УДК 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-61–73

***М.М. Сиражудинов*[1, 2]*, М.Л. Амаева*[1]**

Оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы *n*-уравнений Бельтрами

[1] *Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; siraznmagomed@yandex.ru, markha15@mail.ru;*

[2] *Дагестанский федеральный исследовательский центр РАН; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 45*

При описании математических моделей сильно неоднородных сред их локальные характеристики обычно выражаются функциями вида $a(\varepsilon^{-1}x)$, где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, причем функция $a(x)$ имеет упорядоченную структуру (она периодическая, почти периодическая, реализация однородного случайного поля и др.). Поэтому соответствующие математические модели есть дифференциальные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Дифференциальные уравнения такого типа невозможно решить, даже используя современные суперкомпьютеры.

В физике сильно неоднородные среды заменяют на так называемые эффективные среды, то есть на среды с постоянными физическими характеристиками. В математике замена сильно неоднородных сред на эффективные среды означает переход от дифференциального уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами, то есть к усредненному уравнению.

В статье рассматриваются вопросы усреднения, а также вопросы, связанные с последующей оценкой погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы n-уравнений Бельтрами. Получены оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы n-уравнений Бельтрами при минимальных требованиях на коэффициенты – они измеримые ограниченные периодические функции.

Ключевые слова*: уравнение Бельтрами, усреднение, G-сходимость.*

Введение

Теория усреднения (раздел дифференциальных уравнений) бурно развивалась во второй половине прошлого столетия. Теория усреднения имеет многочисленные приложения в различных разделах физики и механики сплошных сред. В работе [1] М.Ш. Бирмана и Т.А. Суслиной получены оценки погрешности усреднения (операторные оценки усреднения) дивергентных эллиптических уравнений. Впервые понятие «операторные оценки усреднения» использовал В.В. Жиков [2], а в работе [3] описаны операторные оценки усреднения для дивергентных операторов. В статье рассматриваются оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы *n*-уравнений Бельтрами. Вопросы, связанные с G-сходимостью уравнений Бельтрами, а также вопросы усреднения рассматриваются в работах [4; 5; 6]. С помощью метода интегральных тождеств получены усредненные уравнения, причем этот метод не позволяет оценить скорость сходимости решения задачи Римана–Гильберта к решению усредненной задачи. Такие оценки получены асимптотическими методами. Получены оценки погрешности усреднения задачи Римана–Гильберта для системы n-уравнений Бельтрами при минимальных требованиях на коэффициенты – они измеримые ограниченные периодические функции.

Обозначения: $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ – n-мерное евклидово пространство; $Q \subset R^n$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей; $\bar{Q}$ – замыкание области Q; $\partial_{\bar{z}} = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 + i\mathcal{D}_2)$, $\partial_z = 2^{-1}(\mathcal{D}_1 - i\mathcal{D}_2)$; $\mathcal{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1{,}2$; i – мнимая единица; $L_2(Q;\mathbb{C})$ – пространство Лебега комплекснозначных квадратично-суммируемых вектор-функций; $W_p^k(Q;\mathbb{C})$ $(k \in \mathbb{N}, 1 \le p < \infty)$ – пространство Соболева комплекснозначных функций; $W_2^1(Q;\mathbb{C})$ – подпространство пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, состоящее из элементов с нулевым следом на границе; $\square$, $\square_{\mathrm{T}}$ – квадрат со стороной, параллельной оси координат (ячейка периодов); T – длина стороны; $|\square| = \mathrm{T}^2$ – площадь квадрата □. Функция периода T по каждой переменной называется периодической; $\langle u \rangle$ – среднее значение периодической функции u, то есть

$$\langle u \rangle = |\square|^{-1} \int_\square u(x)dx.$$

$L_p(\square;\mathbb{C})$, $W_p^1(\square;\mathbb{C})$, $p \ge 1$ – пространство Лебега и Соболева периодических функций, $W_2^{-1}(\square;\mathbb{C})$ – сопряженное $W_2^1(\square;\mathbb{C})$ пространство. Пространство, сопряженное с пространством $L_2(\square;\mathbb{C})$, отождествляется с $L_2(\square;\mathbb{C})$, что возможно в силу теоремы Рисса.

$\rightharpoonup$ – знак слабой сходимости в соответствующем пространстве.

Как известно, если $\mathrm{g}(x)$ $(x \in \mathbb{R}^n)$ – периодическая функция, $\mathrm{g} \in L_2(\square;\mathbb{C})$, $p \ge 1$, то тогда $\mathrm{g}(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle \mathrm{g} \rangle$ в пространстве $L_{p\,\mathrm{loc}}(Q)$ при $\varepsilon \to 0$, где Q – произвольная ограниченная область пространства.

$W_0(Q)$ – подпространство пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, элементы которого удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\mathrm{Re}\, u|_{\partial Q} = 0,\ \int_Q \mathrm{Im}\ u\, dx = 0.$$

Уравнение и оператора той или иной соответствующей краевой задачи обозначим одним и тем же символом.

$y_j = \varepsilon^{-1}x_j$, $j = 1, \dots, n$ – «быстрые» переменные; ∇, ∇_y – градиент; y в индексе означает, что производные берутся по переменным $y_1, \dots, y_n$.

1. Формулировка результатов

В пунктах 1.1, 1.2 собраны необходимые нам в дальнейшем известные результаты по усреднению задачи Римана–Гильберта для системы n-уравнений Бельтрами.

1.1. Задача Римана–Гильберта

Рассмотрим следующую задачу Римана–Гильберта для системы n-уравнений Бельтрами:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon = f \in L_2(Q;\mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q) = \left\{ u \in W_2^1(Q) \;|\mathrm{Re}\, u|_{\partial Q} = 0,\ \int_Q \mathrm{Im}\, u\, \mathrm{dx} = 0 \right\}, \end{cases} \qquad (1.1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, коэффициент $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\mu(x) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(x) & \cdots & \mu_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(x) & \cdots & \mu_{nn}(x) \end{pmatrix}$ – ограниченная измеримая периодическая квадратная матрица, удовлетворяющая условию эллиптичности:

$$\mathrm{vrai}\ \sup_{x\in Q}(\|\mu(x)\|) \le k_0 < 1, \qquad (1.2)$$

k_0 – постоянная (константа эллиптичности); $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$, $\|\mu(x)\|$ – норма матрицы $\mu(x)$, которая рассматривается как оператор умножения в $\mathbb{C}^n$.

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. *Задача Римана–Гильберта (1.1) однозначно разрешима для любой правой части из $L_2(Q;\mathbb{C})$ и любого $\varepsilon > 0$, причем имеют место априорные оценки:*

$$(1 - k_0)\|\partial_{\bar{z}} u\|^2_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le \mathrm{Re} \int_Q A_\varepsilon u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} dx,\ u \in W_0(Q),$$

$$(1 - k_0)\|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le \|A_\varepsilon u\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le (1 + k_0)\|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q;\mathbb{C})},$$

$$u \in W_0(Q),$$

где $A_\varepsilon u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u}$ *– скалярное произведение в* $\mathbb{C}^n$.

Теорема 1 доказывается аналогично случаю одного уравнения Бельтрами [4; 5; 7], поэтому мы опускаем доказательство.

Выражение

$$\|u\|_{W_0(Q)} = \|\partial_{\bar{z}} u\|_{L_2(Q;\mathbb{C})},\ u \in W_0(Q)$$

задает норму [4; 5; 7] в подпространстве $W_0(Q)$, эквивалентную норме исходного подпространства $W_2^1(\square;\mathbb{C})$, поэтому имеют место следующие оценки:

$$\mathrm{c}_1\|u\|_{W_2^1(\square;\mathbb{C})} \le \|A_\varepsilon u\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le \mathrm{c}_2\|u\|_{W_2^1(\square;\mathbb{C})}, \qquad (1.3)$$

где $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 > 0$ – постоянные, зависящие только от константы эллиптичности k_0 и области Q.

1.2. G-сходимость

Обозначим через $\mathcal{A}(k_0; Q)$ множество систем операторов Бельтрами (1.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $\mathcal{A}(k_0; Q)$ называется G-сходящейся в области Q к оператору $A_\varepsilon \in \mathcal{A}(k_0; Q)$ (обозначение $A_k \xrightarrow{G} A_\varepsilon$), если $A_k^{-1} \to A_\varepsilon^{-1}$.

Это определение ввиду оценок (1.3) и компактности вложения $W_2^1(\square; \mathbb{C}) \subset L_2(Q; \mathbb{C})$ эквивалентно следующему: последовательность операторов $\{A_k\}$ из класса $\mathcal{A}(k_0, Q)$ называется G-сходящейся в области Q к оператору $A_\varepsilon \in \mathcal{A}(k_0; Q)$, если для любого $f \in L_2(Q; \mathbb{C})$ последовательность u_k решений системы уравнений Бельтрами $A_k u_k = f$, $u_k \in W_0(Q)$ сходится в $L_2(Q; \mathbb{C})$ к решению системы уравнений Бельтрами $A_\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in W_0(Q)$. G-предел определен единственным образом. G-сходимость обладает свойством *сходимости «произвольных» решений:* пусть $A_k \xrightarrow{G} A_\varepsilon$, $u_k \to u_\varepsilon$ в $W_2^1(\square; \mathbb{C})$, $f_k \to f$ в $L_2(Q; \mathbb{C})$, $A_k u_k = f_k$, тогда $A_\varepsilon u_\varepsilon = f$ [4].

1.3. Усреднение

Рассмотрим задачу Римана–Гильберта для системы n-уравнений Бельтрами:

$$\begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon \equiv \partial_{\bar{z}} u_\varepsilon + \mu^\varepsilon \partial_z u_\varepsilon = f \in L_2(Q; \mathbb{C}), \\ u_\varepsilon \in W_0(Q) = \left\{ u \in W_2^1(Q) \,|\mathrm{Re}\, u|_{\partial Q} = 0, \ \int_Q \mathrm{Im}\, u \, \mathrm{dx} = 0 \right\}, \end{cases} \tag{1.4}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, коэффициент $\mu^\varepsilon = \mu(\varepsilon^{-1}x)$, $\mu(x) = \begin{pmatrix} \mu_{11}(x) & \cdots & \mu_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1}(x) & \cdots & \mu_{nn}(x) \end{pmatrix}$ – ограниченная измеримая периодическая квадратная матрица, которая удовлетворяет условию эллиптичности (1.2).

Заметим, что оператор A_ε принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0; Q)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Скажем, что семейство операторов $\{A_\varepsilon\}$ допускает усреднение, если для любой правой части f семейство решений u_ε задачи (1.1) сходится в L_2 при $\varepsilon \to 0$ к решению аналогичной задачи с постоянной матрицей коэффициентов.

Большую роль в вопросах усреднения играет ядро оператора $\mathcal{A}^*$, сопряженного с оператором следующей периодической задачи:

$$\mathcal{A}u \equiv \partial_{\bar{z}} u + \mu \partial_z u = f \in L_2(\square; \mathbb{C}), \quad u \in W_2^1(\square; \mathbb{C}). \tag{1.5}$$

Далее будут сформулированы результаты по периодической задаче.

ТЕОРЕМА 2. *Справедливы следующие утверждения:*

- *Для периодической задачи (1.5) имеет место «неравенство острого угла»*

$$(1 - k_0)\langle |\partial_{\bar{z}} u|^2 \rangle \le \mathrm{Re}\langle \mathcal{A}u \cdot \overline{\partial_{\bar{z}} u} \rangle, \ u \in W_2^1(\square; \mathbb{C}). \tag{1.6}$$

- *Периодическая задача (1.5) является фредгольмовой.*
- *Сопряженный оператор* $\mathcal{A}^*: L_2(\square; \mathbb{C}) \to W_2^{-1}(\square; \mathbb{C})$ *определяется следующей формулой:*

$$-\mathcal{A}^*\mathcal{L} = \partial_z\mathcal{L} + \partial_{\bar z}(\mu^*\mathcal{L}),\ \ \mathcal{L} \in L_2(\square;\mathbb{C}), \qquad \mathcal{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

где производные понимаются в смысле распределений, μ^**– сопряженная* μ *матрица, то есть матрица, полученная из* μ *транспонированием и переходом к комплексно-сопряженным элементам.*

- *Ядра* $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$, $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$ *– n-мерные подпространства соответствующих пространств, причем один из базисов*

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \mathcal{P}_n = \begin{pmatrix} p_{n1} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix}$$

ядра $\operatorname{Ker}\mathcal{A}^*$ *обладает следующим свойством: пусть*

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица со столбцами $\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n$*, тогда ее среднее значение есть единичная матрица* $\langle\mathcal{P}\rangle = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

За исключением утверждений о фредгольмовости и о ядре $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \mathbb{C}^n$ доказательство этой теоремы приводится в работе [8]. Из неравенства острого угла (1.6) вытекает утверждение о ядре $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Действительно, пусть $u \in W_2^1(\square;\mathbb{C})$ – решение однородной периодической задачи $Au = 0$. Тогда из неравенства острого угла (1.6) следует, что $\partial_{\bar z}u = 0$. В силу свойства регулярности решений оператора Коши–Римана отсюда следует, что u – обычная аналитическая вектор-функция. Так как она еще и периодическая, то согласно известной теореме Лиувилля $u = \text{const} \in \mathbb{C}^n$. Отсюда следует фредгольмовость, так как $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^* = \dim\operatorname{Ker}\mathcal{A} = n$. Доказательство равенства $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^* = 2$ дано в [8]. Аналогично доказывается равенство $\dim\operatorname{Ker}\mathcal{A}^* = n$.

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3 (об усреднении). *Для семейства операторов (1.4),* $A_\varepsilon = \partial_{\bar z} + \mu^\varepsilon\partial_z$ *имеет место усреднение, причем коэффициент усредненного оператора* $A_0 = \partial_{\bar z} + \mu^0\partial_z$ *есть постоянная матрица, определенная следующим равенством:*

$$\mu^0 = \langle\bar{\mathcal{P}}\mu\rangle = \left\langle\begin{pmatrix} \overline{p_{11}} & \cdots & \overline{p_{1n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{p_{n1}} & \cdots & \overline{p_{nn}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_{11} & \cdots & \mu_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n1} & \cdots & \mu_{nn} \end{pmatrix}\right\rangle, \tag{1.8}$$

где $\begin{pmatrix} p_{11} \\ \vdots \\ p_{1n} \end{pmatrix} = \mathcal{P}_1, \dots, \begin{pmatrix} p_{n1} \\ \vdots \\ p_{nn} \end{pmatrix} = \mathcal{P}_n$ *– базисные векторы ядра* $\mathcal{A}^*$ *из теоремы 2.*

1.4. Задача на ячейке

При усреднении системы уравнений Бельтрами используют асимптотические методы. Для применения этих методов нам потребуются периодические решения следующей задачи на ячейке:

$$\begin{cases} \mathcal{A}N \equiv \partial_{\bar{z}}N + \mu\partial_z N = 2^{-1}\big(\mu^0 - \mu(x)\big), \\ N \in W_2^1(\square), \end{cases} \tag{1.9}$$

где μ^0 – матрица коэффициентов усредненной системы (1.8).

ТЕОРЕМА 4 (о задаче на ячейке). *Периодическая задача (1.9) разрешима, и решения ее представляются в виде* $N + c$, *где* $c \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *– произвольная квадратная матрица порядка n с постоянными элементами, а N – квадратная матрица порядка n, среднее значение которой равно нулю.*

Кроме того, найдется показатель повышенной суммируемости $p > 2$, *зависящий только от константы эллиптичности* k_0, *такой, что матрица-функция N принадлежит пространству* $W_p^1(\square;\mathbb{C})$, *и для ее элементов* N_{lj} *имеют место неравенства*

$$\left\|N_{lj}\right\|_{L_\infty(\square)} \le c, \quad \left\|N_{lj}\right\|_{W^1_{p(\square;\mathbb{C})}} \le c, \quad l, j=1,\ldots,n, \tag{1.10}$$

где $c > 0$ *– постоянная, зависимая только от константы эллиптичности* k_0.

По теореме 2, чтобы периодическая задача (1.9) была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы матрица $2^{-1}\big(\mu^0 - \mu(x)\big)$ была ортогональна базисным элементам $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ ядра $\operatorname{Ker} \mathcal{A}^*$. Проверим это. Согласно (1.7), (1.8) мы имеем $2^{-1}\langle\bar{\mathcal{P}}\big(\mu^0 - \mu(x)\big)\rangle = 2^{-1}(\mu^0 - \langle\bar{\mathcal{P}}u\rangle) = 2^{-1}(\langle\bar{\mathcal{P}}u\rangle - \langle\bar{\mathcal{P}}u\rangle) = 0$. Отсюда следует, что периодическая задача (1.9) разрешима. Если $\widetilde{N}$ – решение задачи (1.9), то и $N = \widetilde{N} + c$, где *c* – постоянная матрица, также является решением задачи (1.9). Поэтому матрицу *c* подбирают таким образом, чтобы среднее значение N было равно 0.

Утверждения, которые касаются показателя повышенной суммируемости, приводятся в работе [8]. Теорема 4 доказана.

1.5. Оценки усреднения

Пусть в задаче (1.4) правая часть $f \in W_2^1(\square;\mathbb{C})$, а u_ε является решением системы уравнений Бельтрами (1.4). Как отмечалось в пункте 1.1, задача Римана–Гильберта (1.4) для системы уравнений Бельтрами однозначно разрешима. В качестве первого приближения к решению задачи (1.4) возьмем вектор-функцию

$$u_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon N(y)\partial_z u^0(x), \tag{1.11}$$

где $u^0 = \begin{pmatrix} u_1^0 \\ \vdots \\ u_n^0 \end{pmatrix}$ – решение задачи Римана–Гильберта для усредненной системы $A_0u^0 = f$, $u^0 \in W_0(Q)$; матрица $N(y)$ – периодическое решение задачи на ячейке (см. теорему 4); $y = \varepsilon^{-1}(x)$. При этом справедливо соотношение

$$A_\varepsilon u_1^\varepsilon = f + \varepsilon r_\varepsilon, \tag{1.12}$$

где $r_\varepsilon = N(y)(\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x) + \mu(y)\partial_{zz}^2 u^0(x))$; $y = \varepsilon^{-1}x$.

Имеет место следующая

ЛЕММА 1.

- *Усредненный оператор A_0 принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0; Q)$.*
- *Пусть правая часть f системы уравнений Бельтрами (1.4) принадлежит пространству $W_2^1(\square; \mathbb{C})$ и область Q имеет гладкую (класса C^2) границу, тогда решение усредненной задачи $A_0 u^0 = f$, $u_0 \in W_0(Q)$ принадлежит пространству $W_0(Q) \cap W_2^2(Q; \mathbb{C})$, первое приближение u_1^ε принадлежит $W_2^1(\square; \mathbb{C})$ и $r_\varepsilon \in L_2(Q; \mathbb{C})$.*

Сформулируем основное утверждение работы.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть правая часть f системы уравнений Бельтрами (1.4) принадлежит пространству $W_2^1(Q; \mathbb{C})$, Q – односвязная область с гладкой (класса C^2) границей, тогда имеют место оценки*

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})},\ \|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|f\|_{W_2^1(Q;\,\mathbb{C})}, \tag{1.13}$$

где $c > 0$ – *постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0 и области Q.*

Доказательство формулы (1.13) и теоремы 5 см. в п. 3.

2. Доказательство леммы 1

2.1. О некоторых оценках

Справедлива следующая

ЛЕММА 2. *Пусть u^0 – произвольная функция из пространства $W_2^2(Q; \mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, а $f = A_0 u^0$. Тогда справедливы следующие соотношения:*

$$\begin{aligned} \|A_\varepsilon u_1^\varepsilon - A_0 u^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} &\leq c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \\ \|A_\varepsilon u_1^\varepsilon - A_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} &\leq c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\|u_1^\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})},\ u_1^\varepsilon \to u^0 \text{ в } W_2^1(Q; \mathbb{C}) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{2.2}$$

где $c = c(k_0) > 0$ – *постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0; u_ε – решение задачи Римана–Гильберта для системы уравнений Бельтрами $A_\varepsilon u_\varepsilon = f$, $u_\varepsilon \in W_0(Q)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду (1.12) имеем

$$A_\varepsilon(u_1^\varepsilon - u_\varepsilon) = \varepsilon r_\varepsilon, \tag{2.3}$$

где $r_\varepsilon = N(y)\Big(\partial_{\bar{z}z}^2 u^0(x) + \mu(y)\partial_{zz}^2 u^0(x)\Big)$.

По теореме 4 матрица $N(y)$ ограничена постоянной, зависящей только от константы эллиптичности k_0, поэтому r_ε принадлежит пространству $L_2(Q;\mathbb{C})$. Отсюда и из (1.12), (2.3) с учетом $A_\varepsilon u_\varepsilon = f = A_0 u^0$ получим оба неравенства (2.1).

Докажем второе соотношение из (2.2). Первое следует из (1.11), из (1.11) вытекает:

$$\nabla u_1^\varepsilon = \nabla u^0 + \nabla_y N \partial_z u^0(x) + \varepsilon N(y) \nabla \partial_z u^0(x) =$$
$$= \nabla u^0 + (\nabla_y \mathrm{N} + \varepsilon \mathrm{N}(\mathrm{y})) \nabla \partial_z u^0(x).$$

Отсюда и из (1.11), учитывая свойство среднего значения $(\nabla N(\varepsilon^{-1}x) \rightharpoonup \langle \nabla N \rangle = 0$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$ при $\varepsilon \to 0)$, получим $u_1^\varepsilon \rightharpoonup u^0$ в $W_2^1(Q;\mathbb{C})$. Лемма 2 доказана.

2.2. Доказательство леммы 1

Покажем, что оператор $A_0 = \partial_{\bar z} + \mu^0 \partial_z$ принадлежит классу $\mathcal{A}(k_0;Q)$. Пусть $\hat{A}$ является произвольной, предельной точкой семейства $\{A_\varepsilon\}$ (напомним, что класс $\mathcal{A}(k_0;Q)$ является компактным и семейство $\{A_\varepsilon\}$ – подмножество $\mathcal{A}(k_0;Q)$), т. е.

$$A_{\varepsilon_k} \xrightarrow{G} \hat{A} \text{ в области } Q \text{ при } \varepsilon_k \to 0, \tag{2.4}$$

где $\{\varepsilon_k\} \subset \{\varepsilon\}$. Пусть $u^0 \in C^2(\bar{Q}) \cap W_0(Q)$, $f = A_0 u^0$. Тогда отсюда из (2.3) леммы 2 и $A_\varepsilon u_\varepsilon = f = A_0 u^0$ имеем:

$$A_{\varepsilon_k} u_1^{\varepsilon_k} = f + \alpha_{\varepsilon_k}, \tag{2.5}$$

$\alpha_{\varepsilon_k} = o(\varepsilon_k)$ в $L_2(Q;\mathbb{C})$ при $\varepsilon_k \to 0$. Ввиду (2.2) мы получим

$$u_1^{\varepsilon_k} \to u^0 \text{ в } W_2^1(Q;\mathbb{C}) \text{ при } \varepsilon_k \to 0.$$

Из (2.4) и (2.5) с учетом свойства сходимости произвольных решений (см. п. 1.2) получим $\hat{A} u^0 = f$. Поэтому имеем $A_0 u^0 = \hat{A} u^0$ для любой вектор-функции $u^0 \in C^2(\bar{Q}) \cap W_0(Q)$. Следовательно, $A_0 = \hat{A} \in \mathcal{A}(k_0;Q)$ ввиду всюду плотности множества $C^2(\bar{Q}) \cap W_0(Q)$ в $W_0(Q)$.

Итак, оператор A_0 является эллиптическим из класса $\mathcal{A}(k_0;Q)$. Пусть u^0 – решение системы уравнений Бельтрами $A_0 u^0 = f \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$, $u \in W_0(Q)$. С учетом свойств регулярности решений эллиптических задач [9] u^0 принадлежит пространству $W_2^2(Q;\mathbb{C})$. Остальные утверждения вытекают аналогично лемме 2. Лемма 1 доказана.

3. Доказательство теоремы 5

В доказательстве теоремы 5 потребуется оценка интеграла по приграничной полосе области Q, которую будем обозначать через Q_ε, где ε – ширина полосы.

Приведем данную оценку.

Пусть граница ∂Q области Q принадлежит классу C^1. Тогда $\forall\, u \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$ для достаточно малых ε с любым показателем $q > 1$ имеет место оценка:

$$\|u\|_{L_q(Q_\varepsilon;\mathbb{C})} \le c\sqrt[q]{\varepsilon}\|u\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}, \tag{3.1}$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависимая от ε и u.

Действительно, для следа функции из пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$ на гладкой (класса C^1) кривой Г имеет место оценка

$$\|u\|_{L_q(\Gamma)} \le c(\Gamma)\|u\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})},$$

где $c(\Gamma) > 0$ – норма оператора вложения $W_2^1(Q;\mathbb{C}) \subset L_q(\Gamma)$ с любым показателем $q > 1$, при этом нормы операторов вложения при малых гладких деформациях гладкой кривой Г равномерно ограничены [10, гл. 2, § 2]. Отсюда легко следует оценка (3.1). Отметим, что при $q = 2$ оценку (3.1) можно найти в [11, гл. 1, § 1].

Теперь приступим к доказательству оценки разности между точным решением u_ε задачи Римана–Гильберта (1.4) и первым приближением (1.11) u_1^ε.

Пусть u^0 является решением усредненной задачи Римана–Гильберта для усредненного уравнения из теоремы 3 и пусть u^0 принадлежит пространству $W_2^2(Q;\mathbb{C}) \cap W_0(Q)$. Достаточно рассмотреть правую часть f задачи Римана–Гильберта из пространства $W_2^1(Q;\mathbb{C})$, для того чтобы обеспечить такую гладкость u^0 [9].

Первое приближение (1.11) u_1^ε не принадлежит пространству $W_0(Q)$. Из-за этого возникают определенные затруднения при оценке разности $u_\varepsilon - u_1^\varepsilon$. Для того чтобы избежать такие затруднения, рассмотрим семейство функций

$$\theta^\varepsilon(x) = \omega\big(\varepsilon^{-1}\rho(x,\partial Q)\big), \tag{3.2}$$

где $\rho(x,\partial Q)$ – расстояние от x до ∂Q,

$$\omega(t) = \begin{cases} t, \text{если } 0 \le t \le 1, \\ 1, \text{если } t > 1. \end{cases}$$

Очевидно, что семейство функций $\theta^\varepsilon(x)$ обладает следующими свойствами:

1°. $0 \le \theta^\varepsilon(x) \le 1$; $\theta^\varepsilon = 1$ вне ε – окрестности границы области Q;

2°. $\varepsilon|\nabla\theta^\varepsilon| \le c$ в Q, причем константа c не зависит от ε;

3°. $\theta^\varepsilon = 0$ на границе области Q.

Подправим первое приближение формулой

$$w_1^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)\big(N(y)\partial_z u^0(x)\big) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon, \tag{3.3}$$

где $|Q|$ – площадь области Q; N – периодическое решение из теоремы 4; $c_\varepsilon \in \mathbb{R}$ – действительное число, определенное формулой

$$c_\varepsilon = \int_Q \mathrm{Im}(\theta^\varepsilon(x)N(y)\partial_z u^0(x))dx.$$

Очевидно, что семейство c_ε равномерно ограничено по ε, и ввиду (1.10) имеем

$$|c_\varepsilon| \le c\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{3.3'}$$

где $c > 0$ – постоянная, зависящая только от постоянной эллиптичности k_0.

Так как $u^0 \in W_2^2(Q;\mathbb{C}) \cap W_0(Q)$, согласно (3.3) и свойству 3° семейства (3.2), получим $w_1^\varepsilon(x) \in W_0(Q)$.

Подправленное первое приближение (3.3) можно представить в следующем виде:

$$w_1^\varepsilon(x) = u_1^\varepsilon(x) - \varepsilon\big(1-\theta^\varepsilon(x)\big)N(y)\partial_z u^0(x) - i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon.$$

Оценим разность

$$u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x) = \varepsilon\big(1-\theta^\varepsilon(x)\big)N(y)\partial_z u^0(x) + i\varepsilon|Q|^{-1}c_\varepsilon. \quad (3.4)$$

Имеем

$$\nabla\big(u_1^\varepsilon(x) - w_1^\varepsilon(x)\big) =$$
$$-\varepsilon\nabla\theta^\varepsilon(x)N(y)\partial_z u^0(x) + \varepsilon\big(1-\theta^\varepsilon(x)\big)\nabla_y N(y)\partial_z u^0(x) +$$
$$+\varepsilon\big(1-\theta^\varepsilon(x)\big)N(y)\partial_z u^0(x) \equiv \mathfrak{A}_1^\varepsilon + \mathfrak{A}_2^\varepsilon + \mathfrak{A}_3^\varepsilon. \quad (3.4')$$

Согласно свойству 1° функции θ^ε каждое слагаемое правой части $(3.4')$ равно нулю вне ε – окрестности границы.

Здесь каждое слагаемое справа, согласно свойству 1° функции θ^ε, равно нулю вне ε – окрестности границы. Учитывая свойство 2° функции θ^ε с учетом (3.1), легко получим

$$\|\mathfrak{A}_1^\varepsilon\|_{L_2(Q;\,\mathbb{C})} \le c\left(\int_{Q_\varepsilon}|\partial_z u^0(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \le c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad (3.5)$$

$$\|\mathfrak{A}_3^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \quad (3.6)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависимая от ε и u^0.

Теперь оценим $\|\mathfrak{A}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}$. Согласно (3.3), (1.10) и неравенству Гельдера с показателями $\frac{p}{2}, \frac{p}{p-2}$, где $p > 2$ есть показатель повышенной суммируемости, имеем

$$\|\mathfrak{A}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \le 2\sum_{j=1}^2\left(\int_{Q_\varepsilon}\left|\nabla_y N(y)\right|^2|\partial_z u^0|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le 2\sum_{j=1}^2\left(\int_{Q_\varepsilon}\left|\nabla_y N(y)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{Q_\varepsilon}|\partial_z u^0|^{\frac{2p}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{2p}}. \quad (3.7)$$

Ввиду гладкости границы ∂Q ее можно покрыть кругами радиуса $2\varepsilon T$ с центрами на границе ∂Q таким образом, чтобы эти круги накрыли замыкание граничной полосы $\overline{Q_\varepsilon}$ и чтобы длины дуг между центрами соседних кругов были равными εT (кроме одной возможной, длина которой меньше εT). Погрузим далее каждый круг в квадрат со сторонами, параллельными осям координат, и длинами сторон $4\varepsilon T$. В результате получим покрытие приграничной полосы Q_ε квадратами $\square_{4\varepsilon T}$ в количестве, равном целой части $\left[\frac{L}{T\varepsilon}\right]$, где L есть длина границы ∂Q. Это эквивалентно покрытию $\overline{Q_\varepsilon}$ квадратами $\square_{\varepsilon T}$ в количестве $16\left[\frac{L}{T\varepsilon}\right]$. С учетом периодичности N и приведенной процедуры покрытия имеем

$$\left(\int_{Q_\varepsilon}\left|\nabla_y N(y)\right|^p dx\right) \leq 16\left[\frac{L}{T\varepsilon}\right]\int_{\square_{\varepsilon T}}\left|\nabla_y N(y)\right|^p dx = 16\left[\frac{L}{T\varepsilon}\right]\varepsilon^2\int_{\square}\left|\nabla_y N(y)\right|^p dy \leq 16\left(\frac{L}{T}+1\right)\varepsilon\|\nabla N\|^p_{L_p(\square)},\ y=\varepsilon^{-1}x.$$

Отсюда и из (1.10) получим

$$\left(\int_{Q_\varepsilon}\left|\nabla_y N(y)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq c\varepsilon^{\frac{1}{p}}, \tag{3.8}$$

где $c>0$ – постоянная, зависимая от k_0, T и ∂Q.

Второй интеграл справа (в 3.7) оценим, используя (3.1), где $q=\frac{2p}{p-2}, u=\partial_z u^0$. Имеем

$$\left(\int_{Q_\varepsilon}|\partial_z u^0|^{\frac{2p}{p-2}}dx\right)^{\frac{p-2}{2p}} \leq c\varepsilon^{\frac{p-2}{2p}}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}. \tag{3.9}$$

Из (3.9), (3.8) и (3.7) вытекает

$$\|\mathfrak{A}_2^\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{3.10}$$

где $c>0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0.

Из оценок (3.5), (3.6), (3.10) ввиду $(3.4')$ следует:

$$\left\|\nabla\left(u_1^\varepsilon(x)-w_1^\varepsilon(x)\right)\right\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{3.11}$$

где $c>0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0. Кроме того, из (3.4), свойства 1° функции θ^ε и $(3.3')$ следует оценка:

$$\|u_1^\varepsilon(x)-w_1^\varepsilon(x)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\varepsilon\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}. \tag{3.12}$$

Из оценок (3.11), (3.12) мы имеем:

$$\|u_1^\varepsilon(x)-w_1^\varepsilon(x)\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}, \tag{3.13}$$

где $c>0$ – постоянная, не зависящая от ε и u^0.

Теперь найдем L_2-оценку $f_\varepsilon := A_\varepsilon(u_\varepsilon - w_1^\varepsilon)$. Согласно (1.12) имеем

$$f_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon-u_1^\varepsilon)+A_\varepsilon(u_1^\varepsilon-w_1^\varepsilon) = \\ = -\varepsilon r_\varepsilon + \partial_{\bar z}(u_1^\varepsilon-w_1^\varepsilon)+\mu(y)\partial_z(u_1^\varepsilon-w_1^\varepsilon).$$

Отсюда и из L_2-оценок производных (3.11), учитывая (1.3), (2.1), получим оценку

$$\|f_\varepsilon\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq \|A_\varepsilon(u_\varepsilon-u_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})}+\|A_\varepsilon(u_1^\varepsilon-w_1^\varepsilon)\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq \\ \leq c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \tag{3.14}$$

с постоянной $c>0$, не зависящей от ε и u^0.

Заметим, что разность $u_\varepsilon - w_1^\varepsilon$ является решением задачи Римана–Гильберта: $\partial_{\bar z}u+\mu(\varepsilon^{-1}x)\partial_z u = f_\varepsilon, u\in W_0(Q)$, и оно принадлежит пространству $W_0(Q)$. Поэтому из оценок (3.14), (1.3) получим

$$\|u_\varepsilon - w_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})}. \tag{3.15}$$

Из оценок (3.13), (3.15) вытекает оценка разности между точным решением и первым приближением $u_\varepsilon - u_1^\varepsilon$:

$$\|u_\varepsilon - u_1^\varepsilon\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \tag{3.16}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от ε и u^0. Отсюда и из оценки (3.13), и из леммы 2 получим следующую оценку:

$$\|u_\varepsilon - u^0\|_{L_2(Q;\mathbb{C})} \leq c\sqrt{\varepsilon}\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \tag{3.17}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от ε. Так как u^0 – решение усредненной эллиптической задачи с постоянными коэффициентами, согласно эллиптическим оценкам [10], получим

$$\|u^0\|_{W_2^2(Q;\mathbb{C})} \leq c\|f\|_{W_2^1(Q;\mathbb{C})}$$

с постоянной $c > 0$, не зависящей от $f \in W_2^1(Q;\mathbb{C})$. Таким образом, с учетом (3.16), (3.17) получим (1.13). Теорема 5 доказана.

Литература

1. *Бирман М.Ш., Суслина Т.А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // Алгебра и анализ. – 2003. – Т. 15, № 5. – С. 1–108.

2. *Жиков В.В.* Об операторных оценках в теории усреднения // Доклады РАН. – 2005. – Т. 403, № 3. – С. 305–308.

3. *Жиков В.В., Пастухова С.Е.* Об операторных оценках в теории усреднения // Успехи математических наук. – 2016. – Т. 71, № 3. – С. 27–122.

4. *Сиражудинов М.М.* О G-сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами // Математический сборник. – 2008. – Т. 199, № 5. – С. 124–155.

5. *Сиражудинов М.М., Сиражудинов Р.М.* О G-сходимости систем обобщенных операторов Бельтрами // Труды МИАН. – 2008. – Т. 121. – С. 268–276.

6. *Сиражудинов М.М.* О G-компактности одного класса эллиптических систем первого порядка // Дифференциальные уравнения. – 1990. – Т. 26, № 2. – С. 298–305.

7. *Сиражудинов М.М.* О краевой задаче Римана–Гильберта // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 1. – С. 64–73.

8. *Сиражудинов М.М.* О периодических решениях одной эллиптической системы первого порядка // Математические заметки. – 1990. – Т. 48, № 5. – С. 153–155.

9. *Солонников В.А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса–Л. Ниренберга. Ч. II // Труды МИАН СССР. – 1966. – Т. 92. – С. 233–297.

10. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964.

11. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Высшая школа, 1987.

Поступила в редакцию 2 апреля 2021 г.

UDC 517.956.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-61–73

Error Estimates for the Averaging of the Riemann–Hilbert Problem for a System of n-Beltrami Equations

M.M. Sirazhudinov[1, 2], M.L. Amaeva[1]

[1] Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; siraznmagomed@yandex.ru, markha15@mail.ru;
[2] Dagestan Federal Research Center RAS; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 45

When describing mathematical models of highly non-homogeneous medium, their local characteristics are usually expressed by functions of the form $a(\varepsilon^{-1}x)$, where $\varepsilon > 0$ is a small parameter, and the function $a(x)$ has an ordered structure (it is periodic, almost periodic, the implementation of a homogeneous random field, etc.). Therefore, the corresponding mathematical models are differential equations with rapidly oscillating coefficients. Differential equations of this type cannot be solved even using modern supercomputers. In physics, highly non-homogeneous medium are replaced by so-called effective media, that is, media with constant physical characteristics. In mathematics, replacement highly non-homogeneous medium with effective media means the transition from the differential equation with rapidly oscillating coefficients to the equation with constant coefficients, that is, to the homogenized equation. The article deals with the issues of homogenization, as well as issues related to the subsequent estimation of the error of homogenization the Riemann–Hilbert problem for a system of n-Beltrami equations. Estimates of the error of homogenization the Riemann–Hilbert problem for a system of n Beltrami equations are obtained with minimal requirements for coefficients – they are measurable bounded periodic functions.

Keywords*: Beltrami equation, homogenization, G-convergence.*

Received 2 April 2021