УДК 517.43

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-90–93

Г.А. Айгунов, Т.Ю. Гаджиева, Г.А. Джалаева

Некоторые верхние оценки для собственных функций задачи типа Редже

Дагестанский государственный университет; Россия, 367001, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; nizam_zagirov@mail.ru, tamila.usup@mail.ru

В статье рассматриваются вопросы поведения собственных функций одной не-самосопряженной задачи.

Задачи об асимптотике собственных значений, свойствах полноты и базисности собственных функций задачи Редже изучались во многих работах. Вопрос о росте норм собственных значений данной задачи также были ранее рассмотрен.

Для суммируемых весов установлено, что максимумы собственных функций могут расти не медленнее на некоторой под-последовательности собственных функций.

Целью нашей работы является изучение верхней оценки для норм производных собственных функций задачи. Основные результаты работы представлены в виде доказательства теоремы, утверждающей, что для всех собственных чисел и соответствующих собственных функций одной несамопряженной задачи существуют положительные константы, не зависящие от суммируемых функций из рассматриваемой задачи, такие, что можно дать оценки для норм производных (первой и второй).

Ключевые слова: *регулярный, нерегулярный, краевая, спектральный параметр, собственные функции, собственные значения.*

Обозначим через $L^+[0; a]$ совокупность всех суммируемых на сегменте $[0, a]$ функций $\rho(x)$, удовлетворяющих неравенствам $0 < m \leq \rho(x) \leq M < \infty$. В дальнейшем такие функции будем называть весовыми.

Рассмотрим спектральную задачу $(\rho(x) \in L^+[0; a], q(x) \in L^+[0; a])$

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y, \quad (1)$$

$$y(0) = y'(a) - i\lambda y(a) = 0 \quad (2)$$

$$\left(\int_0^a \rho(x) |y(x)|^2 dx \right)^{1/2} = 1, \quad (3)$$

где λ – комплексный параметр.

Задачи об асимптотике собственных значений, свойствах полноты и базисности собственных функций задачи Редже изучались во многих работах, в [1–6].

Вопрос о росте норм собственных значений задачи (1)–(3) рассматривался в работах [7–11]. Для суммируемых весов в них установлено, что максимумы собственных функций могут расти не медленнее $c \cdot |\lambda|^{1/2}$ на некоторой подпоследовательности соб-

ственных функций $y_{n_k}(x)$. Здесь и далее через $\{\lambda_n, y_n(x)\}$ обозначается собственная пара рассматриваемой задачи.

Нами получены верхние оценки для норм производных собственных функций задачи (1)–(3). Справедлива следующая

Теорема. Пусть функции q и ρ – суммируемые на отрезке $[0, a]$, причем $q(x) \geq 0$ и $\rho(x) \geq m > 0$. Тогда для всех собственных чисел λ_n и соответствующих собственных функций y_n задачи (1)–(3) существуют положительные константы C_1 и C_2 , не зависящие от $q(x)$, $\rho(x)$ и n , такие, что справедливы неравенства:

$$\|y'_n(x)\|_{C_{[0,a]}} < C_1 |\lambda|^{3/2};$$

$$\|y''_n(x)\|_{C_{[0,a]}} < C_2 |\lambda|^{5/2}.$$

Доказательство. Докажем сначала более простое второе неравенство. Из уравнения (1) имеем

$$\begin{aligned} |y''_n(x)| &= |\lambda_n^2 \rho(x) - q(x)| |y_n(x)| \leq (|\lambda_n|^2 M + M) \max_{x \in [0,a]} |y_n(x)| = \\ &= M \left(1 + \frac{1}{|\lambda_n|^2}\right) |\lambda_n|^2 \cdot \|y_n(x)\|_{C_{[0,a]}}, \text{ а так как} \\ \|y_n(x)\|_{C_{[0,a]}} &< C |\lambda_n|^{1/2} \text{ (см. [11])}, \text{ то} \\ \|y''_n(x)\|_{C_{[0,a]}} &< M \left(1 + \frac{1}{|\lambda_n|^2}\right) \cdot C_0 |\lambda_n|^{5/2} < C_2 |\lambda|^{5/2} \end{aligned}$$

(так как $|\lambda_n|$ ограничены снизу положительной константой, не зависящей от $\rho(x)$ и $q(x)$).

Перейдем к доказательству первого неравенства. Рассмотрим тождество

$$|y'(x)|^2 = y'(x) \cdot \bar{y}'(x) = \int_a^x [y''(t) \bar{y}'(t) + y'(t) \bar{y}''(t)] dt + |y'(a)|^2.$$

Из (2) следует, что $y'(a) = i\lambda y(a)$, и потому $|y'(a)| = |\lambda| \cdot |y(a)|$, следовательно,

$$\begin{aligned} |y'(x)|^2 &= |\lambda|^2 \cdot |y(a)|^2 + \int_a^x [y''(t) \bar{y}'(t) + y'(t) \bar{y}''(t)] dt \leq \\ &\leq |\lambda|^2 \cdot |y(a)|^2 + \left| \int_a^x 2 \cdot |y''(t)| \cdot |y'(t)| dt \right| \text{ (так как } |y''(t)| = |\bar{y}''(t)| \text{ и } |y'(t)| = |\bar{y}'(t)|), \end{aligned}$$

подставляя вместо $y''(t)$ его представление из уравнения (1), получим

$$|y'(x)|^2 \leq |\lambda|^2 \cdot |y(a)|^2 + 2 \left| \int_a^x |\lambda^2 \rho(t) - q(t)| \cdot |y(t)| \cdot |y'(t)| dt \right| \text{ или, используя}$$

очевидную оценку $|\lambda^2 \rho(t) - q(t)| \leq (|\lambda|^2 + 1)M$,

$$|y'(x)|^2 \leq |\lambda|^2 \cdot |y(a)|^2 + 2M(|\lambda|^2 + 1) \left| \int_a^x |y(t)| \cdot |y'(t)| dt \right|, \text{ оценивая интеграл}$$

по неравенству Коши – Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |y'(x)|^2 &\leq |\lambda|^2 |y(a)|^2 + \\ &+ 2M(|\lambda|^2 + 1) \left| \frac{1}{m} \left(\int_a^0 \rho(x) |y(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^0 |y'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right| \end{aligned}$$

Учитывая (3),

$$|y'(x)|^2 \leq |\lambda|^2 |y(a)|^2 + 2M \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) |\lambda|^2 \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\int_0^a |y'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Как показано в [11], если $\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$, то

$$\int_0^a |y'(x)|^2 dx = |\lambda|^2 \int_0^a \rho(x) |y(x)|^2 dx - \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx =$$

$$= |\lambda|^2 - \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx, \text{ и потому}$$

$$|y'(x)|^2 \leq |\lambda|^2 |y(a)|^2 + \frac{2M}{m} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2}\right) |\lambda|^2 (|\lambda|^2 - \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= |\lambda|^2 \left[|y(a)|^2 + \frac{2M}{m} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) |\lambda| \left(1 - \frac{\int_0^a q(x)|y(x)|^2 dx}{|\lambda|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

В работе [12] установлено, что $|y(a)|^2 = u^2(a) = -2\sigma$ (где $u(x) = |y(x)|$, $\sigma = \text{Im}(\lambda)$), следовательно, $|y(a)|^2 = -2 \cdot \text{Im}(\lambda) < 2|\lambda|$. Отсюда

$$|y'(x)|^2 \leq |\lambda|^2 \left[2|\lambda| + \frac{2M}{m} \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) |\lambda| \left(1 - \frac{\int_0^a q(x)|y(x)|^2 dx}{|\lambda|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

и потому

$$|y'_n(x)|^2 \leq |\lambda_n|^3 \left[2 + 2 \frac{M}{m} \left(1 + \frac{1}{|\lambda_n|^2} \right) \left(1 - \frac{\int_0^a q(x)|y_n(x)|^2 dx}{|\lambda_n|^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right].$$

Следовательно, в случае $\lambda + \bar{\lambda} \neq 0$ первое неравенство справедливо.

Пусть теперь $\lambda + \bar{\lambda} = 0$, то есть $\lambda = it$ чисто мнимое число. Тогда, как было показано в [11], имеет место равенство

$$\int_0^a |y'(x)|^2 dx = |\lambda| |y(a)|^2 - \int_0^a q(x) |y(x)|^2 dx + |\lambda|^2 \int_0^a \rho(x) |y(x)|^2 dx.$$

Отсюда $\int_0^a |y'(x)|^2 dx = |\lambda| |y(a)|^2$, и потому

$|y'(x)|^2 < |\lambda|^2 |y(a)|^2 + 2M \left(1 + \frac{1}{|\lambda|^2} \right) |\lambda|^2 \frac{1}{m} (|\lambda| \cdot |y(a)|^2)^{\frac{1}{2}}$, а так как $|y(a)|^2 < 2|\lambda|$, то имеем

$$\begin{aligned} |y'_n(x)|^2 &\leq |\lambda_n|^2 \cdot 2 \cdot |\lambda_n| + 2 \frac{M}{m} \left(1 + \frac{1}{|\lambda_n|^2} \right) |\lambda_n|^2 \cdot (|\lambda_n| \cdot 2 \cdot |\lambda_n|)^{\frac{1}{2}} = \\ &= |\lambda_n|^3 \left[2 + 2 \frac{M}{m} \left(1 + \frac{1}{|\lambda_n|^2} \right) 2^{\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

Тем самым $\|y'_n(x)\|_{C[0,a]} < C_1 |\lambda|^{\frac{3}{2}}$ в любом случае.

Литература

1. Коган Б.Л. О двукратной полноте системы собственных и присоединенных функций задачи Редже // Функциональный анализ и его приложения. – 1971. – Т. 5, вып. 3. – С. 70–74.
2. Ведин О.И., Пак И.Н. Асимптотика собственных чисел и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля в общем виде // Инновационная наука. – 2020. – № 10. – С. 6–11.
3. Савчук А.М., Шкаликов А.А. Асимптотический анализ решений обыкновенных дифференциальных уравнений с коэффициентами-распределениями // Математический сборник. – 2020. – Т. 211, № 11. – С. 129–166.
4. Shkalikov A.A. Spectral analysis of the Regge Problem // Russ. J. Math. Phys. – 2001. – V. 8, № 3. – P. 356–364.
5. Shkalikov A.A. Spectral analysis of the Regge Problem // J. Math. Sci. (N. Y.) – 2007. – V. 144, № 4. – P. 4292–4300.
6. Айгунов Г.А., Гаджиева Т.Ю. Об оценке нормированных собственных функций задачи типа Т. Редже в случае гладких коэффициентов // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения. – Махачкала, 2009. – С. 18–26.
7. Айгунов Г.А., Гаджиева Т.Ю., Джалаева Г.А. О поведении собственных функций задачи типа Редже в нерегулярном случае // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2013. – Вып. 6. – С. 104–106.
8. Айгунов Г.А., Жвамер Карван Х. Асимптотическое поведение ортонормированных собственных функций задачи типа Т. Редже с суммируемой положительной весовой функцией // УМН. – 2009. – Т. 64, № 6. – С. 169–170.

9. Айгунов Г.А., Жвамер Карван Х. О возможной скорости роста нормированных собственных функций задачи Т. Редже в случае суммируемой и непрерывной весовых функций // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2010. – № 2. – С. 8–12.

10. Айгунов Г.А., Жвамер Карван Х., Джалаева Г.А. Оценки собственных функций задачи Редже // Математические заметки. – Т. 92, вып. 1. – 2012. – С. 141–144.

11. Жвамер Карван Х. Изучение спектральных характеристик одной несамосопряженной задачи с негладкими коэффициентами: дис. ... к. ф.-м. н. – Ростов н/Д, 2010. – 115 с.

Поступила в редакцию 18 сентября 2021 г.

UDC 517.43

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-90–93

Some Upper Bounds for the Eigenfunctions of the Regge Type Problem

Aigunov G.A., Gadzhieva T.U., Djalaeva G.A.

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; nizam_zagirov@mail.ru, tamila.usup@mail.ru

The article is devoted to questions of behavior of eigenfunctions of one non-self-adjoint problem. The problems of the asymptotic behavior of the eigenvalues, the properties of completeness and basis property of the eigenfunctions of the Regge problem were studied in many works.

The question of the growth of the norms of the eigenvalues of this problem has also been previously considered. For summable weights, it was established in these papers that the maxima of the eigenfunctions can grow no more slowly on some subsequence of the eigenfunctions. The purpose of this work is to study the upper bound for the norms of the derivatives of the eigenfunctions of the problem. The main result of the work is presented in the form of a proof of the theorem asserting that for all eigenvalues and corresponding eigenfunctions of one non-self-adjoint problem there are positive constants that do not depend on the summable functions from the problem under consideration allowing to give estimates for the norms of the derivatives (the first and the second).

Keywords: regular, irregular, boundary, spectral parameter, eigen functions, eigen values.

Received 18 September 2021