УДК 534.014.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-54–60

Т.И. Ибавов

Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени

Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; ibavov94@mail.ru

В последнее время при описании различных математических моделей физических процессов широко используется дробно-дифференциальное исчисление. В связи с этим большое внимание уделяется дифференциальным уравнениям с частными производными дробного порядка, которые являются обобщением уравнений с частными производными целочисленного порядка.

Необходимость изучения краевых задач для дифференциальных уравнений с дробной производной связана с тем, что многие проблемы диффузии, наноплазматики, механики твёрдого тела, вязкоупругости и теории фильтрации жидкости приводят к дифференциальным уравнениям с дробной производной. При этом возникает необходимость исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с дробными производными и разработки методов их решений.

В работе исследована краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени. Для нахождения решения задача сведена к краевой задаче с граничными условиями первого рода. Посредством последовательного применения преобразований Фурье и Лапласа найдено решение уравнения теплопроводности в образах. Последовательное применение обратного преобразования Фурье и Лапласа помогло решить искомую задачу.

Ключевые слова: *краевая задача, дробная производная, преобразования Лапласа.*

Введение

Во многих случаях математические модели различных нелокальных физических процессов описываются дифференциальными уравнениями в частных производных дробного порядка вида:

$$\frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = C(x,t)\frac{\partial^{\beta} u(x,t)}{\partial x^{\beta}} + f(x,t), \qquad (1)$$

где $C(x,t) \geq 0, 0 < \alpha < 1, 1 < \beta < 2$.

При разработке математических моделей подобные уравнения дополняются соответствующими начальными и краевыми условиями. Уравнение (1) при соответствующих начальных и краевых условиях является математической моделью двумерной динамической системы. Такого рода уравнения описывают процессы во фрактальных средах.

В работе [3] получено решение краевой задачи для уравнения теплопроводности на полуоси. Работы [4–6] посвящены численному исследованию задачи теплопроводности. В работах [7; 8] исследована краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса.

Приведем ряд известных определений и теорем, которыми будем пользоваться в дальнейшей работе.

Определение 1. Если функция $f(t)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$,

2) функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера на полуоси $t > 0$ за исключением, быть может, отдельных точек, где оригинал может иметь разрыв первого рода (таких точек может быть конечное множество), т. е. $\forall t > 0$, $\exists A > 0$, $\exists \beta > 0, 0 < \beta \le 1$ и $\exists \tau_0 > 0$, для которых имеет место неравенство $\left| f(t+\tau) - f(t) \le A \left|\tau\right|^{\beta} \right.$ при всех τ удовлетворяющих условию $\left|\tau\right| \le \tau_0$,

3) $\exists M > 0$ и $\exists s_0 \ge 0$, для которых имеет место неравенство $\left|f(t)\right| < Me^{s_0 t}$,

то для комплекснозначной функции $f(t)$ изображением Лапласа будет функция $F(p)$ комплексной переменной $p = s + i\sigma$, определяемая в виде

$$F(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt .$$

Теорема 1. Пусть функция $f(t)$ является непрерывной при $t > 0$ и $f^{(n)}(t)$ и является оригиналом, тогда

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{n-1-k} f^{(k)}(0), \tag{2}$$

где $f^{(k)}(0) = \lim\limits_{t \to +0} f^{(k)}(t)$.

Теорема 2. Преобразование Лапласа от свертки двух функций равно произведению оригиналов этих функций, то есть

$$L(f(t) \otimes g(t)) = F(p)G(p) .$$

Пусть функция $f(t)$ задана на полуоси $t > 0$, тогда дробная производная Римана-Лиувилля вводится в виде [2]:

$$\left(D_+^{\alpha} f\right)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt . \tag{3}$$

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на $[0,T]$ вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно, причем $f^{(n)}(t) \in L[0,T]$. Тогда для любого $\alpha \in (0;n]$ производная $D_{0t}^{\alpha} f(t)$ существует. Кроме того, если $\alpha \in (n-1;n]$, то почти всюду на $[0,T]$ имеет место представление [1]:

$$D_{0t}^{\alpha} f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{\Gamma(1+k-\alpha)} \cdot t^{k-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds .$$

Выражение вида

$$\partial_{0t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(n)}(s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}} ds \quad (4)$$

называется дробным производным Капуто.

Таким образом, при $0 < \alpha < 1$ имеет место равенство [1]:

$$D_{0t}^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{/}(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds + \frac{f(0)}{\Gamma(1-\alpha) t^{\alpha}}. \quad (5)$$

Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $t > 0$ и возрастает не быстрее показательной функции, тогда имеет место равенство [8]:

$$L(\partial_{0t}^{\alpha} f(t)) = p^{\alpha} F(p) + \frac{f(0)}{p^{1-\alpha}}. \quad (6)$$

Краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени

Рассмотрим краевую задачу для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени вида:

$$\begin{cases} \partial_{0t}^{\alpha} T(x,t) = a \dfrac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad (t > 0,\, 0 < x < \infty), \\ T(x,0) = T_0, \\ \lambda \dfrac{\partial T(0,t)}{\partial x} + q_c = 0, \\ T(\infty,t) = T_0, \left.\dfrac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\infty} = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $0 < \alpha < 1$.

Решение задачи (7) будем находить путем сведения этой задачи к задаче с граничными условиями первого рода. Имеем:

$$q(x,t) = -\lambda \frac{\partial T(x,t)}{\partial x}. \quad (8)$$

Продифференцируем уравнение (7) по переменной x, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t)\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}\right). \tag{9}$$

Для левой части равенства (9) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{\alpha} T}{\partial t^{\alpha}}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{T_{\tau}^{/}(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{(T_{\tau}^{/}(x,\tau))_x^{/}}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t\frac{(T_x^{/}(x,\tau))_{\tau}^{/}}{(t-\tau)^{\alpha}}d\tau=\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t}\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right).$$

Тогда получим

$$\partial_{0t}^{\alpha}\left(\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}\right)=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right). \tag{10}$$

Воспользовавшись равенствами (8) и (10), получим задачу с краевыми условиями первого рода:

$$\begin{cases}\partial_{0t}^{\alpha} q(x,t)=a\dfrac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}\\ q(x,0)=0,\\ q(0,t)=q_c,\\ q(\infty,t)=0.\end{cases} \tag{11}$$

Применяя к производной $\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}$ преобразования Фурье, для образа Фурье получим выражение:

$$F_s\left[\frac{\partial^2 q(x,t)}{\partial x^2}\right]=\frac{2}{\pi}\omega q(0,t)-\omega^2 F_s(q)=\frac{2q_c\omega}{\pi}-\omega^2 q(\omega,t). \tag{12}$$

Воспользовавшись равенствами (12), получим:

$$\partial_{0t}^{\alpha}\left(q(\omega,t)\right)+a\omega^2 q(\omega,t)-\frac{q(\omega,0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}}=\frac{2q_c\omega a}{\pi}$$

или же

$$D_{0t}^{\alpha}\big(q(\omega,t)\big)+a\omega^2 q(\omega,t)=\frac{2q_c\omega a}{\pi}. \tag{13}$$

Применяя к уравнению (13) преобразования Лапласа по переменной t, получим:

$$p^{\alpha}q(\omega,p)=\frac{2q_c\omega a}{\pi\cdot p(p^{\alpha}+\omega^2)}.$$

Воспользовавшись равенством [7]

$$\frac{1}{p\cdot(p^{\alpha}+\omega^2)}=\frac{1}{\omega^2}\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}(1-E_{\alpha,1}(-\omega^2t^{\alpha})dt,$$

получим

$$q(\omega,t)=\frac{2q_c a}{\pi\cdot\omega}\left[1-E_{\alpha,1}(-\omega^2t^{\alpha})\right]. \tag{14}$$

Применяя обратные преобразования Фурье, получим решение задачи (11) в виде:

$$q(x,t)=\frac{2q_c a}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{\omega}\left[1-E_{\alpha,1}(-\omega^2t^{\alpha})\right]\cdot\sin\omega x d\omega. \tag{15}$$

Подставляя решение (15) в равенство (8), можно получить решение задачи (7).

Заключение

В работе исследована краевая задача для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени. Путём сведения задачи к краевой задаче с граничными условиями первого рода и последовательного применения преобразований Фурье и Лапласа получено решение в образах краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной по времени. После применения обратного преобразования Фурье и Лапласа получено аналитическое решение искомой задачи.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2003. – 299 с.
2. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.
3. *Бейбалаев В.Д.* Математическая модель переноса в средах с фрактальной структурой // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 55–62.
4. *Бейбалаев В.Д.* Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка // Вестник СамГТУ. Сер.: Физико-математические науки. – 2009. – № 1 (18). – С. 267–270.

5. *Бештоков М.Х., Худалов М.З.* Третья краевая задача для нагруженного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто // Математика и математическое моделирование. – 2020. – № 3. – С. 52–64.

6. *Нахушева Ф.М., Джанкулаева М.А., Нахушева Д.А.* Уравнение теплопроводности с дробной производной по времени с сосредоточенной теплоёмкостью // Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований. – 2017. – № 8–1. – С. 22–27.

7. *Малиева Ф.Ф., Бейбалаев В.Д.* Разностная схема с весами решения краевой задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса // Актуальные проблемы прикладной математики и физики: материалы Межд. науч. конференции (Нальчик–Терскол, 17–21 мая 2017 г.). – Нальчик: Изд-во ИПМА КБНЦ РАН, 2017. – С. 142–143.

8. *Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А.* Об одной краевой задаче для уравнения теплопроводности с дробной производной Рисса // Возобновляемая энергетика: проблемы освоения возобновляемых энергоресурсов: материалы VI Межд. конференции (г. Махачкала, 12–15 октября 2020 г.). – Махачкала: Алеф, 2020. – С. 291–293.

9. *Дубков А.А., Агудов Н.В.* Преобразование Лапласа. – Н. Новгород: НГУ, 2016. – 36 с.

10. *Beibalaev V.D., Shabanova M.R.* A Finite-Difference scheme for solution of a fractional heat diffusion-wave equation without initial conditions // Thermal science. – 2015. – Vol. 19, № 2. – Pp. 531–536.

Поступила в редакцию 1 ноября 2020 г.

UDC 534.014.2

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-54–60

On a Boundary Value Problem for the Heat Equation With a Fractional Time Derivative

T.I. Ibavov

Daghestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a; ibavov94@mail.ru

Recently to describe various mathematical models of physical processes, fractional differential calculs has been used. In this regard, much attention is paid to partial differential equation of fractional derivatives which are a generalization of partial differential equations of integer order. The necessity of investigating boundary value problem for differential equations with fractional derivative is connected with the fact that many problem of diffusion, nanoplasmonics, solid mechanics, viscoelasticity and the theory of fluid filtration. In this respect, the necessity to study boundary value problems of differential equation with fractional derivative and to develop methods for their solution arises. In the paper the boundary value problem for the heat equation with time-fractional derivative Caputo is investigated. The solution was found by reducing to a boundary value problem with boundary conditions of the first kind. By means of successively applying the Fourier and Laplace transform the solution in images of heat equation was found. After applying the inverse Fourier and Laplace transform the solution of required problem is found.

Keywords: *boundary value problem, fractional derivative, Laplace transforms.*

Received 1 November 2020