УДК 517.929

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-83–89

И.С. Эмирова

Оценка характеристического показателя решения уравнения n-го порядка с отклонением аргумента в гильбертовом пространстве

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; emirova.irina@mail.ru

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом находят много приложений. В частности, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, которые описывают процессы с последействием, используются при расчетах: горения ракетного топлива, в автоколебательных системах, в ряде биофизических, экономических задач и многих других. Наличие запаздывания в определенной системе приводит к появлению факторов, влияющих на ход процессов. В последнее время появились исследования, в которых анализируются операторно-дифференциальные уравнения в разных пространствах, в частности в гильбертовом.

В статье рассматривается функционально-дифференциальное уравнение n-го порядка с неограниченными линейными операторными коэффициентами с отклонением аргумента с начальными условиями в гильбертовом пространстве.

В качестве метода исследования выбран метод поиска преобразований, который сводит рассматриваемую проблему к ранее изученной.

Доказана теорема, в которой получены условия на резольвентный оператор, операторные коэффициенты, отклонения аргумента, позволяющие оценить характеристический показатель решения функционально-дифференциального уравнения n-го порядка с отклонением аргумента в гильбертовом пространстве. Дана интегральная оценка характеристического показателя решения рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: *функционально-дифференциальный, отклонение аргумента, гильбертово пространство, операторные коэффициенты, резольвента, норма, характеристический показатель.*

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом находят много приложений. Например, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, которые описывают процессы с последействием, используют при расчетах: горения ракетного топлива, в автоколебательных системах, в ряде биофизических, экономических задач и многих других. Наличие запаздывания в определенной системе приводит к появлению факторов, влияющих на ход процессов. В последние десятилетия появились исследования, в которых рассматривается разрешимость функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами [1–4], разрешимость функционально-дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные [5; 6], разрешимость ФДУ с сосредоточенными и распределенными запаздываниями [7], исследуется асимптотика решений с отклонениями степенного убывания [8], даются оценки решений ФДУ [9] в разных пространствах, в частности в гильбертовом [10; 11].

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение n-го порядка

$$L_0 u(t) \equiv D_t^n u(t) + \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\gamma\mu}(t) S_{h_{\gamma\mu}}(t) D_t^{\gamma} u(t) = f(t), \tag{1}$$

где $A_{\gamma\mu}(t)$, $\gamma = \overline{0, n-1}$, $\mu = \overline{0, m}$ – неограниченные линейные операторные коэффициенты, их область определения принадлежит X, а область значений принадлежит Y. X, Y – гильбертовы пространства, причем $X \subset Y$, $\|\cdot\|_X \geq \|\cdot\|_Y$, $D_t^0 = E$ – тождественный оператор, тогда $D_t^{\gamma} \equiv \frac{1}{i^{\gamma}} \cdot \frac{d^{\gamma}}{dt^{\gamma}}$, $\gamma = \overline{1, n-1}$, i – мнимая единица, $S_{h_{\gamma\mu}}(t) = u(t - h_{\gamma\mu}(t))$, $\gamma = \overline{0, n-1}$, $\mu = \overline{0, n}$, $h_{\gamma\mu}(t)$ – отклонение аргумента на полуоси $t > t_0 > -\infty$.

Оператор $R_0(\lambda, t) \equiv \left(\lambda^n E - \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\gamma\mu}(t) \lambda^{\gamma} \exp(-i\lambda h_{\gamma\mu}(t)) \right)^{-1}$ является резольвентным для оператора L_0. Нахождение резольвенты для оператора L_0 изложено в [3].

Определим пространства $X^{n,\alpha}_{R_+^{t_0}}$ и $Y^{0,\alpha}_{R_+^{t_0}}$ с помощью норм [1]

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \exp(2\alpha t) \left(\sum_{\gamma=0}^{n-1} \left\| u^{(\gamma)}(t) \right\|_X^2 + \left\| u^{(n)}(t) \right\|_Y^2 \right) dt \right)^{1/2}, \ \alpha = const \in R \text{ и}$$

$$\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \exp(2\alpha t) \|u(t)\|_Y^2 \, dt \right)^{1/2} \text{ соответственно.}$$

Пространство $L^2(R_+^{t_0}, X)$ определяется нормой $\|u(t)\| = \left(\int_{t_0}^{+\infty} \|u(t)\|_X^2 \, dt \right)^{1/2}$.

Через $£_0(X, Y)$ и $£_{\infty}(X, Y)$ обозначено множество линейных ограниченных (замкнутых) и вполне непрерывных операторов из X в Y соответственно. $\chi_A(\varepsilon(t))$ – характеристическая функция $\varepsilon(t)$.

Лемма. Если $u^{(\gamma)}(t)$, $u^{(\gamma+1)}(t) \in L_2(R_+^{t_0}, Y)$, то существует $\lim\limits_{t \to \infty} u^{(\gamma)}(t) = 0$, $\gamma = \overline{0, n-1}$.

Доказательство. Доказательство от противного. Если такой предел не существует, то существует последовательность $\{t_m^{\gamma}\} \to \infty$ такая, что $\left\| u^{(\gamma)}(t_m^{\gamma}) \right\|_Y \geq \alpha_{\gamma} > 0$, $\gamma = \overline{0, n-1}$. В δ_{γ} – окрестности точки t_m^{γ} из равенства

$$u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma+\delta_\gamma\right)-u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma\right)=\int_0^{\delta_\gamma}u^{(\gamma+1)}\left(t_m^\gamma+s\right)ds$$

вытекает

$$\left\|u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma+\delta_\gamma\right)-u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma\right)\right\|_Y=\int_0^{\delta_\gamma}\left\|u^{(\gamma+1)}\left(t_m^\gamma+s\right)\right\|_Y ds\le\le\left(\delta_\gamma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{\delta_\gamma}\left\|u^{(\gamma+1)}\left(t_m^\gamma+s\right)\right\|_Y^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\delta_\gamma\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{t_m^\gamma}^{t_m^\gamma+\delta_\gamma}\left\|u^{(\gamma+1)}(t)\right\|_Y^2 ds\le\right)^{\frac{1}{2}}\le c\left(\delta_\gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\left\|u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma+\delta_\gamma\right)\right\|_Y=$$

$$\left\|u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma\right)+u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma+\delta_\gamma\right)-u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma\right)\right\|_Y\ge\left\|u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma\right)\right\|_Y-\left\|u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma+\delta_\gamma\right)-u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma\right)\right\|_Y\ge$$

$$\ge\alpha_\gamma-c\left(\delta_\gamma\right)^{\frac{1}{2}}.$$

То есть $\left\|u^{(\gamma)}(t)\right\|_Y\ge\dfrac{\alpha_\gamma}{2}$, если $t_m^\gamma\to\infty$, что противоречит условию.

Если такой предел не существует, то найдутся последовательности $\left\{t_m^\gamma\right\}\to\infty$ и $\left\{\overline{t}_m^\gamma\right\}\to\infty$ такие, что $\lim\limits_{m\to\infty}u^{(\gamma)}\left(t_m^\gamma\right)=u_0^\gamma$, $\lim\limits_{m\to\infty}u^{(\gamma)}\left(\overline{t}_m^\gamma\right)=\overline{u}_0^\gamma$. Аналогично получим, что $u_0^\gamma=\overline{u}_0^\gamma$. Лемма доказана.

Теорема. Пусть выполнены условия:

а) $A_{\gamma\mu}(t)\in£_0(Y,Y)\cap£_\infty(X,Y)$ для $\forall\, t\in R$ $A_{\gamma\mu}(t):Y\to Y$ – замкнутые, $\mu\ge1$, $\gamma=\overline{0,n-1}$; $A_{\gamma\mu}(t):X\to Y$ – сильно равномерно непрерывные, существуют сильные производные

$$\frac{dA_{\gamma\mu}(t)}{dt},\ t\ge t_0,\ \sup_{t\ge t_0}\left\|\frac{dA_{\gamma\mu}(t)}{dt}\right\|_Y\le\delta,\ \delta>0,\ \mu,\gamma=\overline{0,n-1};$$

б) резольвентные операторы $R_0(\lambda,t)\equiv\left(\lambda^n E-\sum\limits_{\gamma=0}^{n-1}\sum\limits_{\mu=0}^{m}A_{\gamma\mu}(t)\lambda^\gamma\exp\left(-i\lambda h_{\gamma\mu}(t)\right)\right)^{-1}$ регулярны при $\operatorname{Im}\lambda<a<\infty$, $t\ge t_0$;

в) существуют постоянные c_0, C_0 и $p>0$, причем $p\in Z$, что для $\forall t\ge t_0$ и $\operatorname{Im}\lambda=\alpha<a$ выполняется неравенство

$$\sum_{\gamma=0}^{n-1}\left\|\lambda^\gamma R_0(\lambda,t)\right\|_X+\left\|\lambda^n R_0(\lambda,t)\right\|_X\le c_0h^{-p}+C_0,\quad h=a-\alpha;$$

г) $f(t) \in Y^{0,\alpha}_{R_+^{t_0}}$;

д) $h_{\gamma\mu}(t) \in HR_+^{t_0}$, $0 \le h_{\gamma\mu}(t) \le h^0$, $h_{\gamma\mu}(t)$ – равномерно непрерывны в $R_+^{t_0}$, $\mu \ge 1$, $\gamma = \overline{0, n-1}$.

Тогда для характеристического показателя $\chi(u(t))$ решения $u(t)$ уравнения (1) справедлива оценка

$$\chi(u(t)) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \sum_{\gamma=0}^{n-1} \left\| u^{(\gamma)}(t) \right\|_Y < -a + C_\delta(\varepsilon)\delta^{\frac{1}{1+p}-\varepsilon}, \ t > 0.$$

Доказательство. Из уравнения (1)

$$D_t^n u(t) = f(t) - \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\gamma\mu}(t) S_{h_{\gamma\mu}}(t) D_t^\gamma u(t).$$

Тогда для $b = a - C_\delta(\varepsilon)\delta^{\frac{1}{1+p}-\varepsilon}$

$$\left(\left\| u^{(n)}(t) \right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}} \right)^2 \le \left(\left\| f(t) + \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m} A_{\gamma\mu}(t) S_{h_{\gamma\mu}(t)} D_t^\gamma u(t) \right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}} \right)^2 \le$$

$$\le 2\left(\left\| f(t) \right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}} \right)^2 + 2n(m+1) \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m} \left(\left\| A_{\gamma\mu}(t) S_{h_{\gamma\mu}(t)} D_t^\gamma u(t) \right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}} \right)^2 \le$$

$$\le 2\left(\left\| f(t) \right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}} \right)^2 + 2n(m+1) \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m} \int_{t_0}^{+\infty} \exp(2bt) \left\| A_{\gamma\mu} \right\|_Y^2 \cdot \left(\left\| u^{(\gamma)}(t - h_{\gamma\mu}(t)) \right\|_X^2 \right) dt \le$$

$$\le 2\left(\left\| f(t) \right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}} \right)^2 + \frac{2n(m+1)}{1-r} \sup_{t \ge t_0} \left\| A_{\gamma\mu}(t) \right\|_Y^2 \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m} \int_{t_0 - h_{\gamma\mu}(t)}^{+\infty} \exp\left[2b(t + h_{\gamma\mu}(t))\right] \times$$

$$\times \exp(2bh_{\gamma\mu}(t)) \left\| u^{(\gamma)}(t) \right\|_X^2 \le 2\left(\left\| f(t) \right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}} \right)^2 +$$

$$+ \frac{2n(m+1)}{1-r} \sup_{t \ge t_0} \left\| A_{\gamma\mu}(t) \right\|_Y^2 \sum_{\gamma=0}^{n-1} \sum_{\mu=0}^{m} \exp(2bh^0) \times$$

$$\times \left(\int_{t_0 - h_{\gamma\mu}(t_0)}^{t_0} \exp(2bt) \left\| g_\gamma(t) \right\|_X^2 dt + \int_{t_0}^{+\infty} \exp(2bt) \left\| u^{(\gamma)}(t) \right\|_X^2 dt \right) \le$$

$$\le C\left\{ \left(\left\| f(t) \right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}} \right)^2 + \exp(2|b|h^0) \left[\sum_{\gamma=0}^{n-1} \left\| \exp(bt) u^{(\gamma)}(t) \right\|^2_{L^2(R_+^{t_0}, X)} \right. \right. +$$

$$+\sum_{\gamma=0}^{n-1}\left\|\exp(bt)g_\gamma(t)\right\|^2_{L^2\left(\left(t_0-h^0,t_0\right),X\right)}\Bigg]\Bigg\}, \qquad (2)$$

где $C=c\left(m,\sup\limits_{t\geq t_0}\left\|A_{\gamma\mu}(t)\right\|_Y\right)$.

Для решения $u(t)=\sum\limits_{\gamma=0}^{\infty}u_\gamma(t)$ уравнения (1) [3] получим оценку

$$\left\|\exp(bt)u(t)\right\|^2_{L^2\left(R_+^{t_0},X\right)}=\left\|\exp(bt)L_0^{-1}\sum_{\gamma=0}^{\infty}f_\gamma(t)\right\|^2_{L^2\left(R_+^{t_0},X\right)}\leq$$

$$\leq C_0\left(\left\|\sum_{\gamma=0}^{\infty}f_\gamma(t)\right\|^{0,b}_{R_+^t}\right)^2=C_0\left(\left\|f(t)\right\|^{0,b}_{R_+^t}\right)^2.$$

На $\operatorname{Im}\lambda=b<a$ выполняются условия теоремы [3]. Тогда из (2) следует оценка

$$\left\|\exp(bt)u^{(\gamma)}(t)\right\|^2_{L^2\left(R_+^{t_0},X\right)}=\left\|\exp(bt)\sum_{\gamma=0}^{\infty}u'_\gamma(t)\right\|^2_{L^2\left(R_+^{t_0},X\right)}\leq$$

$$\leq C_0\left\|\exp(bt)\sum_{\gamma=0}^{\infty}f_\gamma(t)\right\|^2_{L^2\left(R_+^{t_0},X\right)}=C_0\left(\left\|f(t)\right\|^{0,b}_{R_+^t}\right)^2$$

или

$$\left\|\exp(bt)u(t)\right\|^2_{L^2\left(R_+^{t_0},X\right)}+\left\|\exp(bt)u^{(\gamma)}(t)\right\|^2_{L^2\left(R_+^{t_0},X\right)}\leq C_0\left(\left\|f(t)\right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}}\right)^2. \qquad (3)$$

Из (2) и (3) следует

$$\left(\left\|u^{(n)}(t)\right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}}\right)^2\leq C_1\left\{\left(\left\|f(t)\right\|^{0,b}_{R_+^{t_0}}\right)^2+\sum_{\gamma=0}^{n-1}\left\|\exp(bt)g_\gamma(t)\right\|^2_{L^2\left(\left(t_0-h^0,t_0\right),X\right)}\right\}. \qquad (4)$$

Из (2) и (4) получим

$$\left(\left\|u(t)\right\|^{n,a-C_\delta(\varepsilon)\delta^{\frac{1}{1+p}-\varepsilon}}_{R_+^{t_0}}\right)^2\leq C_2\left\{\left(\left\|f(t)\right\|^{0,a}_{R_+^{t_0}}\right)^2+\sum_{\gamma=0}^{n-1}\left\|\exp(at)g_\gamma(t)\right\|^2_{L^2\left(\left(t_0-h^0,t_0\right),X\right)}\right\}.$$

Оттуда в силу доказанной выше леммы следует

$$\left\|u^{(\gamma)}(t)\right\|_{\mathrm{Y}}\leq C\exp\left\{-\left(a-C_\delta(\varepsilon)\delta^{\frac{1}{1+p}-\varepsilon}\right)t\right\},\qquad t>t_0,$$

$$\text{где}\quad \left\|u^{(\gamma)}(t)\right\|_{Y} \le C\exp\left\{-\left(a - C_{\delta}(\varepsilon)\delta^{\frac{1}{1+p}-\varepsilon}\right)t\right\}, \qquad t > t_0, \tag{5}$$

где $C = const$, зависящая от $f(t),\ g_{\gamma}(t),\ \gamma = \overline{0, n-1}$.

Разделив (5) на *C*, прологарифмируем и поделим обе части полученного неравенства на $t > 0$. Получаем оценку

$$\frac{1}{t}\ln\left[\sum_{\gamma=0}^{n-1}\left\|u^{(\gamma)}(t)\right\|_{Y}\right] - \frac{1}{t}\ln C \le -a + C_{\delta}(\varepsilon)\delta^{\frac{1}{1+p}-\varepsilon}, \qquad t > 0,$$

из которой вытекает утверждение теоремы.

Литература

1. *Алиев Р.Г.* О разрешимости функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2003. – Вып. 1. – С. 31–36.

2. *Власов В.В., Раутиан Н.А.* Исследование функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Доклады Академии наук. – 2017. – Т. 477, № 6. – С. 641–645.

3. *Эмирова И.С.* Об однозначной разрешимости функционально-дифференциальных уравнений n-го порядка // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2012. – Вып. 6. – С. 106–109.

4. *Акылжанов Р.Х., Власов В.В.* Корректная разрешимость функционально-дифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами // Диф. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 9. – С. 1175–1186.

5. *Алиев Р.Г.* О разрешимости функционально-дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих дробные производные // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2011. – Вып. 1. – С. 211–230.

6. *Алиев Р.Г., Эмирова И.С.* О конечномерности ядра оператора, порождаемого функционально-дифференциальными уравнениями, содержащими производные дробного порядка // Изв. вузов: Сев.-Кав. региона. – 2011. – № 3. – С. 5–9.

7. *Алиев Р.Г.* О разрешимости функционально-дифференциального уравнения второго порядка с сосредоточенными и распределенными запаздываниями в гильбертовом пространстве // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2012. – Вып. 6. – С. 147–154.

8. *Алиев Р.Г.* Асимптотика решений функционально-дифференциальных уравнений с коэффициентами и отклонениями аргумента степенного убывания // Вестник Дагестанского государственного университета. – 2010. – Вып. 1. – С. 26–36.

9. *Власов В.В., Медведев Д.А.* Об оценках решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 6. – Казань: Изд-во Казанского университета. – С. 21–29.

10. *Эмирова И.С.* Об оценках решений начальной задачи для функционально-дифференциального уравнения n-го порядка в гильбертовом пространстве // Вестник Дагестанского государственного университета. – 1998. – Вып. 2. – С. 106–109.

11. *Власов В.В.* Корректная разрешимость вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Доклады Академии наук. – 2016. – Т. 52, № 6. – С. 641–645.

Поступила в редакцию 5 августа 2021 г.

UDC 517.929

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-4-83–89

Estimation of Characteristic Exponent of the Solution of the N-Order Equation in the Argument Deviation in Hilbert Space

I.S. Emirova

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, Gadzhiev st., 43a; emirova.irina@mail.ru

Differential equations with deviating argument find a lot of applications. In particular, differential equations with a delayed argument which describes processes with after-effect have a great amount of applications: burning of rocket fuel, in auto-oscillation system, in a set of biophysical problems, economic problems and many others. The presence of delay in a definite system leads to the emergence of factors, influencing the pace of processes. Lately investigations appeared in which operationally differential equations in various spaces, particularly in the Hilbert one are considered.

Functional differential equations of the n-th order with unlimited linear operational coefficients with argument deviation with initial conditions in the Hilbert space is considered.

Method of transformations search, which reduces the problem under consideration to the previously studied one, is chosen as a research method.

The theorem, in which conditions on resolvent operator, operational coefficients, argument deviations, allowing to value the characteristic exponent of the solution of the functional-differential equation of the n-order with the argument deviation in the Hilbert space has been proved. Integral evaluation of the characteristic exponent of the considered solution has been made.

Keywords: *functional-differential equation, argument deviation, Hilbert space, operator coefficients, resolvent, norm, characteristic exponent.*

Received 5 August 2021