}} \|\mathfrak{a}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем в рассмотрение вспомогательную область $Q_0 \supset \overline{Q}$. $Q_0$ – гладкая (класса $C^2$) ограниченная область, построенная следующим образом. Ввиду гладкости границы $\partial Q$ найдётся достаточно малое положительное число $\delta$, такое, что конец внешней нормали $n(x)$ к границе $\partial Q$ с длиной $|n(x)| = \delta$ при полном обходе границы опишет гладкую кривую $L$ без самопересечений. Объединение $\overline{Q}$ и области между $\partial Q$ и $L$ дает нам $Q_0$.

Продолжим в замыкание $\overline{Q}_0$ функцию $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x,y)$ по формуле

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{a}}(x,y) = \begin{cases} \mathfrak{a}(x,y) & \text{при } x \in \overline{Q},\ \ y \in \square \\ \mathfrak{a}(t,y) & \text{при } x \in \overline{Q}_0 \setminus Q,\ \ y \in \square, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $t \in \partial Q$ – начало внешней нормали, проходящей через точку $x \in \overline{Q}_0 \setminus Q$. $\tilde{\mathfrak{a}} = \tilde{\mathfrak{a}}(x,y) \in \mathrm{Lip}\left(\overline{Q}_0,\ L_r(\square;\mathbb{C})\right)$, $1 < r < 2$ с той же постоянной Липшица, что и у функции $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}(x,y)$.

Рассмотрим периодическую задачу

$$\begin{gathered} \Delta_{\mathrm{y}}\mathfrak{b}(\mathrm{x},\mathrm{y}) \equiv \mathrm{div}_{\mathrm{y}}\nabla_{\mathrm{y}}\mathfrak{b}(x,y) = \tilde{\mathfrak{a}}(x,y) - \langle\tilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\rangle_y \in L_r(\square;\mathbb{C}), \\ \mathfrak{b} \in W_r^2(\square;\mathbb{C}), \quad \langle\mathfrak{b}(x,\cdot)\rangle_y = 0, \end{gathered} \tag{4.4}$$

где $x \in \overline{Q}_0$ играет роль параметра, $\Delta_{\mathrm{y}} = \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathrm{y}_2^2}$ – оператор Лапласа. Эта задача однозначно разрешима согласно теории эллиптических операторов, так как среднее значение (по $y$) правой части равно нулю. Следовательно, для любого $x \in \overline{Q}_0$ вектор-функция $\mathfrak{B}(x,y) = \nabla_{\mathrm{y}}\mathfrak{b}(x,y)$ принадлежит $W_r^1(\square;\mathbb{C})$, к тому же

$$\|\mathfrak{B}(x,\cdot)\|_{W_r^1(\square;\mathbb{C})} \leq 2\max_{x\in\overline{\mathrm{Q}}_0} \|\tilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\,\mathbb{C})}\ , \tag{4.4$'$}$$

значит, по теореме вложения $\mathfrak{B}(x,y)$ принадлежит $L_m(\square;\mathbb{C})$, $m = \frac{2r}{2-r}$. Ввиду того, что $1 < r < 2$, имеем $m > 2$. Отсюда и (4.4) получим разложение

$$\tilde{\mathfrak{a}}(x,y) = \langle\tilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\rangle_y + \mathrm{div}_{\mathrm{y}}\,\mathfrak{B}(x,y)\ , \qquad x \in \overline{\mathrm{Q}}_0, \tag{4.5}$$

где $\mathfrak{B}(x,y)$, как функция $y$, принадлежит пространству $L_m(\square;\mathbb{C})$ для каждого $x \in \overline{\mathrm{Q}}_0$. Отметим, что как $\mathfrak{b}(x,y)$, так и $\mathfrak{B}(x,y)$ периодические по $y$, равномерно непрерывные по Липшицу по переменной $x \in \overline{Q}_0$ функции со значениями в $W_r^2(\square;\mathbb{C})$ и $L_m(\square;\mathbb{C})$ соответственно, т. е. $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}(x,y) \in \mathrm{Lip}\left(\overline{Q}_0, W_r^2(\square;\mathbb{C})\right)$, $\mathfrak{B}(x,y) \in \mathrm{Lip}\left(\overline{Q}_0, L_m(\square;\mathbb{C})\right)$. Доказывается это аналогично Свойству 3 решения задачи на ячейке.

Сначала докажем неравенство (4.1) для функций из $\overset{0}{W}{}_2^1(\mathrm{Q}_0;\mathbb{C})$. Справедливость (4.1) достаточно проверить для функций из единичного шара

$$B = \left\{ w \in \overset{0}{W}{}_2^1(\mathrm{Q}_0;\mathbb{C}) \;\middle|\; \|w\|_{W_2^1(\mathrm{Q}_0;\mathbb{C})} \le 1 \right\}. \tag{4.6}$$

Из (4.5) следует

$$\mathfrak{a}^\varepsilon(x) = \mathfrak{a}(x,\varepsilon^{-1}x) = \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y + \varepsilon\,\mathrm{div}_2\,\mathfrak{B}(x,\varepsilon^{-1}x) = \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y + \varepsilon\,\mathrm{div}_2\mathfrak{B}^\varepsilon(x), \qquad x \in \overline{Q}_0.$$

Здесь $\mathfrak{B}(x,y)$ – функция двух групп переменных ($x_1, x_2$ и $y_1, y_2$), поэтому $\mathrm{div}_2\mathfrak{B}(x,\varepsilon^{-1}x)$ у нас означает дивергенцию по иксам из второй группы переменных. Согласно этим равенствам (интегрируя по частям) имеем

$$\int_{\mathrm{Q}_0} \mathfrak{a}^\varepsilon(x)|w(x)|^2 dx = \int_{\mathrm{Q}_0} \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y |w(x)|^2 dx + \varepsilon \int_{\mathrm{Q}_0} \sum_{j=1}^{2} \left(w_j(x)\right)^2 \mathrm{div}_2\,\mathfrak{B}^\varepsilon(x)\,dx =$$

$$= \int_{\mathrm{Q}_0} \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y |w(x)|^2 dx - 2\varepsilon \sum_{j=1}^{2} \int_{\mathrm{Q}_0} w_j(x)\mathfrak{B}^\varepsilon(x)\cdot\nabla w_j(x)dx \le \int_{\mathrm{Q}_0} \langle \mathfrak{a}(x,\cdot)\rangle_y |w(x)|^2 dx +$$

$$+ \int_{\mathrm{Q}_0} |\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2|w(x)|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{\mathrm{Q}_0} (|\nabla w_1(x)|^2 + |\nabla w_2(x)|^2)dx, \tag{4.7}$$

где $w_1 = \mathrm{Re}\, w$, $w_2 = \mathrm{Im}\, w$.

Очевидно, что $|\mathfrak{B}(x,y)|^2 \in \mathrm{Lip}\left(\overline{Q}_0, L_{m/2}(\square;\mathbb{C})\right)$, поэтому по свойству среднего значения имеем слабую сходимость $|\mathfrak{B}(x,\varepsilon^{-1}x)|^2 \rightharpoonup \langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^2\rangle_y$ в $L_{m/2}(\mathrm{Q}_0;\mathbb{C})$ при $\varepsilon \to 0$, следовательно

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathrm{Q}_0} |\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2|w(x)|^2 dx = \int_{\mathrm{Q}_0} \langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^2\rangle_y |w(x)|^2 dx, \quad w \in B. \tag{4.8}$$

Как известно вложение $W_2^1(\mathrm{Q}_0;\mathbb{C}) \subset L_q(\mathrm{Q}_0;\mathbb{C})$ компактно для любого $q \ge 1$. Отсюда ввиду (4.6) и произвольности $q$ вытекает, что множество $\tilde{B} = \{\varphi = w^2 \mid w \in B\}$ компактно в $L_{m'}(\mathrm{Q}_0;\mathbb{C})$, где $m' = m/(m-2)$ – сопряженный показатель для $m/2$. Сходимость (4.8) на компакте равномерна. Равномерность сходимости легко получить привлечением конечных сетей для компакта $\tilde{B}$. Тогда из $(4.4')$ и (4.8) получим оценку

$$\int_{\mathrm{Q}_0} |\mathfrak{B}^\varepsilon(x)|^2|w(x)|^2 dx \le \left( \max_{x\in\overline{Q}_0} \langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^2\rangle_y + 1 \right) \int_{\mathrm{Q}_0} |w(x)|^2 dx, \quad w \in B \tag{4.9}$$

для достаточно малых $\varepsilon$, $\varepsilon \le \varepsilon_0(\mathrm{Q})$. Ввиду ограниченности вложений $L_m(\square;\mathbb{C}) \subset L_2(\square;\mathbb{C})$ и $W_r^1(\square;\mathbb{C}) \subset L_m(\square;\mathbb{C})$ с учетом $(4.4')$, имеем

$$\langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^2\rangle_y^{1/2} \le \langle|\mathfrak{B}(x,\cdot)|^m\rangle_y^{\frac{1}{m}} \le c\,\|\mathfrak{B}(x,\cdot)\|_{W_r^1(\square;\mathbb{C})} \le c \max_{x\in\overline{\mathrm{Q}}_0} \|\tilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}, \quad x \in \overline{\mathrm{Q}}_0,$$

где $c > 0$ – постоянная.

Отсюда и из формул (4.9), (4.7) получим

$$\int_{Q_0} \mathfrak{a}^\varepsilon(x)|w(x)|^2 dx$$
$$\le C\left(\int_{Q_0} |w(x)|^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_0} \sum_{j=1}^{2} \left(\left|w_j(x)\right|^2 + \left|\nabla w_j(x)\right|^2\right) dx\right), \qquad (4.10)$$

где $C > 0$ – постоянная, $C = (c+1)\max_{x\in\overline{Q}_0} \|\tilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})} + 1$. Следовательно, неравенство (4.1) для функций из $\overset{0}{W}{}_2^1(Q_0;\mathbb{C})$ доказано.

Как известно (см. [5, гл. 7, теорема 7.25]), существует оператор продолжения $J: W_2^1(Q;\mathbb{C}) \to \overset{0}{W}{}_2^1(Q_0;\mathbb{C})$, такой, что $\|Jw\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(Q_0;\mathbb{C})} \le c\|w\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})}$, $\|Jw\|_{L_2(Q_0;\,\mathbb{C})} \le c\|w\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})}$, где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $Q$ и $Q_0$. Этих неравенств для продолжения достаточно для получения (4.1) из (4.10) для любого $w \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$. При этом надо учесть, что из построения (4.3) продолжения $\tilde{\mathfrak{a}}$ следует $\max_{x\in\overline{Q}_0} \|\tilde{\mathfrak{a}}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})} = \max_{x\in\overline{Q}} \|\mathfrak{a}(x,\cdot)\|_{L_r(\square;\mathbb{C})}$.

Теперь перейдем к доказательству неравенства (4.2). Введем в рассмотрение семейство (по $\varepsilon$) $\{\theta^\varepsilon(x)\}$ вещественных гладких срезающих функций, удовлетворяющих условиям

$$1^\circ.\ 0 \le \theta^\varepsilon \le 1, \quad 2^\circ.\ \theta^\varepsilon|_{Q_{\frac{\varepsilon}{2}}} = 1, \quad 3^\circ.\ \theta^\varepsilon = 0 \text{ вне } Q_\varepsilon, \qquad 4^\circ.\ \varepsilon|\nabla\theta^\varepsilon| \le M, \qquad (4.11)$$

где $M > 0$ – постоянная, $Q_h$, $h = \frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon - h$ – окрестность границы $\partial Q$. Используя свойства срезающих функций $\{\theta^{2\varepsilon}(x)\}$ и оценку (4.1), получим

$$\int_{Q_\varepsilon\cap Q} \mathfrak{a}^\varepsilon |w|^2 dx \le \int_{Q_{2\varepsilon}\cap Q} \mathfrak{a}^\varepsilon (\theta^{2\varepsilon}|w|)^2 dx \le c\Big(\int_{Q_{2\varepsilon}\cap Q} (\theta^{2\varepsilon}|w|)^2 dx + \varepsilon^2 \int_{Q_{2\varepsilon}\cap Q} (\theta^{2\varepsilon}|w|)^2 dx + \int_{Q_{2\varepsilon}\cap Q} (\varepsilon|\nabla(\theta^{2\varepsilon} w_1)|)^2 dx + \int_{Q_{2\varepsilon}\cap Q} (\varepsilon|\nabla(\theta^{2\varepsilon} w_2)|)^2 dx\Big).$$

Отсюда, так как $(\varepsilon|\nabla(\theta^{2\varepsilon} v)|)^2 = \left((\varepsilon|\nabla\theta^{2\varepsilon}|)|v| + \varepsilon\theta^{2\varepsilon}|\nabla v|\right)^2 \le 2\left(\left((\varepsilon|\nabla\theta^{2\varepsilon}|)v\right)^2 + (\varepsilon\theta^{2\varepsilon}|\nabla v|)^2\right)$, получим

$$\int_{Q_\varepsilon\cap Q} \mathfrak{a}^\varepsilon |w|^2 dx \le c(1+\varepsilon^2+2M^2)\int_{Q_{2\varepsilon}\cap Q} |w|^2 dx + \varepsilon^2 \int_Q (|\nabla w_1|^2 + |\nabla w_2|^2) dx \le$$
$$\le 2c(1+M^2)\int_{Q_{2\varepsilon}\cap Q} |w|^2 dx + \varepsilon c \int_Q (|\nabla w_1|^2 + |\nabla w_2|^2) dx\,.$$

Применим к первому интегралу справа известное неравенство для следа (см. [9; гл. 1, § 1, п. 2])

$$\int_{Q_{2\varepsilon}\cap Q} |w|^2 dx \le c\mathcal{E}\left||w|\right|^2_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})}, \qquad w \in W_2^1(Q;\,\mathbb{C}), \qquad (4.12)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от $u$ и $\varepsilon$. В результате получим неравенство (4.12). Лемма 2 доказана.

ЛЕММА 3. *Пусть* $w_0$ *– произвольная функция из пространства* $W_2^2(Q;\mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, *и пусть* $f = A_0 w_0 \equiv \partial_{\overline{z}} w_0 + \mu^0(x)\partial_z w_0$. *Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\left.\begin{array}{l} \|A_\varepsilon w_1^\varepsilon - A_0 w_0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le c\varepsilon\|w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \\ \|A_\varepsilon w_1^\varepsilon - A_\varepsilon w_\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le c\varepsilon\|w^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \end{array}\right. \qquad (4.12)$$

$$\|w_1^\varepsilon - w_0\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \le c\varepsilon\|w_0\|_{W_2^2(Q;\,\mathbb{C})}, \quad w_1^\varepsilon \rightharpoonup w_0 \text{ *в* } W_2^1(Q;\mathbb{C}) \text{ *при* } \varepsilon \to 0, \qquad (4.13)$$

*где* $c = c(k_0) > 0$ *– константа, зависящая только от постоянной эллиптичности* $k_0$*;* $w_\varepsilon$ *– решение задачи Римана–Гильберта для уравнения Бельтрами* $A_\varepsilon w_\varepsilon = f$*,* $w_\varepsilon \in W_0(Q)$, $w_1^\varepsilon(x) = w_0(x) + \varepsilon N(x,y)\partial_z w_0(x)$ – первое приближение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (1.21) имеем

$$A_\varepsilon(w_1^\varepsilon - w_\varepsilon) = \varepsilon r_\varepsilon, \tag{4.14}$$

где $r_\varepsilon = \partial_z w_0(x)\big(\partial_{\bar z}N(x,y) + \mu(x,y)\partial_z N(x,y)\big) + N(x,y)\big(\partial^2_{\bar z z}w_0(x) + \mu(x,y)\partial^2_{zz}w_0(x)\big)$, $y = \varepsilon^{-1}x$. Согласно следствию 3 $N(x,y)$ и $\partial_{\bar z}N(x,y)$ ограничены постоянной, зависящей только от постоянной эллиптичности $k_0$, и постоянной Липшица $l$, поэтому $r_\varepsilon \in L_2(Q;\mathbb{C})$. Отсюда и из (1.21), (4.14) с учетом $A_\varepsilon w_\varepsilon = f = A_0 w_0$ получим оба неравенства (4.12).

Докажем соотношения (4.13). Первое из них следует из (1.20) ввиду ограниченности $N$:

$$\|w_1^\varepsilon - w_0\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \le \varepsilon \cdot c\|\partial_z w_0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le \varepsilon \cdot c\|\partial_z w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{4.15}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$ и $l$. Теперь рассмотрим

$$\nabla w_1^\varepsilon(x) - \nabla w_0(x) = \nabla_y N(x,y)\partial_z w_0(x) + \varepsilon\nabla_x N(x,y)\partial_z w_0(x) + \varepsilon N(y)\nabla\partial_z w_0(x).$$

Здесь последние слагаемые справа оцениваются, как выше, с применением Следствия 3. Для оценки $\nabla_y N(x,y)\partial_z w_0(x)$ применим формулу (4.1) из Леммы 1, где $\mathfrak{a}(x,y) = \left|\nabla_y N(x,y)\right|^2 \in \mathrm{Lip}\left(\overline{Q}, L_{q/2}(\square;\mathbb{C})\right)$, $q > 2$ – показатель повышенной суммируемости, $w = \partial_z w_0$. В результате получим

$$\|\nabla w_1^\varepsilon - \nabla w_0\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \le c\|w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}. \tag{4.16}$$

Отсюда и из (4.15) имеем

$$\|w_1^\varepsilon - w_0\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})} \le c\|w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{4.17}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$ и $l$.

Рассмотрим теперь семейство (по $\varepsilon$) $\Phi_\varepsilon = \{w_1^\varepsilon - w_0\} \subset W_2^1(Q;\,\mathbb{C})$. Из формулы (4.17) следует слабая компактность этого семейства. Пусть $\widetilde{w} \in W_2^1(Q;\,\mathbb{C})$ – произвольная слабая предельная точка семейства $\Phi_\varepsilon$: $w_1^{\varepsilon_k} - w_0 \rightharpoonup \widetilde{w}$ при $\varepsilon_k \to 0$ в $W_2^1(Q;\,\mathbb{C})$. Отсюда ввиду компактности вложения $W_2^1(Q;\,\mathbb{C}) \subset W_2^1(Q;\,\mathbb{C})$ получим $w_1^{\varepsilon_k} - w_0 \to \widetilde{w}$ при $\varepsilon_k \to 0$ в $L_2(Q;\,\mathbb{C})$. С другой стороны, (4.14) влечет сходимость $w_1^{\varepsilon_k} - w_0 \to 0$ при $\varepsilon_k \to 0$ в $L_2(Q;\,\mathbb{C})$. Следовательно, $\widetilde{w} = 0$. Ввиду произвольности $\widetilde{w}$ отсюда получим второе соотношение (4.13). Лемма доказана.

### 4.2. *Доказательство леммы 1*

Покажем, что оператор $A_0 = \partial_{\bar z} + \mu^0\partial_z$ принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0;Q)$. Пусть $\hat{A}$ является произвольной G-предельной точкой семейства $\{A_\varepsilon\}$ (напомним, что класс $\mathcal{A}(k_0;Q)$ является компактным и семейство $\{A_\varepsilon\}$ – подмножество $\mathcal{A}(k_0;Q)$), т. е.

$$A_{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} \hat{A} \text{ в области } Q \text{ при } \varepsilon_k \to 0, \tag{4.18}$$

где $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon\}$. Пусть $w^0 \in C^2(\bar{Q};\mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, $f = A_0 w_0$. Тогда отсюда, из (4.14), леммы 2 и $A_\varepsilon w_\varepsilon = f = A_0 w_0$ имеем

$$A_{\varepsilon_k} w_1^{\varepsilon_k} = f + \alpha_{\varepsilon_k}, \tag{4.19}$$

$\alpha_{\varepsilon_k} = o(\varepsilon_k)$ в $L_2(Q)$ при $\varepsilon_k \to 0$. Ввиду (4.13) мы получим

$$w_1^{\varepsilon_k} \rightharpoonup w_0 \quad \text{в} \quad W_2^1(Q) \text{ при } \varepsilon_k \to 0.$$

Значит, из (4.18) и (4.19), с учетом свойства сходимости произвольных решений (см. п. 1.2), получим $\hat{A}w_0 = f$. Поэтому имеем $A_0 w_0 = \hat{A}w_0$ для любой функции $w^0 \in$

$C^2(\overline{Q;\mathbb{C}}) \cap W_0(Q)$. Следовательно, $A_0 = \hat{A} \in \mathcal{A}(k_0;Q)$ ввиду всюду плотности множества $C^2(\bar{Q};\mathbb{C}) \cap W_0(Q)$ в $W_0(Q)$.

Итак, оператор $A_0$ является эллиптическим из класса $\mathcal{A}(k_0;Q)$. Пусть $w^0$ – решение уравнения Бельтрами $A_0 w_0 = f \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$, $w \in W_0(Q)$. В силу свойства регулярности решения (см. теорему 2) это решение $w_0$ принадлежит пространству $W_2^2(Q;\mathbb{C})$. Аналогично лемме 2 отсюда получим остальные утверждения. Лемма 1 доказана.

## 5. Доказательство теоремы 6

Теперь приступим к доказательству оценки разности между точным решением $w_\varepsilon$ задачи Римана–Гильберта (1.7) и первым приближением (1.15) – $w_1^\varepsilon$.

Пусть $w_0$ – решение усредненной задачи Римана–Гильберта для усредненного уравнения из теоремы 4, и пусть $w_0 \in W_2^2(Q;\mathbb{C}) \cap W_0(Q)$. Для того чтобы обеспечить такую гладкость $w_0$ (см. теорему 2), нам достаточно взять в задаче Римана–Гильберта правую часть $f$ из пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$.

Первое приближение (1.20) – $w_1^\varepsilon$ – не принадлежит пространству $W_0(Q)$ из-за того, что корректор $\varepsilon N(x,y)\partial_z w_0(x)$ не удовлетворяет граничному условию. Это вызывает некоторые затруднения при оценке разности $w_\varepsilon - w_1^\varepsilon$. Чтобы обойти их мы добавим в первое приближение поправочный член

$$\mathbb{w}_1^\varepsilon(x) = w_0(x) + \varepsilon N(x,y)\partial_z w_0(x) - \varepsilon\theta^\varepsilon(x)N(x,y)\partial_z w_0(x) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon, \quad (5.1)$$

где $\{\theta^\varepsilon(x)\}$ – семейство, определенное формулой (4.11); $|Q|$ – площадь области $Q$; $N$ – периодическое решение из теоремы 4; $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ – действительное число, определенное формулой

$$c_\varepsilon = \int_Q \mathrm{Im}\Big(\big(1-\theta^\varepsilon(x)\big)N(x,y)\partial_z w_0(x)\Big)\,dx, \quad y = \varepsilon^{-1}x\,.$$

Очевидно, что семейство $\{c_\varepsilon\}$ равномерно ограничено по $\varepsilon$, и ввиду (1.19) имеем $|c_\varepsilon| \le c\|w_0\|_{W_2^2(Q)}$, где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$ и $l$. Так как $w_0 \in W_2^2(Q;\mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, согласно (5.1) и свойству 2 семейства (4.11) получим: $\mathbb{w}_1^\varepsilon(x) \in W_0(Q)$.

Подправленное первое приближение (5.1) ввиду (1.20), можно представить в следующем виде: $\mathbb{w}_1^\varepsilon(x) = w_1^\varepsilon(x) + \varepsilon\big(1-\theta^\varepsilon(x)\big)N(x,y)\partial_z w_0(x) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon$. Оценим разность двух приближений

$$w_1^\varepsilon(x) - \mathbb{w}_1^\varepsilon(x) = \varepsilon\theta^\varepsilon(x)N(x,y)\partial_z w_0(x) + i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon. \quad (5.2)$$

Имеем:

$$\mathcal{D}_{x_j}\big(w_1^\varepsilon(x) - \mathbb{w}_1^\varepsilon(x)\big) = \varepsilon\mathcal{D}_{x_j}\theta^\varepsilon(x)N(x,y)\partial_z w_0(x) + \theta^\varepsilon(x)\mathcal{D}_{y_j}N(x,y)\partial_z w_0(x) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\nabla_{x_j}N(x,y)\partial_z w_0(x) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)N(x,y)\mathcal{D}_{x_j}\partial_z w_0(x) \equiv \mathfrak{A}_1^\varepsilon + \mathfrak{A}_2^\varepsilon + \mathfrak{A}_3^\varepsilon + \mathfrak{A}_4^\varepsilon, \quad (5.3)$$

где $\mathcal{D}_{x_j} = \partial/\partial x_j$ , $\mathcal{D}_{y_j} = \partial/\partial y_j$, $j = 1{,}2$. Здесь, каждое слагаемое справа согласно свойству $3^\circ$ функции $\theta^\varepsilon$ равно нулю вне $\varepsilon$ – окрестности границы. Учитывая свойства 1, 4 функции $\theta^\varepsilon$, отсюда, с учетом (4.2′), $(1.6_2)$ и (1.19), легко получим:

$$\|\mathfrak{A}_1^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le c\left(\int_{Q_\varepsilon}|\partial_z w_0(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \le c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad (5.4)$$

$$\|\mathfrak{A}_3^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le c\varepsilon\|w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad \|\mathfrak{A}_4^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le c\varepsilon\|w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad (5.5)$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от $k_0$, $l$ и $Q$.

Аналогично, применив вместо $(4.2')$ неравенство $(4.2)$, где $\mathfrak{a}(x,y) = \left|\mathcal{D}_{y_j}N(x,y)\right|^2 \in \mathrm{Lip}\left(\overline{Q}, L_r(\square;\mathbb{C})\right)$, $r = q/2$, $q$ – показатель повышенной суммируемости из свойства 2 решения задачи на ячейке, $w(x) = \partial_z w_0(x)$, получим

$$\|\mathfrak{A}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{5.6}$$

где $c > 0$ – постоянная, $c = \mathrm{const}(k_0, l, Q)$.

Из оценок (5.4)–(5.6) ввиду (5.3) следует:

$$\left\|\mathcal{D}_{\mathrm{x_j}}\big(w_1^\varepsilon(x) - \mathbb{w}_1^\varepsilon(x)\big)\right\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{W_2^2(Q)},\ j = 1,2, \tag{5.7}$$

где $c > 0$ – постоянная, $c = \mathrm{const}(k_0, l, Q)$. Кроме того, из (5.2), свойства 1 семейства $\{\theta^\varepsilon\}$ и (1.19) следует оценка

$$\|w_1^\varepsilon(x) - \mathbb{w}_1^\varepsilon(x)\|_{L_2(Q)} \leq c\varepsilon\|w_0\|_{W_2^2(Q)}. \tag{5.8}$$

Из оценок (5.7) и (5.8) мы имеем

$$\|w_1^\varepsilon(x) - \mathbb{w}_1^\varepsilon(x)\|_{W_2^1(Q)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{W_2^2(Q)}, \tag{5.9}$$

где $c > 0$ – постоянная, $c = \mathrm{const}(k_0, l, Q)$.

Теперь найдем $L_2$-оценку для $f_\varepsilon := A_\varepsilon(w_\varepsilon - \mathbb{w}_1^\varepsilon)$. Согласно (1.21) имеем

$$f_\varepsilon = A_\varepsilon(w_\varepsilon - w_1^\varepsilon) + A_\varepsilon(w_1^\varepsilon - \mathbb{w}_1^\varepsilon) = -\varepsilon r_\varepsilon + \partial_{\bar z}(w_1^\varepsilon - \mathbb{w}_1^\varepsilon) + \mu(y)\,\partial_z(w_1^\varepsilon - \mathbb{w}_1^\varepsilon).$$

Отсюда и из $L_2$-оценок производных (5.7), учитывая (1.5) и (4.12), получим следующую оценку:

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq \|A_\varepsilon(w_\varepsilon - w_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} + \|A_\varepsilon(w_1^\varepsilon - \mathbb{w}_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{5.10}$$

где $c > 0$ – постоянная, $c = \mathrm{const}(k_0, l, Q)$.

Заметим, что разность $w_\varepsilon - \mathbb{w}_1^\varepsilon$ является решением задачи Римана–Гильберта: $\partial_{\bar z}w + \mu(\varepsilon^{-1}x)\,\partial_z w = f_\varepsilon$, $w \in W_0(Q)$, и оно принадлежит пространству $W_0(Q)$. Поэтому из оценок (5.10) и (1.5) получим

$$\|w_\varepsilon - \mathbb{w}_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{W_2^2(Q)}. \tag{5.11}$$

Из оценок (5.9) и (5.11) вытекает оценка разности между точным решением и первым приближением $w_\varepsilon - w_1^\varepsilon$:

$$\|w_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{W_2^2(Q)} \tag{5.12}$$

с постоянной $c > 0$, $c = \mathrm{const}(k_0, l, Q)$. Отсюда из оценки (5.9) и из леммы 3, получим следующую оценку:

$$\|w_\varepsilon - w_0\|_{L_2(Q)} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|w_0\|_{W_2^2(Q)} \tag{5.13}$$

с постоянной $c > 0$, $c = \mathrm{const}(k_0, l, Q)$.

Заметим, что $w_0$ – решение усредненной эллиптической задачи, поэтому согласно теореме 2 получим: $\|w_0\|_{W_2^2(Q)} \leq c\|f\|_{W_2^1(Q)}$ с постоянной $c > 0$, $c = \mathrm{const}(k_0, l, Q)$. Следовательно, из оценок (5.12), (5.13) вытекают оценки (1.22). Теорема 6 доказана.

## Литература

1. *Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н.* Операторные оценки повторного и локально-периодического усреднения // Доклады РАН.– 2007. – Т. 415, № 3. – С. 304–309.

2. *Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н.* Оценки локально-периодического и повторного усреднения: параболические уравнения // Доклады РАН. – 2009. –Т. 428, № 2. – С. 166–170.

3. *Сиражудинов М.М.* Асимптотический метод усреднения обобщенных операторов Бельтрами // Мат. сб. – 2017. – Т. 208, № 4. – С. 87–110.

4. *Сиражудинов М.М., Тихомирова С.В.* Оценки погрешности усреднения периодической задачи для обобщенного уравнения Бельтрами // Диф. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 12. – С. 1651–1659.
5. *Сиражудинов М.М.* О G-сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 5. – С. 124–155.
6. *Сиражудинов М.М.* О краевой задаче Римана–Гильберта // Диф. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 1. – С. 64–73.
7. *Сиражудинов М.М.* О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка // Мат. заметки. – 1990. – Т. 48, № 5.– С. 153–155.
8. *Гильбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
9. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Высшая школа, 1987.

*Поступила в редакцию 12 сентября 2021 г.*

UDC 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-38–53

## Error Estimation in Averaging Riemann–Hilbert Problem for Beltrami Equation With a Local Periodic Coefficient

***M.M. Sirazhudinov*[1, 2]*, S.P. Dzhamaludinova*[1]**

[1] *Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; siraznmagomed@yandex.ru;*
[2] *Dagestan Federal Research Center RAS; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45*

Local characteristics of mathematical models of strongly inhomogeneous media are usually described by functions of the form $a(\varepsilon^{-1}x)$, or $b(x,\varepsilon^{-1}x)$, or $c(\varepsilon^{-1}x,\delta^{-1}x)$, or $d(\varepsilon^{-1}x,\delta^{-1}x,\gamma^{-1}x)$, etc., where $\varepsilon,\delta,\gamma > 0$ are small parameters, while the functions $a, b, c, d$ have an ordered structure (e.g.: periodic in the variables $y = \varepsilon^{-1}x$, $z = \delta^{-1}x$ etc.). Consequently, the corresponding mathematical models are differential equations with rapidly oscillating coefficients.

This research is focused on the estimates of the averaging error. We study the scalar Beltrami equation with a local periodic coefficient $\mu(x,\varepsilon^{-1}x)$.

Keywords: *Beltrami equation, homogenization, G-convergence.*

*Received 12 September 2021*