УДК 517.983.23

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-3-64–72

О.А. Тарасова

О дискретных эллиптических псевдодифференциальных уравнениях

Белгородский государственный национальный исследовательский университет; Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85; Tarasova_O@bsu.edu.ru

В статье рассматриваются дискретные аналоги псевдодифференциальных операторов и связанные с ними дискретные уравнения и краевые задачи в дискретном полупространстве с шагом h. Вводятся дискретные пространства Соболева–Слободецкого, в которых ограниченно действуют такие операторы и исследуется разрешимость уравнений с этими операторами. Картина разрешимости обусловлена специальным индексом периодической факторизации символа оператора и в некоторых случаях имеет место неединственность решения дискретного псевдодифференциального уравнения. Для выделения единственного решения требуется задание дополнительных условий. В работе рассматривается случай одного такого условия, которое задается сначала как дискретное условие Дирихле, а затем – как след общего дискретного псевдодифференциального оператора на дискретную гиперплоскость. В обоих случаях дано сравнение решений дискретной краевой задачи и ее континуального аналога в точках дискретного полупространства. Близость значений дискретного и континуального решений определяется зависимостью от шага h.

Ключевые слова: *псевдодифференциальный оператор, краевая задача, дискретное решение.*

Введение

Разработка приближенных методов для решения краевых задач эллиптических дифференциальных уравнений являлась предметом исследований многих авторов [1–4]. После постановки краевой задачи для дифференциальных уравнений в частных производных возникает необходимость в методах их решения. Поскольку найти точное решение для таких задач бывает крайне трудно, то широко используются численные и приближенные методы. По мере развития компьютерных технологий предпочтение отдается методам, которые легко реализуются компьютерами.

В математической литературе существует множество приближенных методов решения краевых задач [1–4]. Все авторы рассматривают априорно заданную краевую задачу и строят для нее определенные вычислительные схемы. Это приводит к конечной системе линейных алгебраических уравнений, и решение последней системы объявляется приближенным решением исходной задачи.

Удобнее сначала изучать дискретные объекты, а затем применять их свойства для изучения аппроксимации исходных непрерывных объектов. Основываясь на подходе Эскина, для эллиптических модельных псевдодифференциальных уравнений в полупространстве [5] была разработана соответствующая дискретная теория [6; 8]. Эта работа посвящена специальной аппроксимации непрерывного объекта дискретными.

2. Дискретные операторы и уравнения. Пусть $T^m = [-\pi,\pi]^m$, $h > 0$,

$\hbar = h^{-1}, \mathrm{A}_d(\xi), \xi \in R^m$ – периодическая суммируемая функция с кубом периодов $\hbar T^m$, $D \subset R^m$ – область. Введем псевдодифференциальный оператор

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = \sum_{\tilde{y} \in hZ^m} \int_{\hbar T^m} \mathrm{A}_d(\xi) \mathrm{e}^{i(\tilde{y}-\tilde{x})\cdot\xi} u_d(\tilde{y})\, \mathrm{d}\xi h^m, \qquad \tilde{x} \in D_d \equiv D \cap hZ^m,$$

который определяется для функций дискретной переменной $\tilde{x} \in \mathrm{h}Z^m$.

Рассмотрим дискретное уравнение

$$\mathrm{A}_d u_d = v_d \tag{1}$$

с символом $\mathrm{A}_d(\xi)$ порядка α [6] и условия его разрешимости.

Обозначим $\zeta^2 = h^{-2} \sum_{k=1}^{m} \left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}h\cdot\xi_k} - 1\right)^2$, $S(hZ^m)$ – дискретный аналог пространства Шварца $S(R^m)$ [5; 7], $\tilde{u}_d -$ дискретное преобразование Фурье функции u_d [6].

Определение. Пространство $H^s(hZ^m)$ является замыканием пространства $S(hZ^m)$ по норме

$$\|u_d\|_s = \left(\int_{\hbar T^m} (1 + |\zeta^2|)^s |\tilde{u}_d(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2}. \tag{*}$$

Рассмотрим случай

$$D = R_+^m = \{x \in R^m : x = (x_1, \dots, x_m),\ x_m > 0\}.$$

Уравнение (1) однозначно разрешимо в дискретном полупространстве $H^s(D_d)$ для произвольной правой части $v_d \in H_0^{s-\alpha}(D_d)$ при условии

$$|æ - s| < 1/2, \tag{2}$$

где æ $\in R$ – индекс периодической факторизации [6].

3. Разрешимость дискретного уравнения. Рассмотрим случай, когда условие (2) не выполняется. Разберем типичную краевую задачу. Воспользуемся результатом из [8] в простейшей форме.

Теорема 1. Пусть $æ - s = n + \delta$, $n \in N$, $|\delta| < 1/2$. Тогда образ Фурье ядра оператора A_d состоит из следующих функций:

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi) \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k(\xi') \hat{\zeta}_m^k,$$

где $\tilde{c}_k(\xi')$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ – произвольные функции из $H^{s_k}(hT^{m-1})$, $s_k = s - æ + k - 1/2$.

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_S \le a \sum_{k=0}^{n-1} [c_k]_{s_k},$$

где $[\cdot]_{s_k}$ – норма в $H^{s_k}(hT^{m-1})$ и a не зависит от h.

Дальше $A_d(\xi)$ будет определен следующим образом. Для непрерывного псевдодифференциального оператора с символом $A(\xi)$ берем его ограничение на куб $\hbar T^m$ и периодически продолжаем его на все R^m. Такой дискретный оператор мы будем трактовать как приближенный оператор для непрерывного оператора A. Для произвольной функции u обозначение $Q_h u$ имеет тот же смысл. Чтобы найти приближенное дискретное решение уравнения

$$(Au)(x) = \mathrm{v}(x), \qquad x \in D,$$

для $D = R^m$ используем следующую формулу:

$$u_d(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int\limits_{\hbar T^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} A^{-1}(\xi)\tilde{v}(\xi)\, d\xi, \tilde{x} \in hZ^m.$$

Следовательно, не нужно искать приближенное решение для конечной системы линейных алгебраических уравнений. Для нашего случая нужно применить любые кубатурные формулы для вычисления последнего интеграла и кубатурную формулу для вычисления преобразования Фурье $\tilde{v}(\xi)$. Для $v \in S(R^m)$ дискретное решение $u_d(\tilde{x})$ стремится к $u(\tilde{x})$ очень быстро при $h \to 0$ [9].

4. Дискретная краевая задача с условием Дирихле. Рассмотрим случай $æ - s = 1 + \delta,\ |\delta| < 1/2$. Согласно теореме 1 ядро оператора A_d включает только одну произвольную функцию, так что нам нужно только одно дополнительное условие.

Непрерывный аналог дискретной краевой задачи

$$(A_d u_d)(\tilde{x}) = 0,\ \tilde{x} \in D_d, \tag{3}$$

$$u_d(\tilde{\acute{x}}, 0) = g_d(\acute{x}), \tilde{\acute{x}} \in hZ^{m-1} \tag{4}$$

выглядит следующим образом:

$$(Au)(x) = 0,\ x \in R_+^m, \tag{5}$$

$$u(\acute{x}, 0) = g(\acute{x}),\ \acute{x} \in R^{m-1}, \tag{6}$$

где A – псевдодифференциальный оператор с символом $A(\xi)$, удовлетворяющим условию

$$c_1(1 + |\xi|)^\alpha \leq |A(\xi)| \leq c_2(1 + |\xi|)^\alpha.$$

Непрерывное решение строится следующим образом. Если индекс факторизации равен æ и $æ - s = 1 + \delta,\ |\delta| < 1/2$, то единственное решение задачи (5), (6) дается формулой

$$\tilde{u}(\xi) = b^{-1}(\xi')\tilde{g}(\xi')A_+^{-1}(\xi', \xi_m),$$

где $A_\pm(\xi', \xi_m)$ – элементы факторизации символа $A(\xi)$ [5],

$$b(\xi') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A_+^{-1}(\xi', \xi_m) d\xi_m.$$

Предполагаем, что $b(\xi') \neq 0, \forall \xi' \in R^{m-1}$, что представляет собой упрощенное условие Шапиро–Лопатинского [5].

Имеем следующее дискретное решение [10]:

$$\widetilde{u_d}(\xi) = b_d^{-1}(\xi')\widetilde{g_d}(\xi')A_{d,+}^{-1}(\xi', \xi_m),$$

$$b_d(\xi') = \int\limits_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} A_{d,+}^{-1}(\xi', \xi_m) d\xi_m,$$

в котором выбираем специальные приближения. $g_d = Q_h g$ и $A_{d,\pm}(\xi', \xi_m)$ выбираем как сужение $A_\pm(\xi', \xi_m)$ на $\hbar T^m$.

Периодический символ

$$A_d(\xi) = A_{d,+}(\xi', \xi_m)A_{d,-}(\xi', \xi_m)$$

удовлетворяет всем условиям периодической факторизации с одинаковым индексом æ. Более того, $\widetilde{g_d}(\xi')$ и $A_{d,+}(\xi', \xi_m)$ совпадают с $\tilde{g}(\xi')$ и $A_+(\xi', \xi_m)$ на $\hbar T^m$ соответственно.

Теорема 2. Пусть $æ > 1, s > m/2, g \in H^{s-\frac{1}{2}}(R^{m-1})$. Сравнение решений задач (3–4) и (5–6) дается оценкой

$$|u(\tilde{x}) - u_d(\tilde{x})| \leq c h^{æ-1}, \tilde{x} \in hZ^m$$

с постоянной c, не зависящей от h.

Доказательство. Сравним два интеграла
$$u(\tilde{x}) \ = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{R^m} \mathrm{e}^{i\tilde{x}\cdot\xi} b^{-1}(\acute{\xi})\tilde{g}(\acute{\xi})A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)\,\mathrm{d}\xi$$
и
$$u_d(\tilde{x}) \ = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{\hbar T^m} \mathrm{e}^{i\tilde{x}\cdot\xi} b_d^{-1}(\acute{\xi})\tilde{g}(\acute{\xi})A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)\,\mathrm{d}\xi \qquad (7)$$
для $\tilde{x}\in hZ^m$.

Таким образом, мы имеем
$$u(\tilde{x})-u_d(\tilde{x}) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\hbar T^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}(b^{-1}(\xi)-b_d^{-1}(\acute{\xi}))\tilde{g}(\acute{\xi})A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)\,\mathrm{d}\xi$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{R^m\setminus\hbar T^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} b^{-1}(\acute{\xi})\tilde{g}(\acute{\xi})A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)\,\mathrm{d}\xi,$$
так как функции $\tilde{g}$, $\tilde{g}_d$ и A_+, $A_{d,+}$ совпадают в $\hbar T^m$.

Оценим второй интеграл
$$\left|\int\limits_{R^m\setminus\hbar T^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi} b^{-1}(\acute{\xi})\tilde{g}(\acute{\xi})A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)\,\mathrm{d}\xi\right| \le const \int\limits_{R^m\setminus\hbar T^m} |\tilde{g}(\acute{\xi})||A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)|\,\mathrm{d}\xi \le$$
$$\le\ const \int\limits_{R^{m-1}\setminus\hbar T^{m-1}} |\tilde{g}(\acute{\xi})|\left(\int\limits_{-\infty}^{-\hbar\pi}+\int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty}\right)|A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)|\,\mathrm{d}\xi_m d\acute{\xi}.$$
Далее мы оцениваем
$$\left(\int\limits_{-\infty}^{-\hbar\pi}+\int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty}\right)|A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)|\,d\xi_m \le const\int\limits_{\hbar\pi}^{+\infty}\left(1+|\acute{\xi}|+|\xi_m|\right)^{-æ} d\xi_m \ =$$
$$= \frac{const}{æ-1}\left(1+|\acute{\xi}|+\hbar\pi\right)^{1-æ} \le ch^{æ-1}.$$
По неравенству Коши–Буняковского получим
$$\int_{R^{m-1}\setminus\hbar T^{m-1}}|\tilde{g}(\acute{\xi})|d\acute{\xi} \le \left(\int_{R^{m-1}\setminus\hbar T^{m-1}}|\tilde{g}(\acute{\xi})|^2(1+|\acute{\xi}|)^{2s-1}d\acute{\xi}\right)^{1/2}\left(\int_{R^{m-1}\setminus\hbar T^{m-1}}(1+|\acute{\xi}|)^{-2s+1}d\acute{\xi}\right)^{1/2}$$
Так как $g\in H^{s-1/2}(R^{m-1})$ [5], то первый интеграл меньше $[g]_{s-1/2}$ и второй стремится к нулю, если $s>m/2$.

Для первого интеграла используем оценку
$$|b^{-1}(\acute{\xi})-b_d{}^{-1}(\acute{\xi})| \le const\cdot h^{æ-1}[11].$$
Окончательно получим
$$\left|\frac{1}{(2\pi)^m}\int\limits_{\hbar T^m} e^{i\tilde{x}\cdot\xi}(b^{-1}(\xi)-b_d^{-1}(\acute{\xi}))\tilde{g}(\acute{\xi})A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)\,\mathrm{d}\xi\right|$$
$$\le const\cdot h^{æ-1}\int\limits_{\hbar T^m}|\tilde{g}(\acute{\xi})||A_+^{-1}(\acute{\xi},\xi_m)|\,\mathrm{d}\xi \le const\cdot h^{æ-1}$$

$$\int\limits_{\hbar T^{m-1}} \frac{|\tilde{g}(\xi)|}{(1+|\xi|)^{æ-1}} \mathrm{d}\xi.$$

Здесь использовано неравенство Коши–Буняковского.

5. Дискретная краевая задача с общим граничным условием. Для описания разрешимости краевой задачи (1) введем следующие обозначения:

$$\left(H_{\xi'}^{per}\tilde{u}_d\right)(\xi',\xi_m) = \frac{h}{2\pi\mathrm{i}} v.p. \int\limits_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \cot\frac{h(\xi_m-\eta_m)}{2}\tilde{u}_d(\xi',\eta_m)\,\mathrm{d}\eta_m ,$$

где

$$v.p.\int_{-\hbar\pi}^{\hbar\pi} \cot\tfrac{h(\xi_m-\eta_m)}{2}\tilde{u}_d(\xi',\eta_m)\,\mathrm{d}\eta_m=$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-\hbar\pi}^{\xi_m-\varepsilon}+\int_{\xi_m+\varepsilon}^{\hbar\pi}\right)\cot\tfrac{h(\xi_m-\eta_m)}{2}\tilde{u}_d(\xi',\eta_m)\,\mathrm{d}\eta_m.$$

Этот оператор порождает два проектора

$$P_{\xi'}^{per} = \frac{1}{2}\left(I+H_{\xi'}^{per}\right), \qquad Q_{\xi'}^{per} = \frac{1}{2}\left(I-H_{\xi'}^{per}\right),$$

которые позволяют сформулировать следующий результат.

Теорема 3. Пусть $æ - s = n+\delta,\ n\in N,\ |\delta|<1/2$. Тогда общее решение уравнения (1) в образах Фурье имеет следующий вид:

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)X_n(\xi)P_{\xi'}^{per}\left(X_n^{-1}(\xi)\tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv_d}(\xi)\right)+\tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)\sum_{k=0}^{n-1}\tilde{c}_k(\xi')\hat{\zeta}_m^k ,$$

где $X_n(\xi)$ – произвольный многочлен порядка *n* переменных $\hat{\zeta}_k = \hbar\left(\mathrm{e}^{-ih\xi_k}-1\right)$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяющий условию (*), $\tilde{c}_k(\xi'), j = 0,1,\dots,n-1$. Находятся произвольные функции из $H^{s_k}(hT^{m-1}), s_k = s-æ+k-1/2$.

Справедлива априорная оценка

$$\|u_d\|_s \le a\left(\|f\|_{s-\alpha}^{+}+\sum_{k=0}^{n-1}[c_k]_{s_k}\right),$$

где $[\cdot]_{s_k}$ обозначает норму в пространстве $H^{s_k}(hT^{m-1})$ и постоянная a не зависит от h.

Применим теорему 3 для простого случая *n* = 1. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{h}_d(\xi)+\tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)\tilde{c}_0(\xi'), \tag{8}$$

где обозначаем

$$\tilde{h}_d(\xi) = \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)X_1(\xi)P_{\xi'}^{per}\left(X_1^{-1}(\xi)\tilde{A}_{d,-}^{-1}(\xi)\widetilde{lv_d}(\xi)\right). \tag{9}$$

Построение общего решения для непрерывной краевой задачи было получено в [1]. Для нашего случая оно имеет вид:

$$\tilde{u}(\xi) = \tilde{h}(\xi)+\tilde{A}_{+}^{-1}(\xi)\tilde{C}_0(\xi'), \tag{10}$$
$$\tilde{h}(\xi) = \tilde{A}_{+}^{-1}(\xi)Y_1(\xi)P_{\xi'}\left(Y_1^{-1}(\xi)\tilde{A}_{-}^{-1}(\xi)\tilde{lf}(\xi)\right), \tag{11}$$

где $P_{\xi'} = 1/2\left(I+H_{\xi'}\right)$ и $H_{\xi'}$ являются классическим преобразованием Гильберта по последней переменной ξ_m

$$H_{\xi'}u(\xi',\xi_m) = \frac{1}{\pi\mathrm{i}} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\xi',\tau)\,\mathrm{d}\tau}{\xi_m-\tau},$$

$Y_1(\xi)$ – произвольный многочлен переменных $\xi_1,\dots,\xi_m$, удовлетворяющий условию $|Y_1(\xi)|\sim 1+|\xi|$, $\tilde{A}_\pm(\xi)$ – множители факторизации для символа $\tilde{A}(\xi)$.

В формулах (8, 10) имеются произвольные функции $\tilde{c}_0, \tilde{C}_0$. Для определения, например, функции $\tilde{c}_0$ воспользуемся граничным условием из (1). Действуем оператором B на решение u_d, а затем берем сужение на дискретную полуплоскость $\tilde{\xi}_m = 0$. Согласно свойствам дискретного преобразования Фурье имеем

$$\int_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} \tilde{B}_d(\xi',\xi_m)\tilde{u}_d(\xi',\xi_m)\,\mathrm{d}\xi_m = \int_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} \tilde{B}_d(\xi',\xi_m)\tilde{h}_d(\xi',\xi_m)\,\mathrm{d}\xi_m + \tilde{c}_0(\xi')b_d(\xi'),$$

где

$$b_d(\xi') = \int_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} \tilde{B}_d(\xi',\xi_m)A_{d,+}^{-1}(\xi',\xi_m)\,\mathrm{d}\xi_m.$$

Здесь мы используем условие $\inf_{\xi'\in\hbar T^{m-1}}|b_d(\xi')|>0$. Это дискретный аналог условия Шапиро–Лопатинского [1]. Так как левая часть равна $\tilde{g}_d(\xi')$, у нас есть следующее отношение:

$$\tilde{c}_0(\xi') = b_d^{-1}(\xi')\big(\tilde{g}_d(\xi')-\tilde{t}_d(\xi')\big), \tag{12}$$

где

$$\tilde{t}_d(\xi') = \int_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} \tilde{B}_d(\xi',\xi_m)\tilde{h}_d(\xi',\xi_m)\,\mathrm{d}\xi_m .$$

Подставляя (12) в (8), получаем единственное решение для дискретной краевой задачи (1):

$$\tilde{u}_d(\xi) = \tilde{h}_d(\xi) + \tilde{A}_{d,+}^{-1}(\xi)b_d^{-1}(\xi')\big(\tilde{g}_d(\xi')-\tilde{t}_d(\xi')\big). \tag{13}$$

Согласно теории Вишика–Эскина [5] имеем

$$\tilde{u}(\xi) = \tilde{h}(\xi) + \tilde{A}_+^{-1}(\xi)b^{-1}(\xi')(\tilde{g}(\xi')-\tilde{t}(\xi')) \tag{14}$$

в предположении, что $\inf|b(\xi')|>0, \xi'\in R^{m-1}$. Сравним формулы (13) и (14). Основным моментом является оценка для $\tilde{h}_d$ и $\tilde{h}$. Для получения хорошей аппроксимации выбираем определенные элементы для дискретного решения особым образом.

Правая часть v_d в уравнении (1) строится следующим образом. Возьмем $lv_d = Q_h(lf)$ так, что

$$\widetilde{(lv_d)}(\xi) = \widetilde{lf}(\xi), \forall\xi\in\hbar T^m.$$

Обозначим через $\widetilde{Q_h}$ следующий оператор ограничения и периодизации, который действует в образах Фурье. Заданная функция $\tilde{u}$ в обозначениях $q_h\tilde{u}$ означает, что мы берем ограничение $\tilde{u}$ на $\hbar T^m$ и периодически продолжаем его в целом R^m. Символ $\tilde{A}_d(\xi)$ дискретного оператора A_d строится по следующей схеме.

Берем разложение на множители

$$\tilde{A}_d(\xi) = \tilde{A}_+(\xi)\cdot\tilde{A}_-(\xi)$$

и вводим периодический символ по формуле

$$\tilde{A}_d(\xi) \equiv \big(q_h\tilde{A}_+\big)(\xi)\cdot\big(q_h\tilde{A}_-\big)(\xi).$$

Таким образом получаем необходимую периодическую факторизацию.

У нас есть неединственность решения уравнения (1) для случая $æ - s = n + \delta,\ n \in N,\ |\delta| < 1/2$. Рассмотрим случай $n = 1$. Для получения решения необходимы некоторые дополнительные условия. Дискретные аналоги условий Дирихле или Неймана дают очень простой случай. Рассмотрим дискретное условие Дирихле:

$$B_d u_d|_{\tilde{x}_m = 0} = g_d(\tilde{x}),$$

где g_d является заданной функцией дискретной переменной в дискретной гиперплоскости Z^{m-1}.

Чтобы получить некоторое сравнение между дискретными и непрерывными решениями, напомним, как выглядит непрерывное решение. Непрерывным аналогом дискретной краевой задачи является следующая задача:

$$(Au)(x) = 0,\ x \in R_+^m, \tag{15}$$

$$\mathrm{Bu}(\acute{x}, 0) = \mathrm{g}(\acute{x}),\ \acute{x} \in R^{m-1}. \tag{16}$$

Символ $\tilde{B}_d(\xi)$ граничного оператора B_d определим

$$\tilde{B}_d(\xi) \equiv (q_h \tilde{B})(\xi).$$

Для простоты рассмотрим случай $\mathrm{f} \equiv 0$. Тогда функции $h,\ h_d,\ t,\ t_d$ равны нулю.

Лемма. Пусть граничный символ $\tilde{B}(\xi)$ удовлетворяет условию

$$c_1(1+|\xi|)^\beta \le \left|\tilde{B}(\xi)\right| \le c_2(1+|\xi|)^\beta,\ æ > 1 + \beta.$$

Тогда будут следующие оценки $\left|\tilde{b}_d(\acute{\xi}) - \tilde{\mathrm{b}}(\acute{\xi})\right| \le \mathrm{ch}^{æ-1-\beta}$.

Доказательство. Проведем соответствующие оценки:

$$\left|b(\acute{\xi}) - b_d(\acute{\xi})\right| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{B}(\xi', \xi_m)\tilde{A}_+^{-1}(\xi', \xi_m)d\xi_m - \int_{-\hbar\pi}^{+\hbar\pi} \tilde{B}(\xi', \xi_m)\tilde{A}_{\mathrm{d},+}^{-1}(\xi', \xi_m)d\xi_m\right| =$$

$$= \left|\left(\int_{-\infty}^{-\hbar\pi} + \int_{\hbar\pi}^{+\infty}\right)\tilde{B}(\xi', \xi_m)\tilde{A}_+^{-1}(\xi', \xi_m)d\xi_m\right|.$$

Так как два интеграла имеют одинаковую оценку, то рассмотрим второй:

$$\int_{\hbar\pi}^{+\infty} \left|\tilde{B}(\xi', \xi_m)A_+^{-1}(\acute{\xi}, \xi_m)\right| d\xi_m \le c \int_{\hbar\pi}^{+\infty} \left(1 + |\acute{\xi}| + |\xi_m|\right)^{\beta - æ} d\xi_m =$$

$$= \frac{c}{æ - 1 - \beta}\left(1 + |\acute{\xi}| + \hbar\pi\right)^{1-æ} \le ch^{æ-1-\beta}.$$

Теорема 4. Пусть $f \equiv 0$ и $\mathrm{g} \in H^{s-\beta-\frac{1}{2}}(R^{m-1})$,

$$\inf|b(\xi')| > 0, \xi' \in R^{m-1},\ \inf|b_d(\xi')| > 0, \xi' \in T^{m-1}, h > 0.$$

Тогда сравнение решений задач (3–4) и (15–16) дается следующей оценкой:

$$|\tilde{u}_d(\xi) - \tilde{u}(\xi)| \le \mathrm{ch}^{æ-1-\beta}.$$

Доказательство. Существование и единственность решений этих задач доказаны в [5] для непрерывного случая и в [10] – для дискретного. Поэтому нам нужно доказать оценку. Составляем разность

$$\tilde{u}(\xi) - \tilde{u}_d(\xi) = b^{-1}(\acute{\xi})\tilde{g}(\acute{\xi})A_+^{-1}(\acute{\xi}, \xi_m) - b_d^{-1}(\acute{\xi})\widetilde{g_d}(\acute{\xi})A_{\mathrm{d},+}^{-1}(\acute{\xi}, \xi_m) =$$

$$= \left(b^{-1}(\acute{\xi}) - b_d^{-1}(\acute{\xi})\right)\widetilde{g_d}(\acute{\xi})A_{\mathrm{d},+}^{-1}(\acute{\xi}, \xi_m), \xi \in \hbar T^m.$$

Используя лемму 1 и ограниченность $\tilde{g}$, завершаем оценку.

Автор выражает свою благодарность доктору физико-математических наук, профессору В.Б. Васильеву за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. *Стренг Г., Фикс Д.Ж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977.
2. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989.
3. *Рябенький В.С.* Метод разностных потенциалов и его приложения. – М.: Физматлит, 2002.
4. *Hsiao G., Wendland W*. Boundary integral equations. – Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
5. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1973.
6. *Vasilyev A., Vasilyev V.* Digital Operators, Discrete Equations and Error Estimates // Numerical Mathematics and Advanced Applications ENUMATH 2017. Lecture Notes in Computational Science and Engineering. – 2019. – Vol. 126. – Pp. 983–991.
7. *Тейлор М*. Псевдодифференциальные операторы. – М.: Мир, 1985.
8. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B*. Pseudo-differential operators and equations in a discrete half-space // Math. Model. Anal. – 2018. – № 23 (3). – Pp. 493–496.
9. *Vasilyev V.B*. Digital approximations for pseudo-differential equations and error estimates // *G. Nikolov, N. Kolkovska, K. Georgiev (eds.).* Numerical Methods and Applications. – 2018. – Vol. 11189. – Pp. 483–490.
10. *Vasilyev A.V., Vasilyev V.B.* On some discrete boundary value problems in canonical domains // Differential and Difference Equations and Applications. ICDDEA, Math. & Stat. – 2018. – Vol. 230. – Pp. 569–579.
11. *Tarasova O.A., Vasilyev V.B*. To the theory of discrete boundary value problems // 4Open. – 2019. – Vol. 2. – Pp. 1–7.

Поступила в редакцию 16 апреля 2021 г.

UDC 517.983.23

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-3-64–72

On Discrete Elliptic Pseudo-Differential Equations

O.A. Tarasova

Belgorod National Research University; Russia, 308015, Belgorod, Pobeda st., 85; Tarasova_O@bsu.edu.ru

The article deals with discrete analogs of pseudo differential operators and related discrete equations and boundary value problems in a discrete half-space with step h. We introduce discrete Sobolev–Slobodetskii spaces in which the operators are bounded and study a solvability for equations with such operators. A solvability picture is determined by special index of periodic factorization and for some cases there is non-uniqueness of a solution for the discrete pseudo-differential equation. To extract the unique solution one needs certain additional conditions. In this paper we consider one additional condition which is given first as the discrete Dirichlet condition and then as a trace of a general discrete pseudo-differential operator on a discrete hyper-plane. For both cases there are a comparison between discrete and continuous solutions at points of the discrete half-space. The nearness for discrete and continuous solution is estimated in dependence of step h.

Keywords: *pseudo-differential operator, boundary value problem, discrete solution.*

Received 16 April 2021