МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-28–37

К.У. Хубиев

Задача со смещением для одного «точечно» нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа

Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН (ИПМА КБНЦ РАН); Россия, 360000, КБР, г. Нальчик, ул. А. Шортанова, 89а; khubiev_math@mail.ru

В работе рассматривается нагруженное модельное уравнение смешанного гиперболо-параболического типа. Нагрузка представляет собой линейную комбинацию значений искомого решения в фиксированных точках области. Отличительной особенностью рассматриваемого уравнения является то, что нагруженные слагаемые могут попадать как на границу области и на линию изменения типа, так и во внутренние точки области, а также то, что нагрузка является «точечной». При описании физических и биологических процессов «точечно» нагруженные слагаемые определяют дискретное воздействие на процесс в точках «нагружения». Коэффициенты при нагруженных слагаемых являются константами для упрощения вычислений, но полученные результаты сохраняются и в случае переменных коэффициентов в уравнении. Для рассматриваемого уравнения исследуются нелокальная краевая задача с условием смещения в гиперболической части области и задача с производными в условии со смещением. Найдены условия существования и единственности регулярного решения задачи. Рассмотрены частные случаи уравнения, для которых решение задачи выписывается в явном виде.

Ключевые слова: *нагруженное уравнение, уравнение смешанного типа, гиперболо-параболическое уравнение, задача со смещением, нелокальная задача.*

Исследованию локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных уравнений с частными производными посвящено много работ (см., например, [1; 2] и их библиографию). К тому же в некоторых случаях для исследования разрешимости нелокальных краевых и обратных задач весьма эффективен метод, основанный на сведении их к локальным задачам для нагруженного уравнения [1; 3].

Рассмотрим нагруженное [1] уравнение гиперболо-параболического типа

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i u(x_i, y_i), \quad y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = \sum\limits_{i=m+1}^{n} \mu_i u(x_i, y_i), \; y < 0 \end{cases} \tag{1}$$

в области Ω, ограниченной отрезками прямых $x = 0$, $x = r$, $y = T$ при $y > 0$, характеристиками $x + y = 0$, $x - y = r$ уравнения (1) при $y < 0$; $u = u(x, y)$; $(x_i, y_i) \in \Omega_1$, если $i \in \overline{1, m}$, $(x_i, y_i) \in \Omega_2$, если $i \in \overline{m+1, n}$; Ω_1 и Ω_2 – параболическая и гиперболическая части смешанной области Ω соответственно, $\lambda_i, \mu_i, m, n = const$.

Регулярным в области Ω решением уравнения (1) назовем функцию $u = u(x, y)$ из класса $C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}_{x,y}(\Omega_1) \cap C^2(\Omega_2)$, удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_1 \cup \Omega_2$, такую, что $u_y(x, 0)$ может обращаться в бесконечность порядка меньше единицы на концах интервала $0 < x < r$ прямой $y = 0$.

Через $\theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)$ и $\theta_r(x) = \left(\frac{x+r}{2}, \frac{x-r}{2}\right)$ обозначим точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $(x, 0)$, с характеристиками $x + y = 0$ и $x - y = r$ соответственно [4].

Для уравнения (1) рассмотрим следующие задачи со смещением:

Задача N₁. *Найти в области* Ω *регулярное решение* $u(x, y)$ *уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям*

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(r, y) = \varphi_r(y), \quad 0 \le y \le T, \tag{2}$$

$$\alpha u[\theta_0(x)] + \beta u[\theta_r(x)] = \gamma(x), \quad 0 \le x \le r, \tag{3}$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_r(y)$, $\gamma(x)$ *– заданные функции,* $\alpha, \beta = const$*, причем* $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0$.

Задача N₂. *Найти в области* Ω *регулярное решение* $u(x, y)$ *уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям (2) и условию*

$$\alpha \frac{d}{dx} u[\theta_0(x)] + \beta \frac{d}{dx} u[\theta_r(x)] = \gamma_2(x), \quad 0 < x < r, \tag{4}$$

где $\varphi_0(y)$, $\varphi_r(y)$, $\gamma_2(x)$ *– заданные функции,* $\alpha, \beta = const$*, причем* $\alpha^2 + \beta^2 \ne 0$.

Как отмечено в [4], краевые задачи со смещением возникли при поиске корректных краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях, когда поверхность параболического вырождения является пространственно ориентированной. Определение краевой задачи со смещением было дано в работе [5], там же был исследован ряд задач с различными смещениями для модельных уравнений смешанного и гиперболического типов, после чего началось интенсивное изучению краевых задач со смещением для гиперболического и смешанного типов уравнений. Для уравнения смешанного гиперболо-параболического типа задачи со смещением были рассмотрены в [6]. Подробную библиографию исследований задач со смещением смотри в [4; 7].

Для уравнения (1) при $y < 0$ в работе [8] исследована задача Коши. Если $\alpha = 1$, $\beta = 0$, задача *N₁* переходит в аналог задачи Трикоми, изученный для уравнения (1) в [9]. Также в работе [10] исследованы аналоги задачи Трикоми и задачи *N₁* и *N₂* для модельного характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа.

Среди работ, близких по тематике к исследуемой задаче, отметим также работы [11–21], посвященные гиперболо-параболическим и гиперболическим нагруженным уравнениям.

Задача N₁. Пусть существует решение задачи *N₁*. Обозначим $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u(x_i, y_i)$ и $\mu = \sum_{i=m+1}^{n} \mu_i u(x_i, y_i)$ и будем пока считать $\lambda = const$ и $\mu = const$ известными константами. Обозначим через $\tau(x) = u(x, 0), \quad 0 \le x \le r$; $\quad \nu(x) = u_y(x, 0), \quad 0 < x < r$.

Из условия (2) задачи получим

$$\tau(0)=\varphi_0(0), \quad \tau(r)=\varphi_r(0), \tag{5}$$

а из (3) получим необходимое для регулярности решения условие согласования

$$\alpha^2\varphi_0(0)-\beta^2\varphi_r(0)=\alpha\gamma(0)-\beta\gamma(r). \tag{6}$$

Функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для уравнения (1), принесенное из параболической части Ω_1 области Ω, будет иметь вид

$$\tau''(x)-\nu(x)=\lambda. \tag{7}$$

Решение задачи в Ω_2 представимо в виде

$$u(x,y)=\frac{\tau(x+y)+\tau(x-y)}{2}-\frac{1}{2}\int_{x+y}^{x-y}\nu(\xi)d\xi-\frac{\mu y^2}{2}. \tag{8}$$

Удовлетворяя (8) условию (3), получим

$$2\alpha u[\theta_0(x)]+2\beta u[\theta_r(x)]=\alpha\left[\tau(x)+\tau(0)-\int_0^x\nu(\xi)d\xi-\frac{\mu x^2}{4}\right]+$$

$$+\beta\left[\tau(x)+\tau(r)-\int_x^r\nu(\xi)d\xi-\mu\left(\frac{x-r}{2}\right)^2\right]=2\gamma(x).$$

Дифференцируя, получаем

$$(\alpha+\beta)\tau'(x)-(\alpha-\beta)\nu(x)=2\gamma'(x)+\frac{\mu}{2}\left[\alpha x+\beta(x-r)\right], \tag{9}$$

откуда при $\alpha\neq\beta$ следует $\nu(x)=\dfrac{1}{\alpha-\beta}\left((\alpha+\beta)\tau'(x)-2\gamma'(x)-\dfrac{\mu}{2}\left[\alpha x+\beta(x-r)\right]\right)$.

Исключая $\nu(x)$ из (7) и (9), получим уравнение

$$\tau''(x)-\frac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}\tau'(x)=f(x), \tag{10}$$

где $f(x)=-\dfrac{2\gamma'(x)}{\alpha-\beta}+\lambda-\dfrac{\mu}{2}\left[\alpha x+\beta(x-r)\right]$.

Решение двухточечной задачи Дирихле (5) для уравнения (10) можно представить в виде

$$\tau(x)=\lambda\int_0^r G_0(x,\xi)d\xi-\frac{\mu}{2}\int_0^r\left[\alpha\xi+\beta(\xi-r)\right]G_0(x,\xi)d\xi+F(x), \tag{11}$$

где $F(x)=-\dfrac{2}{\alpha-\beta}\displaystyle\int_0^r G_0(x,\xi)\gamma'(\xi)d\xi-G_{0\xi}(x,0)\varphi_0(0)+G_{0\xi}(x,r)\varphi_r(0)$, $G_0(x,\xi)$ – функция

Грина задачи (10), (5): $G_0(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{(e^{\sigma x}-e^{\sigma r})(1-e^{-\sigma\xi})}{\sigma(e^{\sigma r}-1)}, & 0\le\xi\le x,\\[2ex] \dfrac{(e^{\sigma(r-\xi)}-1)(1-e^{\sigma x})}{\sigma(e^{\sigma r}-1)}, & x\le\xi\le r,\end{cases}$

$G_{0\xi}(x,0)=\dfrac{e^{\sigma x}-e^{\sigma r}}{e^{\sigma r}-1}$, $G_{0\xi}(x,r)=\dfrac{e^{\sigma x}-1}{e^{\sigma r}-1}$, $\sigma=\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha-\beta}$.

Очевидно, что функция $\tau(x) \in C[0,r] \cap C^2]0,r[$, если $\gamma(x) \in C[0,r] \cap C^2]0,r[$, и определяется однозначно в зависимости от λ и μ.

Также, учитывая (9), получим, что

$$\int_{x+y}^{x-y} \nu(\xi)d\xi = \sigma\tau(x-y) - \sigma\tau(x+y) - \frac{2}{\alpha-\beta}\gamma(x-y) + \frac{2}{\alpha-\beta}\gamma(x+y) + \mu y\left[\sigma x - \frac{\beta r}{\alpha-\beta}\right].$$

Подставляя в (8) значение интеграла, получаем

$$u(x,y) = \frac{1-\sigma}{2}\tau(x-y) + \frac{1+\sigma}{2}\tau(x+y) + \frac{\gamma(x-y)}{\alpha-\beta} - \frac{\gamma(x+y)}{\alpha-\beta} - \frac{1}{2}\mu y\left[\sigma x - \frac{\beta r}{\alpha-\beta}\right] - \frac{\mu y^2}{2} =$$

$$= \frac{\alpha\tau(x+y)}{\alpha-\beta} - \frac{\beta\tau(x-y)}{\alpha-\beta} + \frac{\gamma(x-y)}{\alpha-\beta} - \frac{\gamma(x+y)}{\alpha-\beta} - \frac{\mu y}{2(\alpha-\beta)}\left[(\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta)y - \beta r\right]. \tag{12}$$

Далее, подставляя (11) в (12), окончательно получаем

$$u(x,y) = r(x,y) - \lambda p(x,y) - \mu q(x,y), \tag{13}$$

где $p(x,y) = \frac{1}{\alpha-\beta}\left(\beta\int_0^r G_0(x-y,\xi)d\xi - \alpha\int_0^r G_0(x+y,\xi)d\xi\right)$,

$$q(x,y) = \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha\int_0^r\left[\alpha\xi + \beta(\xi-r)\right]G_0(x+y,\xi)d\xi - \right.$$

$$\left.\beta\int_0^r\left[\alpha\xi + \beta(\xi-r)\right]G_0(x-y,\xi)d\xi\right) - -\frac{y[\beta r - (\alpha+\beta)x - (\alpha-\beta)y]}{2(\alpha-\beta)},$$

$$r(x,y) = \frac{\alpha F(x+y) - \beta F(x-y) + \gamma(x-y) - \gamma(x+y)}{\alpha-\beta}.$$

Учитывая условие согласования (6), легко проверить, что функция, определяемая формулой (12), а следовательно, формулой (13), действительно является регулярным решением уравнения (1), удовлетворяющим условию задачи (3).

С другой стороны, в параболической части области решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности имеет вид [22, с. 267]

$$u(x,y) = \int_0^y \varphi_0(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta - \int_0^y \varphi_r(\eta)G_\xi(x,y;r,\eta)d\eta + \int_0^r \tau(\xi)G(x,y;\xi,0)d\xi -$$

$$-\lambda\int_0^y\int_0^r G(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta, \tag{14}$$

где

$$G(x,y;\xi,\eta) = [4\pi(y-\eta)]^{-1/2} \times \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x-\xi+2rk)^2}{4(y-\eta)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2rk)^2}{4(y-\eta)}\right]\right\} -$$

функция Грина первой краевой задачи.

Учитывая (11) из (14), имеем

$$u(x,y) = \rho(x,y) - \lambda g(x,y) - \mu h(x,y), \tag{15}$$

где $\rho(x,y) = \int_0^y \varphi_0(\eta)G_\xi(x,y;0,\eta)d\eta - \int_0^y \varphi_r(\eta)G_\xi(x,y;r,\eta)d\eta + \int_0^r G(x,y;\xi,0)F(\xi)d\xi$,

$$g(x,y)=\int_0^y\int_0^r G(x,y;\xi,\eta)d\xi d\eta-\int_0^r\int_0^r G(x,y;\xi,0)G_0(\xi,s)dsd\xi,$$

$$h(x,y)=\frac{1}{2}\int_0^r\int_0^r\left[\alpha s+\beta(s-r)\right]G(x,y;\xi,0)G_0(\xi,s)dsd\xi.$$

Таким образом, получаем представление о решении задачи в Ω_1 и Ω_2, зависящем от λ и μ, которые задаются формулами (13) и (15).

Для удобства введем следующие обозначения:

$$u_i=u(x_i,y_i),\ \ \rho_i=\rho(x_i,y_i),\ g_i=g(x_i,y_i),\ h_i=h(x_i,y_i),\ 1\le i\le m,$$
$$u_i=u(x_i,y_i),\ \ p_i=p(x_i,y_i),\ q_i=q(x_i,y_i),\ r_i=r(x_i,y_i),\ m+1\le i\le n.$$

Полагая последовательно $(x,y)=(x_i,y_i)$ в Ω_1 $(i=1,...m)$ и в Ω_2 $(i=m+1,...,n)$, получим систему n линейных уравнений относительно неизвестных u_i вида

$$u_i=\begin{cases}\rho_i-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j u_j g_i-\sum\limits_{j=m+1}^{n}\mu_j u_j h_i, & 1\le i\le m,\\ r_i-\sum\limits_{j=1}^{m}\lambda_j u_j p_i-\sum\limits_{j=m+1}^{n}\mu_j u_j q_i, & m+1\le i\le n.\end{cases}$$

Систему можно переписать в виде

$$u_i+\sum_{j=1}^{n}\phi_{ij}u_j=\chi_i,\quad 1\le i\le n, \tag{16}$$

где
$$\phi_{ij}=\begin{cases}\lambda_j g_i, & i,j=\overline{1,m},\\ \mu_j h_i, & i=\overline{1,m},\quad j=\overline{m+1,n},\\ \lambda_j p_i, & i=\overline{m+1,n},\ j=\overline{1,m},\\ \mu_j q_i, & i,j=\overline{m+1,n},\end{cases}\qquad \chi_i=\begin{cases}\rho_i, & 1\le i\le m,\\ r_i, & m+1\le i\le n.\end{cases}$$

Вычислив определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}1+\phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n}\\ \phi_{21} & 1+\phi_{21} & \dots & \phi_{2n}\\ . & . & \dots & .\\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & 1+\phi_{nn}\end{vmatrix}, \tag{17}$$

получим, что при выполнении условия $\Delta\ne 0$ решение системы будет иметь вид $u_i=\Delta_i/\Delta$, где Δ_i – определители матриц, полученных из системы (16) заменой i-того столбца на столбец свободных членов (χ_i).

Таким образом, после нахождения неизвестных $u_i, i=1,2...,n$ мы найдем λ и μ, и функция $\tau(x)$ полностью определяется формулой (12), причем $\tau(x)\in C[0,r]\cap C^2]0,r[$.

Далее решение задач (1)–(3) выписывается по формулам (13) и (15).

Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Если* $\varphi_0(y), \varphi_r(y) \in C[0,T]$, $\gamma(x) \in C[0,r] \cap C^2]0,r[$, $\Delta \neq 0$, *где* Δ *определяется формулой* (17), $\alpha \neq \beta$ *и выполняются условия согласования* (6) $\alpha^2\varphi_0(0) - \beta^2\varphi_r(0) = \alpha\gamma(0) - \beta\gamma(r)$, *то задача N₁ имеет решение, и притом единственное*.

Некоторые частные случаи уравнения (1)

1. Рассмотрим нагруженное только в гиперболической части области Ω, т. е. $m = 0$, $n \neq 0$.

$$\begin{cases} u_{xx} - u_y = 0, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy} = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i u(x_i, y_i), & y < 0. \end{cases} \tag{18}$$

В этом случае формулы (11) и (13) примут вид

$$\tau(x) = -\frac{\mu}{2}\int_0^r \left[\alpha\xi + \beta(\xi - r)\right] G_0(x,\xi)d\xi + F(x), \qquad u(x,y) = r(x,y) - \mu q(x,y),$$

где функции $F(x)$, $q(x,y)$, $r(x,y)$ останутся без изменений. В системе уравнений (16) элементы

$$\phi_{ij} = \mu_j q_i = \frac{\mu_j}{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha\int_0^r \left[\alpha\xi + \beta(\xi - r)\right] G_0(x_i + y_i, \xi)d\xi - \beta\int_0^r \left[\alpha\xi + \beta(\xi - r)\right] G_0(x_i - y_i, \xi)d\xi - \right.$$
$$\left. - y[\beta r - (\alpha+\beta)x_i - (\alpha-\beta)y_i]\right), \ \chi_i = r_i, \ i, j = \overline{1,n}.$$

Далее нам понадобится лемма из [9].

Лемма 1. *Если определитель*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+\alpha_1\beta_1 & \alpha_2\beta_1 & \ldots & \alpha_n\beta_1 \\ \alpha_1\beta_2 & 1+\alpha_2\beta_2 & \ldots & \alpha_n\beta_2 \\ . & . & \ldots & . \\ \alpha_1\beta_n & \alpha_2\beta_n & \ldots & 1+\alpha_n\beta_n \end{vmatrix},$$

то $\Delta_n = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$, *а алгебраические дополнения элемента* i*-той строки и* j*-того столбца матрицы равны* $\Delta_n^{i,j} = \begin{cases} 1 + \sum\limits_{k=1, k\neq i,j}^{n} \alpha_k\beta_k, \ i = j, \\ -\alpha_i\beta_j, \quad i \neq j. \end{cases}$

Доказательство леммы (см. [23]) проводится по индукции, используя известные свойства определителей.

В случае $m = 0$ по лемме 1 определитель системы (16) $\Delta = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} \phi_{ij} = 1 + \sum\limits_{i=1}^{n} m_i q_j$, и условие $\Delta \neq 0$ однозначной разрешимости задачи **N₁** будет иметь вид

$$1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i}{2(\alpha-\beta)}\left(\alpha\int_0^r \left[\alpha\xi + \beta(\xi - r)\right] G_0(x_i + y_i, \xi)d\xi - \right.$$

$$-\beta\int\limits_0^r\left[\alpha\xi+\beta(\xi-r)\right]G_0(x_i-y_i,\xi)d\xi-y_i[\beta r-(\alpha+\beta)x_i-(\alpha-\beta)y_i]\Bigg)\neq 0, \qquad (19)$$

при выполнении которого нагруженные слагаемые будут определяться по формуле $u_i=u(x_i,y_i)=\dfrac{1}{\Delta}\sum\limits_{j=1}^{n}\Delta^{i,j}r_j$, где алгебраические дополнения элемента i-той строки и j-того столбца равны $\Delta^{i,j}=\begin{cases}1+\sum\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}\mu_k q_k,\ i=j,\\ -\mu_j q_i,\quad i\neq j.\end{cases}$

Таким образом, при выполнении условия (19) и условий теоремы на гладкость заданных функций задач (2) – (3) для уравнения (18) имеет единственное решение, которое представлено формулами (13) и (15) в явном виде.

2. Рассмотрим теперь случай $m=n$, т. е.

$$\begin{cases}u_{xx}-u_y=\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i u(x_i,y_i),\ y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}=0,\qquad\qquad y<0.\end{cases}$$

В этом случае формулы (11) и (15) примут вид

$$\tau(x)=\lambda\int\limits_0^r G_0(x,\xi)d\xi+F(x),\qquad\qquad u(x,y)=\rho(x,y)-\lambda g(x,y).$$

В этом случае к получившейся матрице системы уравнений (16) также применима лемма 1. Условие $\Delta\neq 0$ однозначной разрешимости задачи будет иметь вид $1+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i g_i=1+\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\left(\int\limits_0^{y_i}\int\limits_0^{r}G(x_i,y_i;\xi,\eta)d\xi d\eta-\int\limits_0^{r}\int\limits_0^{r}G(x_i,y_i;\xi,0)G_0(\xi,s)dsd\xi\right)\neq 0$, при выполнении которого нагруженные слагаемые будут определяться по формуле

$$u_i=u(x_i,y_i)=\frac{1}{\Delta}\sum_{j=1}^{n}\Delta^{i,j}\rho_j\text{, где }\Delta^{i,j}=\begin{cases}1+\sum\limits_{k=1,k\neq i,j}^{n}\lambda_k g_k,\ i=j,\\ -\lambda_j g_i,\quad i\neq j.\end{cases}$$

3. Рассмотрим случай $m=1$, $n=2$:

$$\begin{cases}u_{xx}-u_y=\lambda_1 u(x_1,y_1),\quad y>0,\\ u_{xx}-u_{yy}=\mu_2 u(x_2,y_2),\ y<0.\end{cases}$$

Здесь условие $\Delta\neq 0$ однозначной разрешимости задачи $\mathbf{N_1}$ примет вид: $1+\lambda_1 g_1+\mu_2 q_2+\lambda_1\mu_2(g_1 q_2-h_1 p_2)\neq 0$.

Задача $\mathbf{N_2}$. Для задачи N_2 верна

Теорема 2. *Если* $\varphi_0(y),\varphi_r(y)\in C[0,T]$, $\gamma_2(x)\in C[0,r]\cap C^1]0,r[$, $\Delta\neq 0$, *где* Δ *определяется формулой* (17) *и* $\alpha\neq\beta$, *то задача* N_2 *имеет решение, и притом единственное*.

В параболической части Ω_1 смешанной области Ω функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ для задачи N_2 будет задаваться формулой (7).

Из Ω_2, удовлетворяя (8) условию (4), получим

$$(\alpha+\beta)\tau'(x)-(\alpha-\beta)\nu(x)=2\gamma_2(x)+\frac{\mu}{2}\left[\alpha x+\beta(x-r)\right]. \tag{20}$$

Таким образом, (20) совпадает с соотношением (9) (за исключением заданной функции в правой части). Следовательно, из доказательства теоремы 1 следует верность теоремы 2.

В заключение отметим, что все вышеприведенные рассуждения верны и в случае переменных коэффициентов, т. е. если $\lambda_i=\lambda_i(x,y)$, $\mu_i=\mu_i(x,y)$, в том числе и для вышеприведенных частных случаев, но известные функции из формул (13) и (15) будут иметь более сложный вид. Однако, если переменными будут коэффициенты задачи $\alpha=\alpha(x)$, $\beta=\beta(x)$, функцию $G_0(x,\xi)$ в общем случае не удается выписать в явном виде.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Нагруженные уравнения и их применения. – М.: Наука, 2012. – 232 с.

2. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 334 с.

3. *Нахушев А.М.* О нелокальных задачах со смещением и их связи с нагруженными уравнениями // Диф. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 1. – С. 92–101.

4. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. – М.: Наука, 2006. – 287 с.

5. *Нахушев А.М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа// Диф. уравнения. – 1969. – Т. 5, № 1. – С. 44-59.

6. *Елеев В.А.* О некоторых краевых задачах со смещением для одного уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Диф. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 1. – С. 22–29.

7. *Репин О.А*. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. – Самара: Издательство Самарского филиала Саратовского государственного университета, 1992, – 161 с.

8. *Казиев В.М., Кайгермазов А.А., Кудаева Ф.Х.* Задача Коши для нагруженного вырождающегося гиперболического уравнения // Вестник БГУ. Математика, информатика. – 2018. – № 1. – С. 95–99.

9. *Хубиев К.У.* Об одном аналоге задачи Трикоми для «точечно» нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // Вестник КРАУ НЦ. Физико-математические науки. – 2021. – № 3. – С. 29–39.

10. *Хубиев К.У.* Краевые задачи для характеристически нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа // Итоги науки и техники. Сер.: Совр. математика и ее приложения. Темат. обз. 2021. Т. 195. – С. 127–138.

11. *Mirsaburov M.* The problem with missing condition of shift for singular coefficiensy Gellerstedt equation // Russian Mathematics (Izvestija VUZ). – 2018. – Vol. 62, № 5. – P. 44–54.

12. *Сабитова Ю.К.* Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с нагруженными слагаемыми // Изв. вузов. Математика. – 2018. – № 9. – С. 42–58.

13. *Хубиев К.У.* Задачи со смещением для нагруженного уравнения гиперболо-параболического типа с оператором дробной диффузии // Вестник Удмуртского ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2018. – Т. 28, № 1. – С. 82–90.

14. *Аттаев А.Х.* Задача граничного управления для нагруженного уравнения колебания струны // Диф. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 5. – С. 635–640.

15. *Attaev A.Kh.* On a characteristic problem for a loaded hyperbolic equation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series. – 2019. – Vol. 96, № 4. – P. 15–21.

16. *Agarwal P., Baltaeva U., Alikulov Y.* Solvability of the boundary-value problem for a linear loaded integro-differential equation in an infinite three-dimensional domain // Chaos, Solitons and Fractals. – 2020. – Vol. 140. – P. 110108.

17. *Зикиров О.С., Холиков Д.К.* Разрешимость некоторых нелокальных задач для нагруженного уравнения третьего порядка // Сибирские электронные математические известия. – 2020. – Т. 17. – С. 77–88.

18. *Khubiev K.U.* Boundary-value problem for a loaded hyperbolic-parabolic equation with degeneracy of order in the hyperbolicity domain // Journal of Mathematical Sciences. – 2020. – Vol. 250, № 5. – P. 830–834.

19. *Islomov B.I., Alikulov Y.K.* Boundary value problem for loaded equation of parabolic-hyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain // International Journal of Applied Mathematics. – 2021. – Vol. 34, № 2. – P. 377–389.

20. *Urinov A.K., Azizov M.S.* A boundary problem for the loaded partial differential equations of fourth order // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, № 3. – P. 621–631.

21. *Yuldashev T.K., Abdullaev O.K.* Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2021. – Vol. 42, № 5. – P. 1113–1123.

22. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

23. *Казиев В.М.* Об одном нагруженном обыкновенном дифференциальном уравнении // Сборник научных трудов «Нелокальные краевые задачи для нагруженных уравнений смешанного типа и родственные проблемы непрерывного анализа». – Нальчик: КБГУ, 1982. – С. 130–133.

Поступила в редакцию 20 октября 2021 г.

UDC 517.95

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-28–37

Problem With Shift for a "Pointwise" Loaded Hyperbolic-Parabolic Equation

K.U. Khubiev

Institute of Applied Mathematics and Automation of Kabardin-Balkar Scientific Center of the RAS (IAMA KBSC RAS); Russia, 360000, KBR, Nalchik, A. Shortanov st., 89a; khubiev_math@mail.ru

The paper considers a loaded equation model of mixed hyperbolic-parabolic type. The load is a linear combination of the desired solution at fixed points in its domain. A distinguishing feature of the considered equation is that the loaded terms can occur on the domain boundary and the line of changing type, as well as on the interior points in the domain. When describing physical and biological processes, "pointwise" loaded terms determine an effect of a discrete character at the points of "loading". For simplification, the coefficients of the loaded terms are constants, nevertheless variable coefficients do not affect the results. For the considered equation, a nonlocal boundary value problem with a displacement condition in the hyperbolic part of the domain and a problem with displacement derivatives are investigated. Conditions for the existence and uniqueness of a regular solution to the problem are found. Special cases of the equation are considered with the solution to the problem written out explicitly.

Keywords: *loaded equation, equation of mixed type, hyperbolic-parabolic equation, problem with shift, non-local problem.*

Received 20 October 2021