

УДК 519.6

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-3-79–88

А.М. Макаров<sup>1</sup>, А.С. Ермаков<sup>2</sup>

**Основы теории интегрального преобразования Меллина и разработка на его базе цифровой модели Эйлерова интеграла первого рода**

<sup>1</sup> Пятигорский государственный университет (ПГУ); Россия, 357532, Ставропольский край, г. Пятигорск, пр. Калинина, 9; mellin\_22@mail.ru;

<sup>2</sup> ООО «Каскад»; Россия, 357500, Ставропольский край, г. Пятигорск, ул. Московская, 68а; ertakov@cascad-kmv.ru

В статье отмечено, что математическое моделирование процессов обработки информации является весьма важной задачей во всех научных исследованиях. Найденная математическая модель в виде бета-функции Эйлера показала ее высокую эффективность в проведенных Габриеле Венециано и Махико Сузуки квантовых исследованиях. Более того, в струнной теории Калаби–Яу бета-функция оказалась решающей в вопросе о сохранении условия масштабной инвариантности двумерного квантового поля после проведения над ним интегрирования по всем возможным геометриям мирового листа. Бета-функция служит критерием масштабной инвариантности квантового поля, то есть позволяет ответить на вопрос: остается ли это поле принадлежащим пространству Калаби–Яу или нет. Как отмечает автор теории того пространства Яу Шинтун, расчеты по формуле, полученной разложением в ряд, очень сильно усложняются. Но реализация цифровой модели бета-функции для работы с ней в компьютерных системах является трудоемкой задачей, которая осложняется высокоточным представлением ее подынтегральных функций, требующих большого числа промежуточных операций, что влечет за собой сильную нагрузку на вычислительные мощности компьютерных систем. В работе рассмотрена цифровая модель бета-функции, в которой найдены значения компьютерного нуля и компьютерной бесконечности, для которых определены численные значения бета-функции с заданной точностью ее вычисления. Показано, что бета-функция является частным случаем преобразования Меллина, и это обстоятельство позволило авторам работы использовать результаты полученной ими теоремы и предложить цифровую модель для вычисления бета-функции при заданной точности.

Ключевые слова: преобразования Меллина, бета-функция, функция Эйлера первого рода, цифровая модель.

### Введение

В развитии теории и приложений обработки сигналов на фоне шумов большую роль сыграли интегральные преобразования Фурье, Гильберта, Меллина. Их внедрение в теорию обогатило функциональные возможности теории сигналов, расширив область их применения. В наше время различные методы спектральной инженерии стали рабочим инструментом инженеров и научных работников. Преобразование Гильберта позволило решить задачу нахождения комплексной огибающей широкого класса широкополосных сигналов. А это, в свою очередь, позволило использовать методы цифрового представления сигналов и методы цифровой обработки, что привело к созданию нового класса устройств

обработки сигналов. Применение интегрального преобразования Меллина (ПМ) для обработки сигналов обеспечивает масштабную инвариантность решающих правил к изменению длительности входного сигнала.

В ряде работ [1–4] рассмотрены математические основы ПМ, позволяющие обеспечивать его применение для обработки сигналов. С одной стороны, результаты, полученные математиками, не стали достоянием широкого круга инженеров-разработчиков из-за перегруженности математического аппарата специальными знаниями, а с другой – результаты, полученные математиками, не адаптированы к теории обработки сигналов. Но еще меньше работ посвященных цифровым методам и вычисления ПМ, в основном известна совместная работа Макарова А.М., Постовалова С.С. [5].

Разработка струнной теории в 1968 году учеными ядерной лаборатории в Женеве Габриеле Венециано и Махико Сузуки привела к созданию основ нового миропонимания в строении Вселенной. Интересно отметить, что давно известная формула функции Эйлера 1-го рода, или бета-функция [6–9], привела Г. Венециано к созданию модели физического явления столкновения  $\pi$ -мезонных частиц при очень больших энергиях [10; 11].

Поэтому представляется актуальным решение задачи создания цифровой модели бета-функции для ее реализации в компьютерных системах. Сложность цифровой реализации модели состоит в ее высокоточном представлении подынтегральных функций, требующих большого числа операций даже для современной компьютерной базы. Все вопросы создания таких цифровых моделей подробно рассматривали в своей работе Шинтан Яу и Стив Надис [12].

В ней авторы адаптируют полученную ими теорию применительно к цифровой модели бета-функции.

Цели работы – разработка основных теоретических положений интегрального преобразования Меллина применительно к теории обработки сигналов на фоне шумов и исследование их дискретного представления.

### Элементы теории преобразования Меллина

Пара интегральных преобразований задается в виде прямого преобразования

$$M(s) = \int_X f(x)\theta(s, x)dx, x \in X \quad (1)$$

и обратного преобразования

$$f(x) = \int_S M(s)\theta^{-1}(x, s)ds, s \in S, \quad (2)$$

где  $\theta(s, x)$  – ядро прямого преобразования,  $\theta^{-1}(s, x)$  – ядро обратного преобразования,  $x \in X$  – область переменной  $x$ , где интеграл (1) существует.

То есть пара интегральных преобразований (1) и (2) представляет собой оператор отображения переменной  $x$  при ее определении в области существования интеграла (1)  $X$  в область переменной  $s$ , существующей в области интегрального (2)  $S$ .

Для теории обработки сигналов основное условие применения интегральных преобразований (1) и (2) заключается в выполнении равенства Парсеваля или неравенства Бесселя: мощность сигнала до преобразования равна его мощности после преобразования.

Математически это запишется в виде фундаментального неравенства

$$f(x) = \int_S M(s)\theta^{-1}(x, s)ds, s \in S, \quad (3)$$

где  $|\cdot|$  – оператор модуля функции  $M(s)$  и  $f(x)$ . В теории интегральных преобразований (3) выполняется при равенстве смежных произведений

$$(M(s), P(s)) = (y(t), x(t)), \quad (4)$$

где  $M(s), P(s)$  – преобразования от  $t$ .

В свою очередь, условие (4) будет верно, если ядра интегральных преобразований (1) и (2) будут самосопряженными

$$\theta(s, x) = \theta^*(x, s), \quad (5)$$

где символ  $*$  означает комплексно-сопряженную величину.

Таким образом, величина скалярного произведения (4) не изменяется при переходе области  $M(s)$  в область  $x(t)$ .

Классическое преобразование Меллина имеет вид

$$M(s) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt, s = \sigma + ju, \quad (6)$$

$$\sigma \in R^1, u \in (-\infty, \infty),$$

где  $R^1$  – евклидово множество действительных чисел.

Обратное ПМ выражается следующим образом:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} M(s) t^{-s} ds. \quad (7)$$

Запишем ядро прямого ПМ и обратного в виде

$$t^{\sigma+ju} \text{ и } t^{\sigma-ju},$$

несложно показать, что их самосопряженность возможна лишь при  $\sigma = 1/2$ , тогда ядро прямого ПМ равняется

$$M(p) = \int_0^\infty f(t) t^{p-1} dt,$$

где  $p = 1/2 + ju$ , и соответственно для ПМ с самосопряженными ядрами имеем

$$M(p) = \int_0^\infty f(t) t^{p-1} dt \quad (8)$$

$$\text{и } f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{1/2-j\infty}^{1/2+j\infty} M(p) t^{-p} dp. \quad (9)$$

Полученные выражения (7) и (8) – модифицированное ПМ для его применения в теории обработки сигналов.

Базисные ядра  $K_{er}$  ПМ равны

$$K_{er} = t^{S-1} = t^{1/2+ju-1} = t^{-1/2} t^{ju} = \frac{e^{ju \ln(t)}}{\sqrt{t}}$$

или

$$K_{er} = \frac{\cos(u) \ln(t)}{\sqrt{t}} + j \frac{\sin(u) \ln(t)}{\sqrt{t}}.$$

Соответственно модуль ядра

$$|K_{er}| = \sqrt{\frac{\cos(u \ln(t))^2 + \sin(u \ln(t))^2}{t^2}} = \frac{1}{t}.$$

$$\text{Аргумент } \arg = -\arctan \frac{\sin(u \ln(t))}{\cos(u \ln(t))} = -\arctan(u \ln(t)) = -u \ln(t).$$

Равенство Парсеваля

$$\int_a^b |M(S)|^2 ds = \int_a^b |f(t)|^2 dt$$

выполняется при реальной части  $S$ , равной  $1/2$ .

Для дальнейшего анализа запишем (1) в виде:

$$M(u) = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \cos(uln(t)) dt + j \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \sin(uln(t)) dt.$$

Как показали исследования, проведенные авторами работы, основную трудность представляет создание генератора базисных функций вида:

$$\varphi(t) = \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}}.$$

Определим два предела:

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}} = 0.$$

Исследуем нули функции  $\varphi(t)$ :

$$\sin(uln(t)) = 0$$

$$uln(t) = n\pi, \forall n \in \mathbb{Z}$$

$$t_0 = e^{\frac{\pi n}{u}}, \text{ если } t > 1$$

$$t_0 = e^{\frac{-\pi n}{u}}, \text{ если } t < 1$$

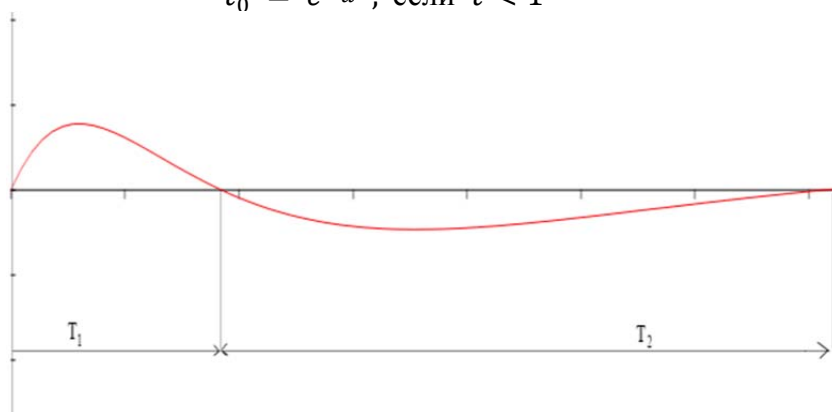


Рис. 1. Период функции  $\varphi(t)$

Рассмотрим рисунок, изображающий один период  $\varphi(t)$  при  $t < 1$ .

*Теорема 1.* Для функции  $\frac{\sin(uln(t))}{\sqrt{t}}$  при  $t > 0, u \in (u_{max}, u_{min})$  при любом конечном  $u$  все полупериоды функции будут сдвинуты на постоянную величину  $e^{m\pi/u}$ ,  $m = 1, 2, 3 \dots M$ .

*Доказательство.* Из рис. 1 видно, что полный период будет равен

$$T_{01} = T_1 + T_2.$$

С другой стороны, для предыдущего полупериода запишем

$$T_1 = e^{\frac{\pi n}{u}} - e^{\frac{(n-1)\pi}{u}} \text{ и для последующего полупериода}$$

$$T_2 = e^{\frac{(n-1)\pi}{u}} - e^{\frac{(n-2)\pi}{u}},$$

тогда для отношения  $T_2/T_1$  получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{e^{\frac{(n-1)\pi}{u}} - e^{\frac{(n-2)\pi}{u}}}{e^{\frac{\pi n}{u}} - e^{\frac{(n-1)\pi}{u}}} = e^{\frac{\pi}{u}} \text{ или } T_2 = T_1 e^{\frac{\pi}{u}},$$

тогда для  $T_{01}$  имеем

$$T_{01} = T_1 + T_1 e^{\frac{\pi}{u}} = T_1 \left(1 + e^{\frac{\pi}{u}}\right).$$

Аналогично для отношения  $T_3/T_2$  получим:

$$\frac{T_3}{T_2} = e^{\frac{\pi}{u}},$$

$$T_{02} = T_3 + T_4 = T_1 e^{\frac{2\pi}{u}} + T_1 e^{\frac{3\pi}{u}} = T_1 e^{\frac{2\pi}{u}} \left(1 + e^{\frac{\pi}{u}}\right) = T_{01} e^{\frac{2\pi}{u}},$$

$$T_{0m} = T_{01} e^{\frac{m\pi}{u}} \text{ ч. т. д.}$$

Выразим  $e^{\frac{m\pi}{u}}$  через рекурсию

$$U[m] = \rho U[m-1].$$

Примем  $\rho = e^{\pi/u}$  за эталон, тогда:

$$e^{\frac{m\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{(m-1)\pi}{u}},$$

$$m = 1 e^{\frac{\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^0 = \rho,$$

$$m = 2 e^{\frac{2\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{\pi}{u}} = \rho \rho = \rho^2,$$

$$\text{при } m = 3 e^{\frac{3\pi}{u}} = e^{\frac{\pi}{u}} e^{\frac{2\pi}{u}} = \rho \rho^2 = \rho^3,$$

.....

$$m = e \rho^l l = 1, 2, 3, \dots$$

Таким образом, для генератора базисных функций необходимо вычислить одно значение  $\rho = e^{\frac{\pi}{u}}$  для заданного  $u$ , а затем последовательным умножением вычислить все координаты нулей  $u$ -той гармоники.

### Исследования алгоритма вычисления цифровой модели бета-функции

Эйлеров интеграл первого рода (далее – *бета-функция*) записывается двумя эквивалентными способами:

$$B(s, z) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{z-1} dx, \quad (10)$$

$$x \geq 0; s = \sigma + ju; z = \delta + jv; R_e\{\sigma\}, R_e\{\delta\} > 0; \\ u, v \in (-\infty, \infty).$$

$$B(s, z) = \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{(1+y)^{s+z}} dy, y > 0. \quad (11)$$

При всех  $s$  из области  $R_e\{s\} > 0$  и любых  $z$  из области  $R_e\{z\} > 0$  выполняется равенство:

$$(s, z) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(z)}{\Gamma(s+z)}, \quad (12)$$

$$\text{где } \Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx, \quad (13)$$

$$p = \alpha + jc; \alpha_1 < \alpha < \alpha_2; c \in (-\infty, \infty).$$

$\Gamma(p)$  – носит название *гамма-функции*, или Эйлерова интеграла второго рода.

Известно, что гамма-функция представляет собой частный случай преобразования Меллина (ПМ) [13]. Соответственно и бета-функция также есть ПМ функции  $(1-x)^{z-1}$ . Действительно, прямое и обратное ПМ запишется в виде (14) и (15).

$$M(S) = \int_0^\infty f(t) t^{s-1} dt, s = \sigma + ju; \sigma_1 < \sigma < \sigma_2; \\ u \in (-\infty, \infty); t > 0. \quad (14)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{d-j\infty}^{d+j\infty} M(S) t^{-S} dS. \quad (15)$$

Подставим из (1)  $f(t) = (1-t)^{z-1}$  и получим бета-функцию:

$$B(s, z) = \int_0^1 (1-t)^{z-1} t^{s-1} dt. \quad (16)$$

При разработке цифровой модели (10) необходимо провести дополнительные исследования функции  $(1-x)^{z-1}$ , так как для цифрового представления интегрального ядра ПМ  $x^{s-1}$  была создана теория его цифрового представления, а объединив теорию цифрового представления  $(1-x)^{z-1}$  и теорию  $x^{s-1}$ , получим цифровую модель (10).

Преобразуем функцию  $(1-t)^{\delta-1+jv}$ , удобную для дальнейшего анализа  $(1-t)^{\delta-1+jv} = (1-t)^{\delta-1}(\cos(v \ln(1-t)) + j \sin(v \ln(1-t)))$ . (17)

В отличие от функции  $t^{s-1}$  (17) при  $t = 0$  равна единице, при  $0 < \delta < 1$  функция (17) конечная.

При  $t = 1$  функция (17) не определена при  $\delta > -1$ , равна бесконечности при  $\delta < 1$ . Этот случай при  $t \rightarrow 1$  и подлежит дополнительному исследованию. Как показано в [8], и в этом случае опорными точками являются нули функций

$$\sin(v \ln(1-t)), \quad (18)$$

$$\cos(v \ln(1-t)). \quad (19)$$

Для определенности рассмотрим синусную тригонометрически-логарифмическую функцию. Очевидно выполнение равенства  $v \ln(1-t) = n\pi, \forall n = 0, 1, 2, \dots$

Тогда  $t$ , при котором выполняется это равенство, равно

$$t_0 = 1 - e^{-n\pi/v}. \quad (20)$$

При рассматриваемом пределе интегрирования (10) в интервале 0,1 для (20) имеем

$$t_0 = 1 - e^{-n\pi/v}. \quad (21)$$

Пусть в (21)  $v = 1$ , тогда для первого нуля (21) получим

$$t_{01} = 1 - e^{-\pi n} = 1 - e^0 = 1 \quad (n = 0). \quad (22)$$

Второй нуль периода

$$t_{02} = 1 - e^{-\pi} \approx 0,956786. \quad (23)$$

Третий нуль периода

$$t_{03} = 1 - e^{-2\pi} \approx 0,998133. \quad (24)$$

Для  $n + 1$  нуля

$$t_{0n+1} = 1 - e^{\pi n} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (25)$$

Для первого периода запишем

$$T_1 = t_{02} - t_{01} = 1 - e^{-2\pi}.$$

Для второго периода получим

$$T_2 = t_{04} - t_{03} = 1 - e^{-4\pi} - 1 + e^{-2\pi} = e^{-2\pi}(1 - e^{-2\pi}) = T_1 e^{-2\pi}. \quad (26)$$

Обобщая для  $n$ -ного периода

$$T_n = T_{n-1} e^{-2\pi} \quad \forall n = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (27)$$

$$\text{или } T_n = T_1 e^{-2\pi(n-1)} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Из (24), (25), (26) следует, что рассматриваемая функция носит характер параметрически периодической тригонометрически-логарифмической функции. Таким образом, для всех периодов гармоник ПМ, равной  $v = 1$ , необходимо вычислить значение первого периода  $T_1 = 1 - e^{-2\pi}$ , а затем, вычисляя  $e^{-2\pi(n-1)}$  для  $n = 1, 2, 3, \dots$ , можем получить периоды функции  $(1-x)^{z-1}$  при  $x \in [0, 1)$ , т. е.

$$T_1 = 1 - e^{-2\pi};$$

$$T_2 = T_1 e^{-2\pi};$$

$$T_3 = T_1 e^{-4\pi};$$

$$T_4 = T_1 e^{-6\pi};$$

$$T_n = T_1 e^{-2\pi(n-1)}; \text{ при } n = 1, 2, 3, \dots$$

Затем необходимо определить величину шага дискретизации  $\Delta x$  для первого периода первой гармоники.

Его можно определить исходя из условий применения теоремы Котельникова:

$$\Delta x = \frac{1}{2F_b}, \quad (29)$$

где  $F_b$  – верхнее значение частоты спектра представления сигнала.

Так как в анализируемом сигнале  $F_b = \infty$ , то естественно необходимо выбрать значение компьютерной бесконечности. Это возможно сделать из заданной погрешности представления площади периода

$$\delta = \frac{S_u - S_{\text{оц}}}{S_u} = 1 - \frac{S_{\text{оц}}}{S_u}, \quad (30)$$

где  $S_u$  – истинное значение;  $S_{\text{оц}}$  – оценочное значение.

Если задано  $\delta_{\text{доп}}$ , то оно будет равно  $\delta_{\text{доп}} = 1 - \frac{S_{\text{оц}}}{S_u}$ , тогда

$$S_{\text{оц}} = (1 - \delta_{\text{доп}}) S_u. \quad (31)$$

А  $S_{\text{оц}}$  является функцией  $\Delta x$ , определяя ее, получим число отсчетов на первый период

$$N = \frac{T_1}{\Delta x}.$$

После чего для второго периода, чтобы оставить число отсчетов, равным  $N$ , надо  $\Delta x$  умножить на коэффициент увеличения  $T_2$ .

$$\Delta x_2 = \Delta x e^{-2\pi}.$$

Аналогично для  $n$ -ного периода

$$\Delta x_n = \Delta x e^{-2\pi(n-1)}. \quad (32)$$

Теперь необходимо распространить полученный алгоритм на гармоники  $v = 2, 3, \dots, M$ . Распространяя (24), (25), (26), (27) на  $m$  гармоник:  $m = 1, 2, 3, \dots, M$  ( $M$  – число анализируемых гармоник), получим

$$T_{1m} = 1 - e^{-\frac{2\pi}{m}}. \quad (33)$$

Например,

$$m = 1, T_{11} = 1 - e^{-\frac{2\pi}{1}} = 1 - e^{-2\pi};$$

$$m = 2, T_{12} = 1 - e^{-\frac{2\pi}{2}} = 1 - e^{-\pi};$$

$$m = 3, T_{13} = 1 - e^{-\frac{2\pi}{3}}.$$

Тогда (18) запишется для  $m$ -той гармоники следующим образом:

$$T_{nm} = T_{1m} e^{-\frac{2\pi(n-1)}{m}}, n = 1, 2, 3, \dots N; m = 1, 2, 3, \dots M. \quad (34)$$

Из (34) следует, что для каждой  $m$ -той гармоники необходимо выполнить первый период и относительно его выписать последующие периоды  $m$ -той гармоники. На рис. 1 представлена блок-схема генератора гармоник ПМ.

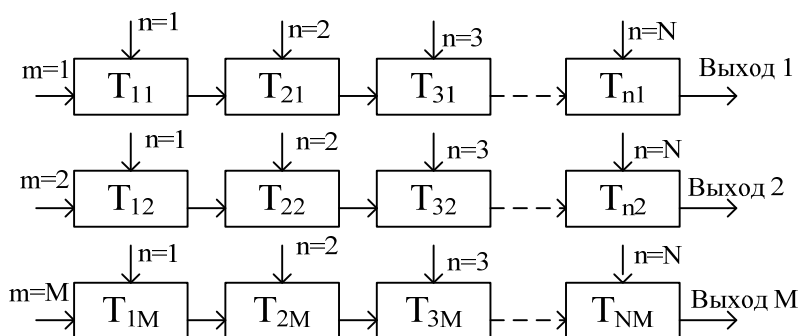


Рис. 2. Блок-схема генератора гармоник ядра ИПМ

Рассмотрим математическую модель, которую будем применять для создания цифровой модели.

Ядро бета-функции представим в виде

$$\alpha^{S-1} = \alpha^{S-1}(\cos(n \ln(1-x) + j \sin(n \ln x))). \quad (35)$$

Для второй подынтегральной функции (1) получим

$$(1-x)^{Z-1} = (1-x)^{\delta-1}(\cos v \ln(1-x) + j \sin(v \ln(1-x))). \quad (36)$$

Произведение (25) и (26) имеет следующее выражение:

$$x^{\delta-1}(1-x)^{\delta-1}(\cos(u \ln x + v \ln(1-x)) + j \sin(u \ln x + v \ln(1-x))). \quad (37)$$

Выполняя преобразования (27), окончательно получим

$$x^{S-1}(1-x)^{Z-1} = x^{\delta-1}(1-x)^{\delta-1}[\cos(u \ln x + v \ln(1-x)) + j \sin(u \ln x + v \ln(1-x))].$$

Подставив в (1), имеем:

$$B(\sigma, u; \delta, v) = \int_0^1 x^{\delta-1}(1-x)^{\delta-1} \cos(u \ln x + v \ln(1-x)) dx + j \int_0^1 x^{\delta-1}(1-x)^{\delta-1} \sin(u \ln x + v \ln(1-x)) dx. \quad (38)$$

Или в общем случае:

$$B(\sigma, u; \delta, v) = R_e\{B(\cdot)\} + I_m\{B(\cdot)\}. \quad (39)$$

Тогда для модуля получим

$$|B(\sigma, u; \delta, v)| = \sqrt{R_e^2\{B(\cdot)\} + I_m^2\{B(\cdot)\}}, \quad (40)$$

для аргумента:

$$\varphi(\sigma, u; \delta, v) = -\arctg \frac{I_m\{B(\cdot)\}}{R_e\{B(\cdot)\}}. \quad (41)$$

Для прямоты запишем модуль мнимой части в дискретной форме для первой гармоники:



$$\begin{aligned}
 I_m\{B(\cdot)\} = & \sum_{i=1}^N (i\Delta x_{11})^{\delta-1} (1 - i\Delta x_{11})^{\delta-1} \sin(\ln i\Delta x_{11}) \\
 & + \ln(1 - i\Delta x_{11}))\Delta x_{11} + \sum_{i=1}^N (i\Delta x_{21})^{\delta-1} (1 - i\Delta x_{21})^{\delta-1} \sin(\ln i\Delta x_{21}) \\
 & + \ln(1 - i\Delta x_{21}))\Delta x_{21} + \dots \\
 & + \sum_{i=1}^N (i\Delta x_{N1})^{\delta-1} (1 - i\Delta x_{N1})^{\delta-1} \sin(\ln i\Delta x_{N1}) + \ln(1 - i\Delta x_{N1}))\Delta x_{N1}.
 \end{aligned}$$

В заключение отметим, что в результате проведенных исследований теории бета-функции удалось создать, используя свойства параметрически периодических колебаний, принадлежащих классу тригонометрически-логарифмических функций, цифровую модель представления бета-функции и быстродействующий алгоритм ее реализации с заданной точностью.

### Литература

1. Philip Zwicke E. A New Implementation of the Mellin Transform and its Application to Radar Classification of Ships // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine. Intelligence. – 1983. – V. 5, № 2. – Pp. 191–199.
2. Harley J.B. and Moura J.M.F. Guided wave temperature compensation with the scale-invariant correlation coefficient // IEEE Ultrasonics Symposium. – Orlando FL. – 2011. 21 oct. – Pp. 1068–1071.
2. De Sena A., Rocchesso D. A Fast Mellin and Scale Transform. EURASIP J. Adv. Signal Process. – 2007. № 089170. – Режим доступа: <https://doi.org/10.1155/2007/89170>.
4. Derrode S., Ghorbel F. Robust and efficient Fourier-Mellin transform approximations for gray-level image reconstruction and complete invariant description // Computer Vision and Image Understanding. – 2001. – № 83 (1). – Pp. 57–78.
5. Макаров А.М., Постовалов С.С. Результаты исследования точности представления параметрически периодических нестационарных функций ядра интегрального преобразования Меллина // Университетские чтения: материалы научно-методических чтений ПГУ. – Пятигорск: Издательство Пятигорского государственного университета, 2020. – С. 22–46.
6. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник для вузов; в 3 т. – 15-е изд., стер. – СПб.: Лань, [б. г.]. – Т. 2: Курс дифференциального и интегрального исчисления, 2021. – 800 с.
7. Виленкин Н.Я. Специальные функции и теория представлений групп. – М.: Наука, 1991. – 516 с.
8. Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятецкий-Шапиро И.И. Теория представлений и автоморфные функции. – М.: Наука, 1966.
9. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 430 с.
10. Грин М., Шварц Дж., Виттен Э. Теория суперструн. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 518 с.
11. Владимиров В.С. Адельные формулы Фрэйнда–Виттена для амплитуд Венециано и Вирасаро–Шапиро // УМН. – 1993. – Т. 48, вып. 6 (294). – С. 3–38.

12. Шинтан Яу, Стив Надис. Теория струн и струнные измерения Вселенной. – СПб.: Питер, 2004. – 400 с.

13. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. Т. 1. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. – М.: Наука, 1965.

*Поступила в редакцию 16 апреля 2021 г.*

UDC 519.6

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-3-79–88

### **Foundations of the Theory of Mellin's Integral Transform and Development on Its Basis of a Digital Model of the Euler Integral of the First Kind**

*A.M. Makarov<sup>1</sup>, A.S. Ermakov<sup>2</sup>*

<sup>1</sup> *Pyatigorsk State University (PSU); Russia, 357532, Stavropol Territory, Pyatigorsk, Kalinin ave., 9; mellin\_22@mail.ru;*

<sup>2</sup> *LLC "Kaskad"; Russia, 357500, Stavropol Territory, Pyatigorsk, Moskovskaya st., 68a; ermakov@cascad-kmv.ru*

Mathematical modeling of information processing is a very important task in all scientific studies. The found mathematical model, in the form of the Euler beta function in the studies of Gabriele Veneziano and Mahiko Suzuki, showed its high efficiency in their quantum research. Moreover, in the Calabi–Yau string theory, the beta function turned out to be the decisive question of preserving the condition of scale invariance of a two-dimensional quantum field after performing integration over all possible geometries of the world sheet. The beta function serves as a criterion for the scale invariance of the quantum field, that is, it allows you to answer the question whether this field remains in the Calabi–Yau space or not. As noted by the author of the theory of that space, Yau Shintun, calculations by the formula evaluation obtained by expansion in a series are very much complicated. But the implementation of a digital model of a beta function for working with it in computer systems is a laborious task, which is complicated by a high-precision representation of its integrand functions, which require a large number of intermediate operations, which entails a heavy load on the computing power of computer systems. The paper considers the digital model of beta-function in which the values found the computer zero and infinity for which numerical values of beta function with a given accuracy of its calculation are determined. It is shown that the beta function is a special case of the Mellin transformation and this fact allowed the author to use the results of the theorem they obtained and propose a digital model for calculating the beta function for a given accuracy.

**Keywords:** *Mellin transforms, beta function, Euler function of the first kind, digital model.*

*Received 16 April 2021*