УДК 519.642.2:517.968.72

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-47–53

В.Д. Бейбалаев[1, 2], Т.И. Ибавов[1], А.Г. Омарова[1]

Численное исследование нелинейного уравнения теплопроводности с производным дробного порядка

[1] Дагестанский государственный университет; Россия, 367000, г. Махачкала, ул. М. Гаджиева, 43а; kaspij_03@mail.ru, ibavov94@mail.ru, asya89.89@mail.ru;
[2] Дагестанский государственный университет народного хозяйства; 367008, г. Махачкала, ул. Атаева, 5; kaspij_03@mail.ru

Работа посвящена исследованию в области $D = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ первой краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка.

В статье отмечено, что вопросы, связанные с исследованием нелинейных процессов теплопроводности, являются актуальными. Как известно, для описания нелинейных процессов теплопроводности используют нелинейные уравнения. Когда речь идет о фрактальных системах с памятью, то для описания процессов теплопроводности вместо обычных дифференциальных уравнений в частных производных используют дифференциальные уравнения с частными дробными производными.

В работе в области $D = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ исследована первая краевая задача для нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной Капуто по времени. Построена неявная разностная схема для численного решения рассматриваемой задачи. Получены условия устойчивости разностной схемы по начальным данным. Доказана равномерная устойчивость разностной схемы по начальным данным, а также предложен численный метод для решения нелинейного уравнения теплопроводности с дробной производной.

Ключевые слова: *дробная производная, аппроксимация, разностная схема, устойчивость, сходимость.*

Введение

На сегодняшний день исследование нелинейных физических процессов является одним из основных направлений математической физики. Линейные математические модели позволяют приближенно описывать структуру различных процессов. Они используются только в тех случаях, когда исследуемые физические величины меняются несущественно в рассматриваемом процессе. При большом диапазоне изменения параметров процессы описываются с помощью нелинейных моделей. При этом нелинейности изменяют не только количественные характеристики процессов, но и качественную картину их протекания. Для описания нелинейных моделей служат нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных. В настоящее время нет завершённой теории и общих методов решения такого рода задач.

В последние десятилетия дифференциальные уравнения дробного порядка вызывают большой интерес. Это связано с тем, что многие физические явления можно успешно объяснить путем разработки моделей с использованием теории дробного исчисления. Дробные дифференциальные уравнения также служат отличным инструментом для описания процессов, протекающих во фрактальной среде.

Следует также отметить, что большая часть статей и книг по дробному исчислению посвящена решению линейных дифференциальных уравнений с производными дробного порядка.

Численным методам решения краевых задач посвящены, например, работы [3–10]. В них исследована краевая задача для уравнения теплопроводности с дробными производными по времени и координате. В [5] численно исследована краевая задача для уравнения теплопроводности с двусторонней производной дробного порядка. В работе [7] исследована задача Дирихле для уравнения Пуассона с дробной производной. В [8] построена разностная схема решения краевой задачи для волнового уравнения с дробной производной и доказана устойчивость и сходимость этой разностной схемы. Работы [9–12] также посвящены исследованию краевых задач для одномерного уравнения теплопроводности с дробными производными.

Задача. В области $D = \{(x,t\} : 0 < x < 1, 0 < t < L\}$ найти решение уравнения

$$\rho \cdot c \cdot \partial_{0t}^{\alpha} T(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(T) \frac{\partial}{\partial x} T(x,t) \right) + f(T), \tag{1}$$

удовлетворяющее начальному условию $T(x,0) = \varphi(x)$ и граничным условиям

$$T(0,t) = \mu_1(t) \text{ и } T(1,t) = \mu_2(t). \tag{2}$$

Здесь $\partial_{0t}^{\alpha} T(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{T_t^{/}(x,s)}{(t-s)^{\alpha}} ds$ – частная дробная производная Caputo [1], $0 < \alpha < 1$, $\lambda(T), f(T)$ – достаточно гладкие функции и $0 < c_1 \le \lambda(T) \le c_2$.

1. Численный метод решения краевой задачи для нелинейного уравнения теплопроводности с производными дробного порядка

Для численного решения задачи (1), (2) в области

$$\overline{D} = \{(x,t) : 0 \le x \le 1, 0 \le t \le T\}$$

введем сетку:

$$\varpi_{h\tau} = \left\{ (x_m, t_n) : x_m = mh, t_n = n\tau, m = 0,1,\dots, M, h = \frac{1}{M}, n = 0,1,\dots, N, \tau = \frac{L}{N} \right\}$$

с шагом h по x и τ по t.

Для дробной производной Caputo в случае $0 < \alpha < 1$ имеет место разностная аппроксимация [13]

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}T(x,t)\right)_n=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_n}\frac{T_s^{/}(x,s)}{(t_n-s)^{\alpha}}ds=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{i=1}^{n}\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{T_s^{/}(x,s)}{(t_n-s)^{\alpha}}ds=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{T_s^{/}(x,t_i)+T_{ss}^{//}(t,\xi)(s-t_i)}{(t_n-s)^{\alpha}}ds, \tag{3}$$

где $s\le\xi\le x_i$.

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{T_{ss}^{//}(t,\xi)(s-t_i)}{(t_n-s)^{\alpha}}ds\le\frac{M\tau}{\Gamma(1-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{1}{(t_n-s)^{\alpha}}ds=$$
$$=\frac{M\tau}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\left(t_{n-i+1}^{1-\alpha}-t_{n-i}^{1-\alpha}\right)=\frac{M\tau\cdot t_n^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}=O(\tau).$$

Таким образом,

$$\left(\partial_{0t}^{\alpha}T(x,t)\right)_n=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{t_n}\frac{T_s^{/}(x,s)}{(t_n-s)^{\alpha}}ds=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}T_s(x,t_i)\int_{t_i}^{t_{i+1}}\frac{ds}{(t_i-s)^{\alpha}}+$$
$$+O(\tau)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\left(t_{n-i+1}^{1-\alpha}-t_{n-i}^{1-\alpha}\right)\frac{T(x,t_{i+1})-T(x,t_i)}{\tau}+O(\tau).$$

Обозначим через $T(x_m,t_n)$ точное решение задачи (3), (2) а через $y_m^n=y(x_m,t_n)$ – приближенное решение в точке (x_m, t_n), $n = 0, 1, \ldots, N$, $m = 0, 1, \ldots, M$.

Дифференциальное выражение

$$LT=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial u}{\partial x}T(x,t)\right) \tag{4}$$

при каждом фиксированном t аппроксимируем в точке (x_m,t) разностным отношением [3]

$$\Lambda(t)y_m=\frac{1}{h}\left(k_{m+1/2}\frac{y_{m+1}-y_m}{h}-k_{m-1/2}\frac{y_m-y_{m-1}}{h}\right), \tag{5}$$

где $k_{m+1/2}=\dfrac{k(y_m)+k(y_{m+1})}{2}$, $k_{m-1/2}=\dfrac{k(y_{m-1})+k(y_m)}{2}$

С помощью (3) и (5) для уравнения (1) получим неявную, линейную относительно $y_m^{n+1}, m=1,2,\ldots,M-1, n=0,1,\ldots,N-1$, разностную схему

$$\rho\cdot c\cdot\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\frac{y_m^{i+1}-y_m^i}{\tau}\left(t_{n-i+1}^{1-\alpha}-t_{n-i}^{1-\alpha}\right)= \tag{6}$$

$$=.\frac{1}{h}\left(k_{m+1/2}^n\frac{y_{m+1}^{n+1}-y_m^{n+1}}{h}-k_{m-1/2}^n\frac{y_m^{n+1}-y_{m-1}^{n+1}}{h}\right)+f\left(y_m^n\right).$$

Полученную разностную схему можно свести к наиболее общему виду:

$$A_m\cdot y_{m+1}^{n+1}-B_m\cdot y_m^{n+1}+C_m y_{m-1}^{n+1}=F_m, \tag{7}$$

где $A_m=\frac{k_{m+1/2}^n}{h^2}$, $C_m=\frac{k_{m-1/2}^n}{h^2}$, $B_m=\frac{k_{m+1/2}^n+k_{m-1/2}^n}{h^2}+\frac{\rho c(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha})}{\Gamma(2-\alpha)\cdot\tau}$,

$$F_m=-\rho\cdot c\cdot\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\left(y_m^n\left(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)-\sum_{i=0}^{n-1}\frac{y_m^{i+1}-y_m^i}{\tau}\left(t_{n-i+1}^{1-\alpha}-t_{n-i}^{1-\alpha}\right)\right)-.$$

$$-f(y_m^n)$$

Теорема. Неявная разностная схема (6) безусловно устойчива.

Доказательство. Уравнение (8) можно записать в виде:

$$Ay^{n+1}=y^n+\Gamma(2-\alpha)\tau\cdot f(y^n).$$

Тогда $S=A^{-1}$ – оператор перехода с одного временного слоя на другой. Условием устойчивости по начальным данным разностной схемы (6) является [9] $\|S\|\le 1$. Действительно $\|y^{n+1}\|=\|Sy^n\|\le\|S\|\cdot\|y^n\|$ или $\|y^{n+1}\|\le\|y^n\|\le\ldots\le\|y^0\|$.

Следовательно, начальные возмущения затухают. Условие $\|S\|\le 1$ есть условие того, что спектр оператора S лежит внутри круга единичного радиуса на комплексной плоскости. Это означает, что $\max_i|\lambda_i|<1$, где λ_i – собственные числа оператора перехода S.

Для нахождения собственных значений оператора перехода решение y_m^n представим в виде возмущения:

$$y_m^n=\lambda^n e^{i\omega mh}, \tag{8}$$

где i – мнимая единица, λ – собственные числа оператора перехода [3].

В результате подстановки (8) в (6) получим:

$$\rho c\sum_{i=0}^{n}\frac{\lambda^{i+1}e^{i\omega mh}-\lambda^i e^{i\omega mh}}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\left(t_{n-i+1}^{1-\alpha}-t_{n-i}^{1-\alpha}\right)=$$

$$.=\frac{1}{h}\left[k_{m+1/2}^n\frac{\lambda^{n+1}e^{i\omega h(m+1)}-\lambda^{n+1}e^{i\omega mh}}{h}-k_{m-1/2}^n\frac{\lambda^{n+1}e^{i\omega mh}-\lambda^{n+1}e^{i\omega(m-1)h}}{h}\right],$$

т. е.

$$\rho c\frac{(\lambda^{n+1}-\lambda^{n})\left(t_1^{1-\alpha}-t_0^{1-\alpha}\right)}{\Gamma(2-\alpha)\tau}+\frac{\rho c}{\Gamma(2-\alpha)\tau}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\lambda^{i+1}-\lambda^{i}\right)\left(t_{n-i+1}^{1-\alpha}-t_{n-i}^{1-\alpha}\right)=$$

$$=\frac{1}{h}\left[k_{m+1/2}^{n}\frac{\lambda^{n+1}e^{i\omega h}-\lambda^{n+1}}{h}-k_{m-1/2}^{n}\frac{\lambda^{n+1}-\lambda^{n+1}e^{-i\omega h}}{h}\right].$$

Из этого равенства получим для оценки собственных значений оператора перехода выражение

$$\lambda\le\left[1+\frac{\Gamma(2-\alpha)\tau}{\rho c t_n^{1-\alpha}h^2}\left(k_{m+1/2}^{n}(1-e^{i\omega h})+k_{m-1/2}^{n}(1-e^{-i\omega h})\right)\right]^{-1}.$$

Так как $0<c_1\le k(T)\le c_2$, то получим

$$\lambda\le\left[1+\frac{\Gamma(2-\alpha)\tau c_1}{\rho c t_n^{1-\alpha}h^2}\left(2-e^{i\omega h}-e^{-i\omega h}\right)\right]^{-1},$$

т. е.

$$\lambda\le\left[1+\frac{2\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}c_1 n^{\alpha-1}}{\rho c h^2}\left(1-\cos\omega h\right)\right]^{-1}.$$

Учитывая, что $1-\cos\omega h=2\sin^2\frac{\omega h}{2}$, окончательно получим оценку

$$|\lambda|\le\left[1+\frac{4\Gamma(2-\alpha)\tau^{\alpha}c_1 n^{\alpha-1}}{\rho\cdot c\cdot h^2}\sin^2\frac{\omega h}{2}\right]^{-1}. \qquad (9)$$

Из неравенства (9) следует, что $|\lambda|<1$, т. е. $\|S\|\le\rho<1$, разностная схема равномерно устойчива по начальным данным, следовательно, устойчива и по правой части [3].

Решение $y_m^{n+1}, m=1,2,...,M-1, n=0,1,...,N-1$ разностной задачи

$$\rho\cdot c\cdot\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\sum_{i=0}^{n}\frac{y_m^{i+1}-y_m^{i}}{\tau}\left(t_{n-i+1}^{1-\alpha}-t_{n-i}^{1-\alpha}\right)=$$

$$=.\frac{1}{h}\left(\lambda_{m+1/2}^{n}\frac{y_{m+1}^{n+1}-y_m^{n+1}}{h}-\lambda_{m-1/2}^{n}\frac{y_m^{n+1}-y_{m-1}^{n+1}}{h}\right)+f\left(y_m^n\right).$$

$$y_m^0=u_0,$$

$$y_0^n=\mu_1(t_n),$$

$$y_M^n=\mu_2(t_n),$$

можно найти методом прогонки.

Литература

1. *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их применение. – Нальчик, 2003. – 299 с.
2. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 430 с.
3. *Назаралиев М.А., Бейбалаев В.Д.* Численные методы решения краевой задачи для уравнения теплопереноса с производной дробного порядка // Вестник ДГУ. – 2008. – Вып. 6. – С. 46–53.
4. *Бейбалаев В.Д.* Математическая модель переноса в средах с фрактальной структурой // Математическое моделирование. – 2009. – Т. 21, № 5. – С. 55–62.
5. *Бейбалаев В.Д.* Численный метод решения задачи переноса с двусторонней производной дробного порядка // Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 1 (18). – С. 267–270.
6. *Hristov J.* Approximate Solutions to Fractional Subdiffusion Equations // The European Physical Journal Special Topics. – 2011. – V. 193, № 1. – Pp. 229–243.
7. *Beybalaev V.D., Meilanov R.R.* Dirihlet Problem for the Fractional Poisons Equation with Caputo Derivatives: A Finite Difference Approximation and a Numerical Solution, Thermal Science. – 2012. – V. 16, № 2. – Pp. 385–394.
8. *Бейбалаев В.Д., Якубов А.З.* Анализ разностной схемы аналога волнового уравнения с оператором дробного дифференцирования // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2014. – Т. 1, № 34. – С. 125–133.
9. *Beybalaev V.D., Shabanova M.R.* A Finite-Difference Scheme for Solution a Fractional Heat Diffusion-Wave Equation Conditions // Thermal science. – 2015. – T. 19, № 2. – Pp. 531–536.
10. *Бейбалаев В.Д., Аливердиев А.А., Магомедов Р.А., Мейланов Р.Р., Ахмедов Э.Н.* Моделирование процессов промерзания одномерным уравнением теплопроводности с операторами дробного дифференцирования // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. – 2017. – Т. 21, № 2. – С. 376–387.
11. *Лафишева М.М., Шхануков–Лафишев М.Х.* Локально-одномерная разностная схема для уравнения диффузии дробного порядка // Вычислительная математика и математическая физика. Т. 48, № 10. – М.: Академиздатцентр «Наука» РАН. – 2008. – – С. 1878–1887.
12. *Малиева Ф.Ф.* Об устойчивости разностной схемы с весами для уравнения теплопроводности с дробной производной Caputo // Вестник ДГУ. – 2017. – Вып. 2. – С. 39–46.

Поступила в редакцию 24 марта 2021 г.

UDC 519.642.2:517.968.72

DOI: 10.21779/2542-0321-2021-36-2-47–53

Numerical Studies of a Nonlinear Heat Equation With a Fractional Derivative

V.D. Beybalaev[1, 2] T.I. Ibavov[1], A.G. Omarova[1]

[1] Dagestan State University; Russia, 367000, Makhachkala, M. Gadzhiev st., 43a, kaspij_03@mail.ru, ibavov94@mail.ru, asya89.89@mail.ru;
[2] Dagestan State University of National Economy, 367008, Makhachkala, Ataev st. 5; kaspij_03@mail.ru

The article is devoted to the research in the field $D = \{(x,t\} : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ first boundary value problem for a nonlinear thermal conductivity equation with fractional derivatives.

Issues related to the study of nonlinear thermal conductivity processes are relevant. As it is known, nonlinear equations are used to describe nonlinear thermal conductivity processes. When it comes to fractal memory systems, it uses differential equations with private fractional derivatives to describe the heat conduction processes instead of conventional differential equations in private derivatives. In the work in the field $D = \{(x,t\} : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$, the first boundary value problem for a nonlinear thermal conductivity equation with a fractional derivative of the Caputo in time is investigated. An implicit difference scheme has been built for the numerical solution of the problem under consideration. The conditions for the stability of the difference scheme according to the initial data were obtained. The uniform stability of the difference scheme according to the initial data is proved, and a numerical method is proposed to solve a nonlinear thermal conductivity equation with a fractional derivative.

Keywords: *Fractional derivative, approximation, difference scheme, stability, convergence.*

Received 24 March 2021