МАТЕМАТИКА

УДК 517.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-3-58–63

Л.А. Ковалева

О концевом символе для задачи Дирихле на двумерном комплексе

ФГАОУ ВО «Белгородский государственный национальный исследовательский университет»; Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85; Kovaleva_L@bsu.edu.ru

Исследованиям задачи Дирихле на различных стратифицированных множествах посвящено большое число статей. К первым можно отнести работу Р. Куранта еще в 1926 г. Современные ученые (Ю.В. Покорный, Г. Люмер, С. Никез, Дж. фон Белов [9] и др.) добились огромного продвижения в теории дифференциальных уравнений на стратифицированных множествах младших размерностей, т. е. на так называемых графах. О.М. Пенкин и его ученики опубликовали много работ исследуемых задач на стратах большей размерности, однако рассматриваемая теория далека от логического завершения.

Цель статьи – построение концевого символа для задачи Дирихле на двумерном комплексе, состоящем из плоских выпуклых многоугольников, изучение его структуры и свойств. В первой части статьи описывается двумерный комплекс, вводятся обозначения для граней, ребер, вершин комплекса, также определяется его граница. Далее рассматриваются разбиения множества граней, ребер и вершин на некоторые подмножества. Согласно методам, описанным в работах [5–8; 10], с помощью введения аналитической функции, а именно сопряженной с рассматриваемой функцией, учитывая условия Коши–Римана, удается свести задачу Дирихле для уравнения Лапласа на двумерном комплексе к задаче Римана на двумерном комплексе. Во второй части статьи для каждой вершины комплекса строится матрица концевого символа. Затем рассматривается такое свойство матрицы, как число нулей определителя матрицы в заданной точке, взятое с учетом кратности. Данный результат оформлен в виде леммы 1. Вводится мероморфная функция, построение которой описано в статье и в лемме 2, исследуется значение приращения непрерывной ветви логарифма построенной функции. В дальнейшем при решении задачи Дирихле на рассматриваемом двумерном комплексе используются результаты статьи.

Ключевые слова: *задача Дирихле, концевой символ задачи, двумерный комплекс, стратифицированное множество.*

На плоскости рассматривается комплекс, состоящий из открытых плоских многоугольников Ω_j^2, $1 \le j \le n$. Открытые отрезки Ω_j^1, $1 \le j \le l$ вместе с их вершинами τ составляют границу рассматриваемых плоских многоугольников.

Будем считать, что эти границы попарно могут пересекаться только по сторонам или вершинам, причем семейство (Ω_j^1) составлено из различных сторон. Множество всех вершин обозначим F. Тогда полученный двумерный комплекс

$$\overline{\Omega} = F \cup \Omega^1 \cup \Omega^2, \quad \Omega^k = \cup_j {\Omega^k}_j$$

назовем стратифицированным двумерным компактом, а составляющие его элементы Ω_k^1 и Ω_s^2 – стратами соответствующих размерностей (одномерными и двумерными). Под стратифицированным множеством Ω здесь понимается $\Omega^2 \cup \Omega_H^1$, где Ω_H^1 – объединение некоторого конечного числа одномерных страт. Объединение Ω_D^1 оставшихся одномерных страт будет играть роль границы этого множества. В статье мы исключим случай, когда одно из множеств Ω_D^1, Ω_H^1 представляется пустым. Если к одномерному страту сходится один многоугольник Ω_s^2, то этот одномерный страт назовем стороной, если несколько многоугольников Ω_s^2 – ребром. Предполагается, что все ребра входят только в Ω_H^1.

Пусть m_s^2 есть число сторон, составляющих границу $\partial\Omega_s^2$ и $m = m_1^2 + \cdots + m_n^2$. Введем единую нумерацию для этих сторон в виде $L_1, \dots, L_m$ и рассмотрим разбиение $I^2 = \{I_s^2, 1 \le s \le n,\}$ множества $\{1, \dots, m\}$, для которого стороны L_j, $j \in I_s^2$ составляют границу $\partial\Omega_s^2$. С каждым одномерным стратом Ω_k^1 свяжем некоторое множество I_k^1 номеров j, для которых L_j совпадает с Ω_k^1. Число элементов этого множества обозначим m_k^1. В результате получим другое разбиение $I^1 = \{I_k^1, 1 \le k \le l,\}$ множества $\{1, \dots, m\}$.

В дальнейшем будет изучаться задача Дирихле на вышеописанном компакте с помощью методов в работах [1–3]. Функция $\varphi_s = \varphi|_{\Omega_s^2} \in C\left(\overline{\Omega_s^2} \setminus F\right)$, $1 \le s \le n$. Граничные значения этой функции можно описать в форме семейства функций $\varphi_j^+ \in C(\Gamma_j), 1 \le j \le m$, которые определяются равенством $\varphi_j^+(y) = \lim_{x \in \Omega_s^2,\ x \to y} \varphi(x), y \in L_j, j \in I_s^2$.

Рассмотрим далее семейство единичных векторов $\mathrm{v}_j \in R^3, 1 \le j \le m$, таких, что для $j \in I_s^2$ вектор v_j лежит в плоскости многоугольника Ω_s^2 и по отношению к нему является внутренней нормалью к стороне L_j. Тогда если функция $\varphi_s \in C^1\left(\overline{\Omega_s^2} \setminus F\right)$, то можно ввести односторонние нормальные производные

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{v}}\right)_j^+ = \frac{\partial\varphi_s}{\partial \mathrm{v}_j}, j \in I_s^2.$$

Согласно работам [2–4] функцию $\mathrm{u} \in C(\Omega)$ будем называть гармонической на $\Omega_б$, если она кусочно-непрерывна и для каждого s ее сужения u_s гармоничны (по отношению к некоторой, а значит, и любой прямоугольной декартовой системы координат) на двумерном страте Ω_s^2, непрерывно дифференцируемы вплоть до $\partial\Omega_s^2 \cap \Omega_H^1$, а ее нормальные производные на одномерных стратах этого множества подчинены условию

$$\sum_{j \in I_s^1} \left(\frac{\partial u}{\partial \mathrm{v}}\right)_j^+ = 0, \Omega_k^1 \subseteq \Omega_H^1.$$

Напомним, что в Ω_H^1 входят все ребра и условие непрерывности функции u на них равносильно соотношениям $u_j^+ = u_i^+, i, j \in I_k^1$. Если элементы I_k^1 занумеровать, то из этих соотношений достаточно выделить $m_k^1 - 1$ независимых:

$$u_{i_r}^+ = u_{i_{r+1}}^+, \ 1 \le r \le m_k^1 - 1, \ I_k^1 = \{i_1, i_2 \dots, i_{m_k^1}\}.$$

Как обычно, задача Дирихле состоит в отыскании гармонической функции $\mathrm{u} \in C(\overline{\Omega} \backslash F)$, принимающей на Ω_D^1 заданные значения $u_j^+ = f_j, L_j = \Omega_k^1 \subseteq \Omega_D^1$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ достаточно малым, что при каждом $1 \le s \le n$ шары $\{|x - \tau| \le \varepsilon\}$, $\tau \in F$ попарно не пересекаются. Заметим, что пересечение этих шаров с многоугольником Ω_s^2 дает m_s^2 секторов. Введем для них следующую нумерацию: $\Omega^2_{(j)}$, $1 \le j \le m.$ Боковая граница сектора $\Omega^2_{(j)}$ состоит из его боковых сторон, которую обозначим $\partial'\Omega^2_{(j)}$. Таким образом получаем семейство $2m$ отрезков.

Пересечение выше описанных шаров с центрами в левом и правом концах стороны L_j дает нам отрезки, которые можно разделить на пары. Обозначим их соответственно L^0_j и L^1_j.

Для фиксированной точки $\tau \in F$ все сектора $\Omega^2_{(j)}$ с вершиной τ занумеруем единым образом в виде $\Omega^2_{\tau,s}$, $1 \le s \le m_\tau$ и аналогично введем нумерации $L_{\tau,j}$, $1 \le j \le 2m_\tau$ их боковых сторон и $\Omega^1_{\tau,k}$, $1 \le k \le l_\tau$ одномерных страт с концом τ. Очевидно, объединение этих страт совпадает с $\Omega^1_\tau = \Omega^1 \cap \{|x-\tau| \le \varepsilon\}$.

С каждым одномерным стратом $\Omega^1_{\tau,k}$ можем связать множество $I_{\tau,k}$ для номеров j, для которых $L_{\tau,j} \subseteq \Omega^1_{\tau,k}$. В результате имеем разбиение $I_\tau = (I_{\tau,k}$, $1 \le k \le l_\tau)$ множества $\{1, \ldots, 2m_\tau\}$. Число элементов множества $I_{\tau,k}$ обозначим $m_{\tau,k}$. Таким образом, $\sum_1^{l_\tau} m_{\tau,k} = m_\tau$, $\sum_{\tau\in F} 2m_\tau = 2m$, где учтено, что каждая сторона имеет два конца.

Введем $2m_\tau \times 2m_\tau$ – матрицы $V_\tau(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{C}$ и U_τ с элементами

$$V_{\tau,ij}(\zeta) = \begin{cases} e^{i\theta_{\tau,s}\zeta}, & L_{\tau,i} \cup L_{\tau,j} = \partial'\Omega^2_{\tau,s}, \\ 0, & \text{в противном случае}, \end{cases}$$

$$U_{\tau,ij}(\zeta) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{m_{\tau,\ k}}, \ i = j \in I_{\tau,\ k},\ m_{\tau,\ k} > 1, \\ -\frac{2}{m_{\tau,\ k}}, \ i,\ j \in I_{\tau,\ k},\ i \ne j,\ m_{\tau,\ k} > 1, \\ 1, \quad i = j \in I_{\tau,\ k},\ m_{\tau,\ k} = 1, \Omega^1_{\tau,\ k} \subseteq \Omega^1_H, \\ -1, i = j \in I_{\tau,\ k},\ m_{\tau,\ k} = 1, \Omega^1_{\tau,\ k} \subseteq \Omega^1_D, \\ 0, \ \text{в противном случае}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\theta_{\tau,s}$ означает внутренний угол области $\Omega^2_{\tau,s}$ в точке τ. Понятно, что эти матрицы блочно-диагональны относительно разбиений множества $\{1, \ldots, 2m\}$ на соответственно m_τ пар $(i,\ j)$, определяемых условием $L_{\tau,\ i} \cup L_{\tau,\ j} = \partial'\Omega^2_{\tau,\ s}$, $1 \le s \le m_\tau$, и подмножества $I_{\tau,\ k}$, $1 \le k \le l_\tau$.

Лемма 1

а) При каждом τ имеют место соотношения

$$U^2_\tau = 1, V_\tau(\zeta)V_\tau(-\zeta) = 1.$$

б) Число $s_\tau(0)$ – число нулей функции $\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ на прямой $\operatorname{Re}\ \zeta = 0$, взятое с учетом их кратности. Оно четно.

Доказательство. Введем в рассмотрение матрицу $A = A_n$ размером $n \times n$, все элементы которой числа. Эта матрица имеет следующую структуру: все элементы, кроме диагональных, равны b, диагональные элементы равны a.

Рассмотрим последовательность $x_n = \det A_n, n \ge 1$, т. е.

$$\begin{gathered} x_1 = |a| = a, \\ x_2 = (a-b)x_1 + b(a-b), \\ x_3 = (a-b)x_2 + b(a-b)^2, \\ x_4 = (a-b)x_3 + b(a-b)^3. \end{gathered}$$

Нетрудно заметить, что при $n \ge 2$ выполняется равенство $x_n = (a-b)x_{n-1} + +b(a-b)^{n-1}$. Последовательно подставляя в эту формулу значения для определителей x_{n-1}, получим

$$\det A_n = (a-b)^{n-1}[a + (n-1)b].$$

Согласно (1) диагональный блок U_τ совпадает с матрицей A_n при $a = 1 - 2/n, b = -2/n$ так, что

$$\det A_n = (1 - 2/n + 2/n)^{n-1}[1 - 2/n + (n-1)(2/n)] = -1.$$

Введем матрицу $\tilde{A} = A^2$ при $n \geq 2$:

$$\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \dots & b \\ . & . & \dots & . \\ b & b & \dots & a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} & \dots & \tilde{b} \\ \tilde{b} & \tilde{a} & \dots & \tilde{b} \\ . & . & \dots & . \\ \tilde{b} & \tilde{b} & \dots & \tilde{a} \end{pmatrix},$$

где $\tilde{a} = a^2 + (n-1)b^2$ и $\tilde{b} = 2ba + (n-2)b^2$. Подставляя значения для $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, приходим к равенству $\tilde{a} = 1$, $\tilde{b} = 0$. Таким образом, $A_n^2 = 1$. Следовательно, и U_τ^2 является единичной матрицей.

Для доказательства еще одного равенства из (а) надо заметить, что $e^{i\theta\zeta} * e^{-i\theta\zeta} = 1$. Тогда очевидно, что для диагональной матрицы V выполняются соотношения

$$V_\tau(\zeta)V_\tau(-\zeta) = 1, \det V_\tau(\zeta) = (-1)^{m_\tau} e^{2i\theta\zeta}, \theta = \textstyle\sum_{\Omega_S^2} \theta_{\tau,s},$$

$$\det(1 + V_\tau)(\zeta) = \textstyle\prod_{\Omega_S^2}(1 - e^{2i\theta_{\tau,s}\zeta}).$$

(b) В силу (а) и равенства $U_\tau + V_\tau(\zeta) = U_\tau[U_\tau^{-1} + V_\tau^{-1}(\zeta)]V_\tau(\zeta)$ имеем соотношение $\det[U_\tau + V_\tau(-\zeta)] = e^{i\theta\zeta} \det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ с некоторым $\theta \in R$. Поэтому достаточно убедиться, что при $\det[U_\tau + V_\tau(0)] = 0$ порядок n нуля функции $f(\zeta) = \det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ в точке $\zeta = 0$ четен. Запишем $f(\zeta) = \zeta^n f_0(\zeta)$, где $f_0(\zeta) \neq 0$. Тогда в силу предыдущего равенства должно быть $f_0(0) = (-1)^n f_0(0)$, что возможно только для четного n.

Легко видеть, что при фиксированном вещественном λ матрица $V_\tau^{\pm 1}(\lambda + it) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Следовательно, скалярная мероморфная функция

$$h_\tau(\zeta) = \det[U_\tau + V_\tau(\zeta)] / \det[1 + V_\tau(\zeta)]$$

имеет пределы при $t \to \pm\infty$

$$h_\tau(\lambda + it) = \det U_\tau, \quad h_\tau(\lambda - it) = 1.$$

В частности, проекция нулей аналитической функции $\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ на действительную ось является дискретным множеством. Если на прямой $Re\zeta = \lambda$ отсутствуют нули функций $\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ и $\det[1 + V_\tau(\zeta)]$, то можно рассмотреть приращение непрерывной ветви логарифма $\ln h_\tau(\zeta)$ на этой прямой, деленное на $2\pi i$, и ввести число

$$\chi_\tau(\lambda) = \sum_{\tau \in F} \frac{1}{2\pi i}[(\ln h_\tau)(\lambda + i\infty) - (\ln h_\tau)(\lambda - i\infty)],$$

которое в силу леммы 1 вещественно. Очевидно, это число как функция от λ сохраняет постоянное значение на каждом интервале J, для которого в полосе $Re\,\zeta \in J$ отсутствуют нули функций $\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ и $\det[1 + V_\tau(\zeta)]$. В частности, можно говорить о значении $\chi_\tau(-0) = \lim \chi_\tau(\lambda)$ при $\lambda \to 0, \lambda < 0$. В действительности функция $\chi_\tau(\lambda)$ выражается явно через нули концевого символа.

Лемма 2. Имеет место равенство

$$\chi_\tau(-0) = (m_\tau - s_\tau)/2,$$

где $s_\tau = \sum_{Re\,\zeta = 0} s_\tau(\zeta)$ есть число нулей функции $\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ на прямой $Re\,\zeta = 0$, взятое с учетом их кратности. При этом разность $(m_\tau - s_\tau)$ имеет одну и ту же четность с $l_\tau(H)$ – число одномерных страт с концом τ, содержащихся в Ω_H^1, так что сумма $\sum_\tau \chi_\tau$ является целочисленной функцией.

Согласно доказанным выше свойствам матриц U_τ и V_τ следует, что

$$U_\tau + V_\tau(-\zeta) = U_\tau^{-1} + V_\tau(-\zeta).$$

Тогда

$$U_\tau + V_\tau(\zeta) = U_\tau(U_\tau + V_\tau(-\zeta))V_\tau(\zeta) \text{ и } 1 + V_\tau(\zeta) = (1 + V_\tau(-\zeta))V_\tau(\zeta),$$

откуда $h_\tau = (\det U_\tau)h_\tau(-\zeta)$. Следовательно, приращения

$$\alpha_\pm = \frac{1}{2\pi i}(\ln h_\tau)(\zeta)\Big|_{\pm\varepsilon - i\infty}^{\pm\varepsilon + i\infty}$$

на прямых $\mathrm{Re}\,\zeta = \pm\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, достаточно малы и противоположны по знаку. С другой стороны, в полосе между этими прямыми к мероморфной функции h_τ можно применить принцип аргумента, согласно которому разность $\alpha_+ - \alpha_- = -2\alpha_-$ равна разности между числом нулей числителя и знаменателя. Это приводит к выражению $s_\tau - s_\tau^0$, где через s_τ^0 обозначено число нулей функции $\det[1 + V_\tau(\zeta)]$. Согласно лемме 1 это число равно числу множителей в определителе, т. е. $s_\tau^0 = m_\tau$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим функцию $f(\zeta) = \det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$. Очевидно, что

$$\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)] = \det U_\tau(U_\tau + V_\tau(-\zeta))V_\tau(\zeta) = \det U_\tau \det(U_\tau + V_\tau(-\zeta)) \det V_\tau(\zeta).$$

Тогда

$$\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)] = (-1)^{m_\tau + l_\tau(H)} e^{2i\theta\zeta} \det[U_\tau + V_\tau(-\zeta)]. \qquad (2)$$

Рассмотрим порядок нуля $k = s_\tau(0)$ функции $\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ при $\zeta = 0$. Перепишем (2) в виде $f_0(\zeta) = \zeta^{-k}\det[U_\tau + V_\tau(\zeta)]$ с заменой $m_\tau + l_\tau(H)$ на $m_\tau + l_\tau(H) + k$. Тогда при $\zeta = 0$ это соотношение дает нам четность числа $m_\tau + l_\tau(H) + s_\tau(0)$. Так как $s_\tau(\zeta) = s_\tau(\bar{\zeta})$, то четно и число $m_\tau - l_\tau(H) - s_\tau$. В результате получаем

$$\textstyle\sum_{\tau\in F} \chi_\tau(-0) = \frac{1}{2}\sum_{\tau\in F} l_\tau(H) + \text{целое число}.$$

Заметим, что $\sum_{\tau\in F} l_\tau(H) = 2l$, где l – число элементов множества Ω_H^1.

Литература

1. *Ковалева Л.А., Солдатов А.П.* Задача Дирихле для функций гармонических на двумерной сети // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2019. – Т. 160. – С. 42–48.

2. *Ковалева Л.А., Солдатов А.П.* Задача Дирихле на двумерной сети // Актуальные проблемы прикладной математики: материалы IV Международной научной конференции (г. Нальчик, 22–26 мая 2018 г.). – Нальчик: Эльбрус, 2018. – С. 125.

3. *Ковалева Л.А., Солдатов А.П.* Задача Дирихле на двумерных стратифицированных множествах // Известия РАН. Сер.: Математика. – 2015. – Т. 79, № 1. – С. 77–114.

4. *Ковалева Л.А., Солдатов А.П.* Об одной нелокальной задаче теории функций // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46, № 3. – С. 396–409.

5. *Солдатов А.П.* О фредгольмовости и индексе обобщённой задачи Неймана // Дифференциальные уравнения. – 2020. – Т. 56, № 2. – С. 217–225.

6. *Солдатов А.П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка в многосвязной области на плоскости // Владикавказский математический журнал. – 2017. – Т. 19, № 3. – С. 51–58.

7. *Солдатов А.П.* Метод теории функций в эллиптических краевых задачах на плоскости. II. Кусочно-гладкий случай // Изв. АН СССР. – 1992. – Т. 56, № 3. – С. 566–604.

8. *Чернова О.В*. Интегральное представление решений эллиптической системы // Вестник РАЕН. – 2019. – Т. 19, № 2. – С. 179–181.

9. *J. von Belov, Penkin O.M., Mehmeti F.A., Nicaise S.* About a geometrical approach to multistructures znd some qualitative properties of solutions // Lect. Notes Pure Appl. Math. – 2001. – V. 219. – Pp. 183–192.

10. *Soldatov A.P*. On elliptic systems of two equations on the plane // Trends in Mathematics. – 2019. – C. 279–301.

Поступила в редакцию 16 апреля 2021 г.

UDC 517.9

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-3-58–63

On the End Symbol for the Dirichlet Problem on a Two-Dimensional Complex

L.A. Kovaleva

Belgorod National Research University; Russia, 308015, Belgorod, Pobeda st., 85; Kovaleva_L@bsu.edu.ru

A large number of articles are devoted to the study of the Dirichlet problem on various stratified sets. The first of these works can be attributed to the work of R. Courant back in 1926. Modern scientists such as Yu.V. Pokorny, G. Lumer's, S. Nicaise, J. von Belov [9] and others have made tremendous progress in the theory of differential equations on stratified sets of lower dimensions, i. e. on the so-called graphs. O.M. Penkin and his students published many papers on the problems under study on strata of higher dimension, however, the theory under consideration is far from logical completion. The purpose of this article is to construct an end symbol for the Dirichlet problem on a two-dimensional complex consisting of flat convex polygons, to study its structure and properties. The first part of this article describes the considered two-dimensional complex, introduces designations for the faces, edges, vertices of the complex, and also defines the boundary of the complex under consideration. Further, we consider partitions of the set of faces, edges, and vertices into some subsets. According to the methods described in [5–8; 10] by introducing an analytic function, namely, the conjugate to the function under consideration, taking into account the Cauchy-Riemann conditions, it is possible to reduce the Dirichlet problem for the Laplace equation on a two-dimensional complex to the Riemann problem on a two-dimensional complex. In the second part of the article, for each vertex of the complex, a terminal symbol matrix is constructed. Then, such a property of the matrix is considered as the number of zeros of the determinant of the matrix at a given point, taken with the multiplicity into account. This result is formulated in the form of Lemma 1. A meromorphic function is introduced, the construction of which is described in the article, and in Lemma 2, the value of the increment of the continuous branch of the logarithm of the constructed function is investigated. Further, when solving the Dirichlet problem on the considered two-dimensional complex, the results of this article are used.

Keywords: *Dirichlet problem, end symbol of the problem, two-dimensional complex, stratified set.*

Received 16 April 2021