УДК 517.927

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-3-73–78

***С.В. Исраилов*[1]*, И.А. Танкиев*[2]**

Об одной сингулярной краевой задаче для счётных систем ОДУ

[1] Чеченский государственный университет; Россия, 364024, г. Грозный, ул. А. Шерипова, 32;

[2] Ингушский государственный университет; Россия, 386001, г. Магас, пр. И.Б. Зязикова, 7; tank551711@yandex.ru

В статье отмечено, что в теории краевых задач сингулярные краевые задачи для счетных систем обыкновенных дифференциальных уравнений почти не изучены. Идея исследования таких краевых задач для конечных систем и при изучении задач Коши и Коши–Николетти для счетных систем позволяет глубже раскрыть анатомию воздействия многоточечной сингулярности на многие аспекты качественной теории решений соответствующих краевых задач для счетных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В статье рассматривается специальная краевая задача для счётных систем ОДУ с сингулярностями. При выполнении ряда условий относительно функций, присутствующих в ней, исходная задача заменяется системой интегральных уравнений специального вида. Сформулирована теорема существования по крайней мере одного решения исходной задачи.

Ключевые слова: *счётная система, точки сингулярности, функциональные условия, краевая задача, интегральная система, теорема существования.*

Рассматривается бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$y_i'(x) = f_i(x, y_1, y_2, \dots,) \; (i = 1, 2, \dots) \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$y_i(x_{k,i}) = 0 \; (i = 1, 2, \dots; k = \overline{1, m}) \tag{2}$$

$$y_i(x^*_{k,i}) = d_i, |d_i| \le \frac{a_i}{3},$$
$$(i = 1, 2, \dots; k = \overline{1, m}),$$

где $x^*_{k,i} \in (x_{k,i}, x_{k+1,i})$ $\left(k = \overline{1, m-1},\ x^*_{0,i} = x_{0,i} = a, x^*_{m,i} = x_{m+1,i} = b\right)$.

$$\int_a^b [dH(x)]\bar{y}(x) = \int_a^b \bar{F}(x; \bar{y}(x))dx, \tag{3}$$

где

$$\bar{y}(x) = (y_i(x))_{i=1}^{\infty}, \bar{F}(x; \bar{y}(x)) = \left(F_i(x; \bar{y}(x))\right)_{i=1}^{\infty},$$

$$\int_a^b [dH(x)]\bar{y}(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b y_k(x)\, dh_{i,k}(x)\right)_{i=1}^{\infty},$$

$H(x) = \left(h_{i,k}(x)\right)_{i=1}^{\infty}$ — бесконечная матрица ограниченной вариации на $[a,b]$, и интегралы понимаются в смысле Римана–Лебега–Стилтьеса. Для задачи (1–3) сформулирована теорема о существовании по крайней мере одного решения, которая доказывается применением метода ступенчатых операторов.

Функции $f_i(x,\ y_1,\ y_2,\dots,)$ $(i = 1,2,\dots)$ определены в области

$$D_f^{\infty}: \{x \in ([a,b] - \sigma_i), |y_i| \le a_i\},$$

$$\sigma_i = \{x_{1,i},\ x_{2,i},\dots,\qquad x_{m,i}\},$$

$$-\infty < a < x_{1,i} < x_{2,i} < \cdots < x_{m,i} < b < +\infty\ (i = 1,2,\dots),$$

а функции $F_i(x,\ y_1,\ y_2,\dots,)$ – в области

$$D_F^{\infty}: \{x \in [a,b], |y_i| \le a_i\},\qquad (i = 1,2,\dots).$$

Следовательно, при фиксированном i для функции $f_i(x,\ \bar{y}), \bar{y} = (y_1,\ y_2,\dots)$ точки $x_{k,\ i}$ $(k = \overline{1,m}, i = 1,\ 2,\dots)$ являются точками сингулярности.

Функции $f_i(x,\bar{y})$ и $F_i(x,\ \bar{y})$, $(i = 1,2,\dots)$ будем считать непрерывными в соответствующих областях D_f^{∞} и D_F^{∞} по совокупности переменных $(x,\bar{y})$ $[1;2]$.

Нас будут интересовать непрерывное и ограниченное решения из $C_{\infty}(a,b)$ $[1\text{–}4]$, удовлетворяющие системе (1) при $x \ne x_{k,i}$ $(i = 1,2,\dots;\ k = \overline{1,m})$ и условиям (2), (3).

Пусть выполнены следующие неравенства в области D_f^{∞}

$$|\mathcal{F}_i(x,y_1,y_2,\dots)| \le \psi_i^{(1)}(x)\ \ (i = 1,2,\dots), \tag{4}$$

где $\psi_i^{(1)}(x)$ — непрерывные или суммируемые функции на $[a,b]$.

Будем считать, что бесконечные числовые матрицы

$$A_k = \left(h_{j,i}(x_{k+1,i}) - h_{j,i}(x_{k,i})\right)_{j,i=1}^{\infty} = \left(a_{j,i}^{(k)} + \delta_{j,i}\right)_{j,i=1}^{\infty}$$

$$A_k^w = \left(\int_{x_{k,i}}^{x_{k+1,i}} e^{\int_{x_{k,i}^*}^{x} W_i(s)ds} dh_{j,i}(x)\right)_{j,i=1}^{\infty} = \left(b_{j,i}^{(k)} + \delta_{j,i}\right)_{j,i=1}^{\infty},$$

где $\delta_{j,i}$ — символ Кронекера, $W_i(x)$ — некоторые функции, $x_{k,i}$ $(k = 1,\ 2,\dots m)$ — точки сингулярности функции $f_i(x,\bar{y})$ при фиксированном i, $x_{k,i}^* \in [x_{k,i}, x_{k+1,i}]$ $(k = 0,1,2,\dots m;\ x_{0,i}^* = x_{0,i} = a,\ x_{m,i}^* = x_{m+1,i} = b)$, удовлетворяют соответственно условиям [5–10].

$$\sum_{j,i=1}^{\infty}\left|a_{i,j}^{(k)}\right| < +\infty,\qquad detA_k \ne 0,\qquad (k = 0,1,2,\dots m) \tag{*}$$

$$\textstyle\sum_{j,i=1}^{\infty}\left|b_{j,i}^{(k)}\right| < +\infty,\ detA_k^w \ne 0,\ (k = 0,1,2,\dots\ m).$$

Пусть также выполнены условия

$$\chi_i(x_{k,i}) = 0,\qquad |\chi_i(x)| \le \frac{a_i}{3}\ (k = \overline{1,m}, i = 1,2,\dots), \tag{5}$$

где $\chi_i(x) \in C_{\infty}'(a,b)$, и функции $f_i(x,\ y_1,\ y_2,\dots y_{i-1}(t),\ \chi_i(x),\ y_{i+1},\dots)$ в области D_f^{∞} удовлетворяют условиям

$$|f_i(x,\ y_1,\qquad y_2,\dots y_{i-1}(t),\qquad \chi_i(x),\ y_{i+1},\dots)| \le \psi_i^{(0)}(x), \tag{6}$$

где $\psi_i^{(0)}(x), (i = 1,\ 2,\ \dots)$ – непрерывные или суммируемые функции на $[a,b]$.

$$f'_{i,y_i}(x,y_1,y_2,\dots) \ge \begin{cases} \bar{\psi}_{k,i}, & x_{k,i} < x < x_{k,i}^*, \\ -\bar{\psi}_{k,i}, & x_{k,i}^* < x < x_{k+1,i} \end{cases}, \tag{7}$$

где $\psi_i^{(0)}(x) \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ – суммируемые функции на $[x_1, x_2]$, $\psi_i(x) \geq 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ – непрерывные и суммируемые функции на $(x_1, x^*]$, $\overline{\psi}_i(x) > 0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ – несуммируемые функции на $[x^*, x_2]$: при $x_1^* < x_2$

$$\int_{x_1^*}^{x^*} \bar{\psi}_i(t)dt < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

но

$$\int_{x_1}^{x_1^*} \bar{\psi}_i(t)dt = +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$\bar{\psi}_i(x) > 0$ $(i = 1,2, \dots, n)$ – несуммируемые функции на $[x_1, x^*]$: при $x_1 < x_1^*$

$$\int_{x_1^*}^{x^*} \bar{\psi}_i(t)dt < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, \quad n),$$

но

$$\int_{x_1^*}^{x^*} \bar{\psi}_i(t)dt < +\infty \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

$$f'_{i,y_i}(x, y_1, y_2, \dots) \leq \begin{cases} -\bar{\psi}_{0,\ i}(x), & a = x_{0,\ i} \leq x < x_{1,\ i}, \\ \psi_{m,\ i}(x), & x_{m,i} < x < x_{m,\ i}^* = b, \end{cases} \tag{8}$$

$$K_{5,i} = \max_{\nu} \left\{ \exp\left(\int_{x_{\nu,i}^*}^{x_{\nu+1,i}} \psi_{\nu,\ i}(t)dt \right), \exp\left(\int_{x_{m,i}}^{b} \psi_{m,\ i}(t)dt \right) \right\} \tag{9}$$

$$(i = 1, 2, \dots; \nu = 1, 2, \dots, m-1; k = 1, 2, \dots, m-1;\ j = 1, 2, 3, \dots, m);$$

$$\int_{x_{m,i}}^{b} \psi_{m,i}(t)dt \leq \frac{a_i}{3}, \max_{k,j} \left\{ \int_{x_{k,i}^*}^{x_{k+1,i}} \psi_i(t)dt, \int_{x_{j,i}}^{x_{j,i}^*} \psi_i(t)dt \right\} \leq$$

$$\leq \frac{2a_i}{3(K_{6,i} + 1)},$$

$$K_{6,i} = \max_{\nu} \left\{ \exp\left(\int_{x_{\nu,i}^*}^{x_{\nu+1,i}} \psi_{\nu,i}(t)dt \right) \right\}$$

$$(i = 1, 2, \dots, k = 0, 1, 2, \dots,$$
$$m-1;\ j = 1, 2, 3, \dots, m-1;\ \nu = 0, 1, 2, \dots, m-1);$$

$$\max_{j,k} \left\{ \int_{x_{j,i}}^{x_{j,i}^*} \psi_i(t)dt, \int_{x_{k,i}^*}^{x_{k+1,i}} \psi_i(t)dt \right\} \leq \frac{a_i}{3}, \int_{x_{m,i}}^{b} \psi_i(t)dt \leq \frac{a_i}{3K_{7,i}},$$

$$K_{7,i} = \exp\left(\int_{x_{m,i}}^{b} \psi_{m,i}(t)dt \right),$$

$$(i = 1,2,\ldots;\ j = 1,2,\ldots;\ m-1;\ k = 0,1,2,\ldots;\ m-1).$$

Теорема. Пусть функции $f_i(x,\bar{y})$, $f_{i,y_i}{}'(x,\bar{y})$ непрерывны по совокупности переменных $(x,\bar{y})$ в области D_f^{∞}, $\bar{\mathcal{F}}(x,\bar{y}) \in K_{\infty}(a,b)$ и выполнены условия (4–9). Пусть $H(x) = \left(h_{j,i}(x)\right)_{j,i=1}^{\infty}$ – матрица ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, функции $h_{j,\ i}(x)$ монотонно возрастают в строгом смысле на отрезках $[a,\ x_{1,i}]$ $(i = 1,2,\ldots)$ и матрица $A_0 = \left(a_{j,i}^{(0)} + \delta_{j,i}\right)_{j,i=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям (*) при $k = 0$.

Наконец, пусть числовые ряды

$$R_j^{(5)} = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_{j,\nu}\ (j = 1,2,\ldots)$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(R_j^{(5)} + \int_a^b \psi_j^{(1)}(t)dt\right)\ \left(\sup_j\left\{R_j^{(5)} + \int_a^b \psi_j^{(1)}(t)dt\right\} < +\infty\right),$$

где

$$R_{j,\nu}^{(5)} = \sum_{k=1}^{m-1}\left[K_{5,\nu}\int_{x_{k,\nu}^*}^{x_{k+1,\nu}} \psi_\nu(t)dt + \int_{x_{k,\nu}}^{x_{k,\nu}^*} \psi_\nu(t)dt\right]\bigvee_{x_{k,\nu}}^{x_{k+1,\nu}} h_{j,\nu}(x) +$$

$$+\bigvee_a^{x_{1,\nu}} h_{j,\nu}(x)\int_a^{x_{1,\nu}} \psi_\nu(t)dt + K_{5,\nu}\bigvee_{x_{m,\nu}}^{b} h_{j,\nu}(x)\int_{x_{m,\nu}}^{b} \psi_\nu(t)dt +$$

$$+\left|\bigvee_a^b æ_\nu(x)dh_{j,\nu}(x)\right|,\ \ (j,\nu = 1,2,\ldots)$$

сходятся и справедливы неравенства

$$\lambda_i^{(0)} = \sum_{j=1}^{\infty}\left|[detA_0]^{-1}A_{j,i}^{(0)}\right|\left(R_j^{(5)} + \int_a^b \psi_j^{(1)}(t)dt\right) \le \frac{a_i}{3}\ \ (i = 1,2,\ldots)$$

где $A_{j,i}^{(0)}$ – алгебраическое дополнение элементов i-того столбца бесконечной матрицы A_0.

Тогда задача (1–3) имеет по крайней мере одно решение.

Литература

1. *Тихонов А.Н.* Über unendliche Systeme von Differentialg leichungen // Математический сборник. – 1934. – Т. 41, вып. 4. – С. 551–560.

2. *Исраилов С.В., Танкиев И.А., Гачаев А.М.* Существование и единственность решения задачи Коши для бесконечной системы ОДУ специального вида // Вестник Академии наук Чеченской Республики. – 2018. – № 2 (39).

3. *Халилов З.И.* Решение задачи Коши для бесконечной системы // Труды института физики и математики АН АзССР. – 1952. – Т. 4, № 1. – С. 5–19.

4. *Исраилов С.В., Танкиев И.А.* Новые классы ОДУ, порождающие нетрадиционные краевые условия // Фундаментальные и прикладные проблемы мате-

матики и информатики: материалы XIII Международной конференции, приуроченной к 55-летию факультета математики и компьютерных наук (г. Махачкала, 16–20 сентября 2019 г.) – Махачкала, 2019. – С. 76–78.

5. *Исраилов С.В., Танкиев И.А.* Решение задачи Коши–Николетти для системы ОДУ с нулями в граничных точках сингулярностей // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы III Международной научной конференции (г. Майкоп, 15–20 октября 2019 г.). – Майкоп, 2019. – С. 69–71.

6. *Чечик В.А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Труды Московского мат. общества. – 1959. – Т. 8. – С. 155–198.

7. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1975. – С. 352.

8. *Жаутыков О.А.* Решение краевой задачи для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Украинский математический журнал. – 1960. – Т. 12, № 2. – С. 154–164.

9. *Исраилов С.В.* Специальные дифференциальные уравнения высших порядков с сильными сингулярностями по независимой переменной и особенностью по фазовой переменной // Осенние математические чтения в Адыгее: материалы III Международной научной конференции (г. Майкоп, 15–20 октября 2019 г.). – Майкоп, 2019. – С. 71–75.

10. *Исраилов С.В., Танкиев И.А.* Краевые задачи для дифференциально-алгебраических уравнений с двумя смесями // Вузовское образование и наука: материалы Всероссийской научно-практической конференции (г. Магас, 20 декабря 2019 г.). – Махачкала, 2019. – С. 157–163.

Поступила в редакцию 16 апреля 2021 г.

UDC 517.927

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-3-73–78

On a Singular Boundary Value Problem for Counting Systems of ODES

S.V. Israilov[1], I.A. Tankiev[2]

[1] Chechen State University; Russia, 364024, Grozny, A. Sheripov st., 32;
[2] Ingush State University; Russia, 386001, Magas, I.B. Zyazikov ave., 7; tank551711@yandex.ru

In the theory of boundary value problems, singular boundary value problems for countable systems of ordinary differential equations have not been fully studied. The idea of studying such boundary value problems, for finite systems, and in the study of Cauchy and Cauchy–Nicoletti problems for countable systems allows us to reveal more deeply the anatomy of the impact of a multipoint singularity on many aspects of the qualitative theory of solutions of the corresponding boundary value problems for countable systems of ordinary differential equations.

The paper deals with a special boundary value problem for countable ODE systems with singularities. When a number of conditions are met with respect to the functions present in it, the original problem is replaced by a system of integral equations of a special type. The existence of at least one solution to the original problem is formulated.

Keywords: *counting system, singularity points, functional conditions, boundary value problem, integral system, existence theorem.*

Received 16 April 2021