УДК 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-74–79

Н.Ш. Загиров, Т.Ю. Гаджиева

Об одной гипотезе, связанной с постоянной Маркова

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; nizam_zagirov@mail.ru, tamila.usup@mal.ru

Хорошо известны оценки отношения нормы производной многочлена заданной степени к норме самого многочлена, постоянной Маркова, в различных пространствах. Такие оценки, впервые полученные братьями Марковыми, были позже обобщены в разных направлениях. Оказалось, что значение постоянной Маркова не изменится, если в знаменателе названного отношения взять не норму многочлена, а его максимальное по модулю значение в точках экстремума многочлена Чебышёва. Примерно через сто лет после братьев Марковых А. Шадрин установил некоторые условия, при которых точки экстремума многочлена Чебышёва можно заменить на точки экстремума другого многочлена. Он обосновал гипотезу о том, что постоянная Маркова не изменится, если многочлен Чебышёва заменить на любой многочлен, имеющий максимальное количество простых нулей на заданном интервале. Позже Боянов и Николов установили, что в рассматриваемой проблеме многочлены Чебышёва можно заменить на ультрасферические многочлены, что говорило в пользу справедливости гипотезы. Тем не менее, в настоящей статье нами установлено, что гипотеза А. Шадрина относительно неравенства Маркова неверна.

Ключевые слова: *оценки постоянной Маркова, ортонормированный многочлен, весовая функция.*

Введение

Через π_n обозначаем множество всех алгебраических многочленов степени не выше, чем n, $\|\cdot\|$ – равномерная на отрезке $[-1,1]$ норма:

$$M_{n,k} = \sup\left\{ \frac{\|p^{(k)}\|}{\|p\|} : p \in \pi_n, p \neq 0 \right\}$$

называется постоянной Маркова; $T_n(x) = \cos(narccos(x))$ – многочлен Чебышева, $\tau_i = \cos\frac{i\pi}{n}$, $i = 0, 1, ..., n$ – все точки его экстремумов.

Краткая история вопроса такова. В 1889 г. [1] А.А. Марков установил, что

$$M_{n,1} \leq n^2;$$

в 1892 г. [2] его брат В.А. Марков определил оценки $M_{n,k}$ для любого k:

$$M_{n,k} \le \frac{n^2(n^2-1)...(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2k-1)}.$$

В работе [3] (1941 г.) доказано, что оценка производных остается в силе, если $|p(\tau_i)| \le 1$, $i = 0, 1, ..., n$.

Сравнительно недавно (в 1992 г.) [4] А. Шадрин показал, что неравенство

$$\left\|p^{(k)}\right\| \le \frac{n^2(n^2-1)...(n^2-(k-1)^2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot (2k-1)}$$

при условии

$$|p(\tau_i)| \le 1,\ i = 0, 1, ..., n$$

легко получается из результатов В.А. Маркова [2]. А. Шадрин рассматривает более общую ситуацию, заменив $T_n(x)$ на некоторый многочлен $q \in \Pi_n$, имеющий *n* различных корней на интервале $(-1,1)$. Пусть

$$-1 = t_0 < t_1 < ... < t_{n-1} < t_n = 1$$

– все точки экстремума многочлена $q(x)$. Он доказал следующее: если $p \in \pi_n$ и $|p(t_i)| \le |q(t_i)|$, $i = 0, 1, ..., n$, то для любого $x \in [-1,1]$ справедливо неравенство

$$\left|p^{(k)}(x)\right| \le \max\left\{\left|q^{(k)}(x)\right|, \left|\frac{1}{k}(x^2-1)q^{(k+1)}(x) + xq^{(k)}(x)\right|\right\}. \quad (1)$$

Как следствие, отсюда получается неравенство Маркова и для $k = n-1, n$:

$$\left\|p^{(k)}(x)\right\| \le \left\|q^{(k)}\right\|. \quad (2)$$

Простой пример [4] показывает, что из оценки (1) для всех k оценка (2) не получается. Тем не менее, он приводит ряд доводов в пользу гипотезы о том, что условие

$$|p(t_i)| \le |q(t_i)|,\ i = 0, 1, ..., n$$

влечет неравенство

$$\left\|p^{(k)}\right\| \le \left\|q^{(k)}\right\|.$$

Очевидно, это так, когда $q(x) = T_n(x)$. Вера в гипотезу укрепилась после работы [5] (1996 г.), в которой авторы доказали справедливость гипотезы, когда $q(x) = P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$, где $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ – ультрасферические многочлены [6]. Смежные вопросы были разобраны в работах [7–10].

В данной статье строится многочлен $q(x)$, для которого гипотеза Шадрина не выполняется, $k = 1$.

1. Метод исследования и основной результат

Для определенности будем считать *n* четным числом, $n \ge 8$.

Положим

$$q(x)=\frac{1}{2n}T_n(x)-\frac{1}{2n-4}T_{n-2}(x)+\frac{1}{n(n-2)}+\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n>0$, скажем, $\varepsilon_n=2^{-n}$.

Следующие свойства $q(x)$ проверяются непосредственно:

$$q(\pm1)=\varepsilon_n;$$

если

$$\alpha_i=\frac{2(n-i)-1}{2(n-1)}\pi,\, t_i=\cos\alpha_i,\; i=1,...,n-1,$$

то

$$q(t_i)=\frac{(-1)^i(n-1)\sin\alpha_i}{n(n-2)}\left(1+\frac{(-1)^i}{(n-1)\sin\alpha_i}+\frac{\varepsilon_n\cdot n(n-2)}{(n-1)\sin\alpha_i}(-1)^i\right); \qquad (3)$$

$$q'(x)=T_{n-1}(x) \text{ и } T_{n-1}(t_i)=0,$$

т. е. если $t_0=-1$, $t_n=1$, то t_i – все точки экстремума многочлена.

Так как ε_n очень маленькое и $1+\dfrac{(-1)^i}{(n-1)\sin\alpha_i}>0$ при всех i, то $q(t_i)\cdot q(t_{i+1})<0$, $i=0,...,n-1$.

Наконец, $\|q'\|=1$.

Фиксируем некоторое нечетное число $j>\dfrac{n}{2}$.

Определим многочлен $p\in\Pi_n$ по точкам t_i:

$$p(t_i)=q(t_i),\text{ если } i\le j-1,$$

$$p(t_i)=-q(t_i),\text{ если } i=j,j+1,...,n.$$

Теорема. Справедлива следующая оценка:

$$p'(t_j)>\frac{4}{3\pi}\ln(n-j)\cdot$$

Доказательство. Положим

$$w(x)=(x^2-1)T_{n-1}(x),$$

$$w_i(x)=\frac{w(x)}{x-t_i},\; i=0,1,...,n.$$

Так как

$$w_i'(x)=\frac{(x^2-2xt_i+1)T_{n-1}(x)+(x^2-1)(x-t_i)T_{n-1}'(x)}{(x-t_i)^2},$$

то

$$w(\pm1)=2,$$

$$w'(t_i)=(-1)^i(n-1)\sin\alpha_i,\ i=1,...,n-1,$$

$$w_i'(t_j)=(-1)^j\frac{(n-1)\sin\alpha_j}{t_j-t_i},\ i\neq j,\ j=1,...,n-1,\ i=1,...,n-1.$$

$$w_j'(t_j)=\frac{3}{2}(n-1)(-1)^{j+1}\frac{t_j}{\sin\alpha_j}.$$

Так как $j>\frac{n}{2}$ нечетное число, то

$$w_j'(t_j)>0,$$

$$w_i'(t_j)=\frac{(n-1)\sin\alpha_j}{t_i-t_j}>0, \text{ если } i=j,...,n.$$

По формуле Лагранжа

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n}w_i(x)\frac{p(t_i)}{w'(t_i)}$$

$$\text{и } p'(x)=\sum_{i=0}^{n}w_i'(x)\frac{p(t_i)}{w'(t_i)}.$$

Если $x=t_j$, то

$$p'(t_j)=\sum_{i=j}^{n}w_i'(t_j)\frac{q(t_i)}{w'(t_i)}-\sum_{i=0}^{j-1}w_i'(t_j)\frac{q(t_i)}{w'(t_i)}, \text{ т. е.}$$

$$p'(t_j)=2\sum_{i=j}^{n}w_i'(t_j)\frac{q(t_i)}{w'(t_i)}-\sum_{i=0}^{n}w_i'(t_j)\frac{q(t_i)}{w'(t_i)}=2\sum_{i=j}^{n}w_i'(t_j)\frac{q(t_i)}{w'(t_i)}-T_{n-1}(t_j).$$

Имеем $T_{n-1}(t_j)=0$; оценим снизу сумму $S=\sum_{i=j}^{n}w_i'(t_j)\frac{q(t_i)}{w'(t_i)}$.

Прежде всего

$$S>\sum_{i=j+1}^{n-1}w_i'(t_j)\frac{q(t_i)}{w'(t_i)}.$$

$$w_i'(t_j)=\frac{(n-1)\sin\alpha_j}{t_i-t_j}=\frac{(n-1)\sin\alpha_j}{\sin\frac{i-j}{2(n-1)}\pi\cdot\sin\frac{2n-i-j-1}{2(n-1)}\pi}>\frac{2(n-1)^2}{\pi(i-j)},$$

так как $\sin x\leq x$, $x>0$ и $\sin\frac{2n-i-j-1}{2(n-1)}\pi\leq\sin\alpha_j$

для $j>\frac{n}{2}$.

Далее, так как ε_n очень маленькое, то

$$|q(t_i)| = \frac{(n-1)\sin\alpha_i}{n(n-2)}\left(1+\frac{(-1)^i}{(n-1)\sin\alpha_i}+\frac{\varepsilon_n\cdot n(n-2)}{(n-1)\sin\alpha_i}(-1)^i\right)\geq$$

$$\geq\frac{(n-1)\sin\alpha_i}{n(n-2)}\left(1-\frac{1}{(n-1)\sin\alpha_i}\right)\geq\frac{(n-1)\sin\alpha_i}{n(n-2)}\left(1-\frac{1}{(n-1)\sin\alpha_{n-1}}\right).$$

Используя оценку $\sin x \geq \frac{3}{\pi}x$ для $x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$, получаем, что

$$|q(t_i)|\geq\frac{(n-1)\sin\alpha_i}{3n(n-2)}.$$

Следовательно,

$$\frac{q(t_i)}{w'(t_i)}\geq\frac{1}{3n(n-2)}$$

и

$$S_j > \frac{2}{\pi}\frac{(n-1)^2}{3n(n-2)}\sum_{i=j+1}^{n-1}\frac{1}{i-j}.$$

Так как

$$\sum_{i=j+1}^{n-1}\frac{1}{i-j}=\sum_{k=1}^{n-j-1}\frac{1}{k}>\ln(n-j),$$

то

$$S_j > \frac{2}{\pi}\frac{(n-1)^2}{3n(n-2)}\ln(n-j)\cdot$$

Остается заметить, что

$$\frac{(n-1)^2}{n(n-2)}>1\cdot$$

Теорема доказана.

Заключение

Построив конкретный многочлен заданной степени, мы установили, что гипотеза Шадрина об оценке производных алгебраических многочленов для $k=1$ неверна.

Литература

1. *Марков А.А.* Об одном вопросе Д.И. Менделеева // Изв. Петербургской АН. – 1989. – Т. 62. – С. 51–75.

2. *Марков В.А.* О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. – СПб., 1892. – 117 с.

3. *Duffin R.I., Schaeffer A.C.* A Refinement of an Inequality of the brothers MarkoffTrunc // Amer. Math. Soc. – 1941. – № 50. – Pp. 517–528.

4. *Shadrin A.* Interpolation with Lagrange polynomials A Simple proof of Markov inequality and some its generalizations // Approx. Theory and its Appl. – Sept. – 1992. – Vol. 8, iss. 4. – Pp. 51–61.

5. *Bojanov B., Nicolov G.* Duffin and Schaeffer type inequality for Ultraspherical Polynomials // J. of Approx. Theory. – 1996. – № 84. – Pp. 129–138.
6. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены: пер. с анг. – М.: Наука; Гл. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962. – 500 с.
7. *Загиров Н.Ш., Пашаева З.Ш.* Оценка значений многочленов внутри отрезка // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 67–74.
8. *Загиров Н.Ш., Гаджиева Т.Ю.* Оценки постоянной А.А. Маркова в весовом пространстве Якоби // Вестник ДГУ. – 2018. – Вып. 3. – С. 54–61.
9. *Загиров Н.Ш., Ахмадова М.А., Шамхалова Т.Н.* Постоянная Маркова для весовых пространств // Вестник ДГУ. – 2012. – Вып. 6. – С. 75–80.
10. *Загиров Н.Ш., Гаджиева Т.Ю.* Оценки постоянной Маркова в весовых пространствах // Вестник ДГУ. – 2019. – Вып. 1. – С. 61–66.

Поступила в редакцию 22 марта 2021 г.

UDC 517.5

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-74–79

On a Hypothesis Related to the Markov Constant

N.Sh. Zagirov, T.U. Gadzhieva

Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; nizam_zagirov@mail.ru, tamila.usup@mal.ru

There are well known estimates for the ratio of the norm of the derivative of a polynomial of a given degree to the norm of the polynomial itself, the Markov constant, in various spaces. These estimates, first obtained by the Markov brothers, were later generalized in different directions. It turns out that the value of the Markov constant does not change if in the denominator of the mentioned ratio one does not take the norm of the polynomial, but its maximum modulo value at the extremum points of the Chebyshev polynomial. About a hundred years after the Markov brothers, A. Shadrin established certain conditions under which the extremum points of a Chebyshev polynomial can be replaced by the extremum points of another polynomial. He substantiated the conjecture that the Markov constant did not change if the Chebyshev polynomial was replaced by any polynomial that has the maximum number of simple zeros on a given interval. Later Boyanov and Nikolov establish that in the problem under consideration, the Chebyshev polynomials can be replaced by ultraspherical polynomials, which speaks in favor of the validity of the hypothesis. Nevertheless, in this article we have established that A. Shadrin's conjecture regarding the Markov inequality is incorrect.

Keywords: *estimations of a Markov constant, orthonormal polynomial, weight function.*

Received 22 March 2021