

**Б.Х. Хайиткулов**

**Консервативные схемы для нестационарной задачи выбора оптимального размещения источников тепла в параллелепипеде**

*Национальный университет Узбекистана; Узбекистан, 100174, г. Ташкент, Вузгородок, ул. Университетская, 4; b.hayitqulov@mail.ru*

В статье в процессе математического моделирования систем, связанных с ресурсосберегающими инженерными технологиями, обозначена проблема оптимального размещения ресурсов в отапливаемых помещениях. Многообразие критериев оптимизации способствует постановке целого ряда задач, различающихся методами решения. Задача оптимального размещения источников тепла в отапливаемых помещениях всегда была актуальной в строительстве, металлургии, проектировании теплиц и в других различных областях техники и технологий. Отличительной чертой статьи является то, что в ней рассматривается нестационарная задача, т. е. изменение температуры, которое зависит не только от пространственных переменных, но и от времени.

В статье рассматривается задача распределения плотности источников тепла, которая обеспечивает заданный температурный режим при минимальной суммарной мощности этих источников.

Предлагаются метод и алгоритм решения нестационарных задач при оптимальном выборе плотности источников тепла на параллелепипеде таким образом, чтобы температура находилась в заданных пределах. Создано программное приложение для проведения вычислительных экспериментов.

Как известно, построение функции Грина для задач в частных производных фактически означает нахождение решения в явном виде. При применении численных методов значения функции Грина представляются в виде матрицы, которая является обратной к матрице, составленной из коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений. Тем самым удается указать значения искомой функции в узловых точках разбиения. После подстановки этих значений в условиях ограничения температуры тела, учитывая нахождения экстремума функционала, получается задача линейного программирования, для решения которой применяется стандартный алгоритм М-метод.

**Ключевые слова:** оптимальный выбор, источники тепла, уравнение баланса, интегро-интерполяционный метод, консервативные схемы, симплекс-метод.

**Введение**

Многие прикладные задачи современного естествознания, в частности управление распространением тепла в среде, математической моделью которых является уравнение в частных производных, приводят к выбору местоположения источников тепла с целью минимизации энергии расходуемого количества тепла. В работе [1] предложено решение задачи оптимального размещения источников в неоднородных средах, скаляр-

ные стационарные поля в которых описываются эллиптическими уравнениями. В основу алгоритмов решения задачи положены эффективные способы оценки значений функционала на множестве возможных мест размещения источников, что дает возможность выбора оптимального варианта путем реализации метода ветвей и границ в каждом конкретном случае. В работе [2] рассмотрены на основе принципа максимума Понтрягина задачи оптимального нагрева помещения. Приведена методика расчетов оптимального управления переходными режимами при натопе помещения. Работа [3] посвящена формулировке в явном виде математической задачи по оптимизации теплоснабжения в смысле ее энергетической эффективности и поиску ее решений. В [4; 5] рассматривались нестационарные задачи расчета оптимального обогрева простых геометрических областей: отрезок, прямоугольник и параллелепипед. В работе [7] рассмотрены для случая несжимаемой вязкой жидкости разностные схемы, отражающие свойства исходных уравнений: сеточная аппроксимация нелинейных членов переноса не дает вклада в баланс энергии и энтропии. Схемы строятся на неравномерной сетке в прямоугольнике интегро-интерполяционным методом. В работе [8] для кинетического уравнения Больцмана на основе метода расщепления по физическим факторам построен консервативный алгоритм численного решения. Данна формулировка соответствующих дискретных граничных и начальных условий. На ряде примеров показана эффективность метода, позволяющего значительно увеличить точность вычислений. В работе [9] рассмотрена третья краевая задача параболического типа. Распределение тепла в рассматриваемом теле контролируется функцией, которая находится на границе тела; решена задача в случае конфликта о возможности перевода исходного положения тела в нужное состояние.

### 1. Постановка задачи и ее консервативная аппроксимация

В области  $D = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, p \leq z \leq q, 0 \leq t \leq T\}$  требуется определить функцию  $f(x, y, z, t) \geq 0$ , доставляющую при каждом  $t \in [0, T]$  минимум линейному функционалу

$$J\{f\} = \int_a^b \int_c^d \int_p^q f(x, y, z, t) dz dy dx \rightarrow \min, \quad (1)$$

при следующих условиях:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + f(x, y, z, t), \quad (2)$$

$$a < x < b, \quad c < y < d, \quad p < z < q, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, y, z, 0) = u_0(x, y, z), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad p \leq z \leq q,$$

$$u(a, y, z, t) = \mu_1(y, z, t), \quad u(b, y, z, t) = \mu_2(y, z, t), \quad c \leq y \leq d, \quad p \leq z \leq q, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, c, z, t) = \mu_3(x, z, t), \quad u(x, d, z, t) = \mu_4(x, z, t), \quad a \leq x \leq b, \quad p \leq z \leq q, \quad 0 < t \leq T,$$

$$u(x, y, p, t) = \mu_5(x, y, t), \quad u(x, y, q, t) = \mu_6(x, y, t), \quad a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad 0 < t \leq T,$$

$$m(x, y, z, t) \leq u(x, y, z, t) \leq M(x, y, z, t), \quad (x, y, z, t) \in D. \quad (3)$$

Здесь  $u = u(x, y, z, t)$  – температура в точке  $(x, y, z)$  параллелепипеда в момент времени  $t$ ;  $\chi(x, y, z, t) > 0$  – коэффициент теплопроводности;  $u_0(x, y, z)$ ,  $\mu_1(y, z, t)$ ,

$\mu_2(y, z, t)$ ,  $\mu_3(x, z, t)$ ,  $\mu_4(x, z, t)$ ,  $\mu_5(x, y, t)$ ,  $\mu_6(x, y, t)$ ,  $m(x, y, z, t)$ ,  $M(x, y, z, t)$  – заданные функции. Функции  $m(x, y, z, t)$ ,  $M(x, y, z, t)$  имеют смысл функций минимального и максимального профиля температуры в области  $D$  соответственно. Плотность источников тепла описывается квадратично интегрируемой функцией  $f(x, y, z, t)$  в пространстве  $L_2(D)$ .

Оператор  $Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \chi(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \chi(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi(x, y, z, t) \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  с

начальным и краевым условием будет самосопряженным, положительно определенным в  $L_2(D)$ , а значит, он имеет ограниченный обратный оператор  $G = L^{-1}$ . С его помощью можно переформулировать задачу (1)–(3) как задачу на минимум функционала (1) при следующих условиях на плотность источников:

$$f(\cdot, \cdot, \cdot) \in L_2(D), \quad f(\cdot, \cdot, \cdot) \geq 0, \quad m(x, y, z, t) \leq (Gf)(x, y, z, t) \leq M(x, y, z, t). \quad (4)$$

По четырем переменным в  $D$  вводится равномерная разностная сетка:

$$\bar{\omega}_{h_1 h_2 h_3 \tau} = \bar{\omega}_{h_1} \times \bar{\omega}_{h_2} \times \bar{\omega}_{h_3} \times \bar{\omega}_{\tau} = \{(x_i, y_j, z_k, t_s) : x_i = ih_1, y_j = jh_2, z_k = kh_3, t_s = s\tau, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}, k = \overline{0, N_3}, s = \overline{0, N_4}\} \text{ с шагом } h_1 = (b - a) / N_1, h_2 = (d - c) / N_2, h_3 = (q - p) / N_3, \tau = T / N_4.$$

Для получения разностного уравнения рассмотрим интегральное уравнение баланса тепла на элементарной ячейке сетки на параллелепипеде  $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ ,

$$y_{j-1/2} \leq y \leq y_{j+1/2}, \quad z_{k-1/2} \leq z \leq z_{k+1/2} \text{ за промежуток времени } t_s \leq t \leq t_{s+1}:$$

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} u(x, y, z, t_{s+1}) dz dy dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} u(x, y, z, t_s) dz dy dx = \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} W(x_{i-1/2}, y, z, t) dz dy dt - \\ & \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} W(x_{i+1/2}, y, z, t) dz dy dt + \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} W(x, y_{j-1/2}, z, t) dz dx dt - \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} W(x, y_{j+1/2}, z, t) dz dx dt + \\ & \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} W(x, y, z_{k-1/2}, t) dy dx dt - \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} W(x, y, z_{k+1/2}, t) dy dx dt + \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} f(x, y, z, t) dz dy dx dt. \end{aligned}$$

Здесь  $W(x, y, z, t)$  – поток тепла,  $W(x, y, z, t) = -\chi(x, y, z, t) \operatorname{grad} u$ . Апроксимируем входящие в уравнение баланса интегралы приближенными формулами [10]:

$$\begin{aligned} & \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} u(x, y, z, t_{s+1}) dz dy dx \approx h_1 h_2 h_3 u_{ijk}^{s+1}, \quad \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} W(x_{i-1/2}, y, z, t) dz dy dt \approx \tau h_2 h_3 W_{i-1/2, jk}^{s+1}, \\ & \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} W(x, y_{j-1/2}, z, t) dz dx dt \approx \tau h_1 h_3 W_{ij-1/2, k}^{s+1}, \quad \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} W(x, y, z_{k-1/2}, t) dy dx dt \approx \tau h_1 h_2 W_{ijk-1/2}^{s+1}, \\ & \int_{t_s}^{t_{s+1}} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \int_{z_{k-1/2}}^{z_{k+1/2}} f(x, y, z, t) dz dy dx dt \approx \tau h_1 h_2 h_3 f_{ijk}^{s+1}, \\ & W_{i-1/2, jk}^{s+1} = -\chi_{i-1/2, jk}^{s+1} \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{i-1jk}^{s+1}}{h_1}, \quad W_{ij-1/2, k}^{s+1} = -\chi_{ij-1/2, k}^{s+1} \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{ij-1k}^{s+1}}{h_2}, \quad W_{ijk-1/2}^{s+1} = -\chi_{ijk-1/2}^{s+1} \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{ijk-1}^{s+1}}{h_3}. \end{aligned}$$

При этом  $\chi_{i-1/2jk}^{s+1}$ ,  $\chi_{ij-1/2k}^{s+1}$ ,  $\chi_{ijk-1/2}^{s+1}$  и  $f_{ijk}^{s+1}$  определяется равенствами

$$\begin{aligned}\chi_{i-1/2jk}^{s+1} &= \chi\left(\frac{x_i+x_{i-1}}{2}, y_j, z_k, t_{s+1}\right), \chi_{ij-1/2k}^{s+1} = \chi\left(x_i, \frac{y_j+y_{j-1}}{2}, z_k, t_{s+1}\right), \chi_{ijk-1/2}^{s+1} = \chi\left(x_i, y_j, \frac{z_k+z_{k-1}}{2}, t_{s+1}\right), \\ \chi_{ijk}^{s+1} &= \chi(x_i, y_j, z_k, t_{s+1}), \quad f_{ijk}^{s+1} = f(x_i, y_j, z_k, t_{s+1}).\end{aligned}$$

Неявная консервативная разностная схема для условия (2) имеет вид [10]:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{ijk}^s}{\tau} &= \chi_{i+1/2jk}^{s+1} \frac{u_{i+1jk}^{s+1} - u_{ijk}^{s+1}}{h_1^2} - \chi_{i-1/2jk}^{s+1} \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{i-1jk}^{s+1}}{h_1^2} + \chi_{ij+1/2k}^{s+1} \frac{u_{ij+1k}^{s+1} - u_{ijk}^{s+1}}{h_2^2} - \chi_{ij-1/2k}^{s+1} \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{ij-1k}^{s+1}}{h_2^2} + \\ &+ \chi_{ijk+1/2}^{s+1} \frac{u_{ijk+1}^{s+1} - u_{ijk}^{s+1}}{h_3^2} - \chi_{ijk-1/2}^{s+1} \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{ijk-1}^{s+1}}{h_3^2} + f_{ijk}^{s+1}, \\ i &= \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{1, N_3 - 1}, \quad s = \overline{0, N_4 - 1}, \\ u_{ijk}^0 &= u_0(x_i, y_j, z_k), \quad u_{0jk}^{s+1} = \mu_1(y_j, z_k, t_{s+1}), \quad u_{N_1jk}^{s+1} = \mu_2(y_j, z_k, t_{s+1}), \\ u_{i0k}^{s+1} &= \mu_3(x_i, z_k, t_{s+1}), \quad u_{iN_2k}^{s+1} = \mu_4(x_i, z_k, t_{s+1}), \quad u_{ij0}^{s+1} = \mu_5(x_i, y_j, t_{s+1}), \quad u_{ijN_3}^{s+1} = \mu_6(x_i, y_j, t_{s+1}), \\ i &= \overline{0, N_1}, \quad j = \overline{0, N_2}, \quad k = \overline{0, N_3}, \quad s = \overline{0, N_4 - 1}. \end{aligned} \right. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} XYZ &= \left( \frac{1}{\tau} + \frac{\chi_{i\pm 1/2jk}^{s+1}}{h_1^2} + \frac{\chi_{ij\pm 1/2k}^{s+1}}{h_2^2} + \frac{\chi_{ijk\pm 1/2}^{s+1}}{h_3^2} \right), \quad X^+ = -\frac{\chi_{i+1/2jk}^{s+1}}{h_1^2}, \quad X^- = -\frac{\chi_{i-1/2jk}^{s+1}}{h_1^2}, \\ Y^+ &= -\frac{\chi_{ij+1/2k}^{s+1}}{h_2^2}, \quad Y^- = -\frac{\chi_{ij-1/2k}^{s+1}}{h_2^2}, \quad Z^+ = -\frac{\chi_{ijk+1/2}^{s+1}}{h_3^2}, \quad Z^- = -\frac{\chi_{ijk-1/2}^{s+1}}{h_3^2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим расширенную матрицу системы:

$$A = \begin{bmatrix} XYZ & Z^+ & 0 & \dots & 0 & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ Z^- & XYZ & Z^+ & 0 & \dots & 0 & Y^+ & 0 & \dots & 0 & X^+ & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & 0 & \dots & 0 & Z^- & XYZ & Z^+ \\ 0 & \dots & \dots & 0 & X^- & 0 & \dots & 0 & Y^- & 0 & \dots & 0 & Z^- & XYZ & Z^- \end{bmatrix}.$$

Получаем

$$G = A^{-1}.$$

Построим консервативную конечномерную аппроксимацию (1)–(5) в виде задачи линейного программирования. Разобьем область  $D$  по переменным  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $t$  соответственно на  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_3$ ,  $N_4$  равных частей:  $D = \bigcup_{s=1}^{N_4} \bigcup_{i=1}^{N_1} \bigcup_{j=1}^{N_2} \bigcup_{k=1}^{N_3} D_{ijk}^s$ , где  $D_{ijk}^s = \{(x, y, z, t),$

$x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j, z_{k-1} \leq z \leq z_k, t_{s-1} \leq t \leq t_s\}$ ,  $i = \overline{1, N_1}$ ,  $j = \overline{1, N_2}$ ,  $k = \overline{1, N_3}$ ,  $s = \overline{1, N_4}$ . Обозначим через  $S_{N_1 N_2 N_3}^{N_4}(D) \subset L_2(D)$  подпространство, в котором определены кусочно-постоянныи функции вида  $f(x, y, z, t) = f_{ijk}^s$ ,  $(x, y, z, t) \in D_{ijk}^s$  ( $i = \overline{1, N_1 - 1}$ ,  $j = \overline{1, N_2 - 1}$ ,

$k = \overline{1, N_3 - 1}$ ,  $s = \overline{1, N_4}$ . Введем в  $S_{N_1 N_2 N_3}^{N_4}(D)$  базис, состоящий из функций

$$e_{ijk}^s(x, y, z, t) = 1, (x, y, z, t) \in D_{ijk}^s. \text{ Тогда } f(x, y, z, t) \approx \sum_{s=1}^{N_4} \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{k=1}^{N_3-1} f_{ijk}^s e_{ijk}^s(x, y, z, t).$$

Пусть  $g_{rw} = (Ge_{ijk}^s, e_{ijk}^s)$ ,  $(m(x, y, z, t), e_{ijk}^s(x, y, z, t)) = m_{ijk}^s$ ,

$$(M(x, y, z, t), e_{ijk}^s(x, y, z, t)) = M_{ijk}^s, \tilde{f}_w^s = f_{ijk}^s, (r = w, w = (i-1)(N_2-1)(N_3-1) + (j-1)(N_3-1) + k),$$

$$N = (N_1-1)(N_2-1)(N_3-1), r = \overline{1, N}, w = \overline{1, N}, i = \overline{1, N_1-1}, j = \overline{1, N_2-1}, k = \overline{1, N_3-1},$$

$s = \overline{1, N_4}$ , где  $(\cdot, \cdot)$  – скалярное произведение в  $L_2(D)$ . Подставим выражение для  $f(x, y, z, t)$  в (1) и скалярно умножаем неравенства (5) на  $e_{ijk}^s(x, y, z, t)$  в  $L_2(D)$ . Получим задачу линейного программирования

$$\begin{aligned} J_s\{f\} &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{j=1}^{N_2-1} \sum_{k=1}^{N_3-1} (\text{mes} D_{ijk}^s) f_{ijk}^s \rightarrow \min, \quad s = 1, 2, \dots, N_4, \\ m_{ijk}^s &\leq \sum_{w=1}^N g_{rw} \tilde{f}_w^s \leq M_{ijk}^s, \quad r = 1, 2, \dots, N, \\ i &= \overline{1, N_1-1}, j = \overline{1, N_2-1}, k = \overline{1, N_3-1}, s = \overline{1, N_4}, \\ \tilde{f}_w^s &\geq 0, \quad w = 1, 2, \dots, N, s = 1, 2, \dots, N_4. \end{aligned} \tag{6}$$

Решением задачи (6) численными методами находится функция  $u_{ijk}^s = \sum_{w=1}^N g_{rw} \tilde{f}_w^s$ ,

$(i = (r-1) \div (N_2-1)(N_3-1) + 1)$ , которая является решением краевой задачи (2) с  $\tilde{f}_w^s$ , где обозначение  $\div$  есть символ целочисленного деления. При этом задача (6) решается симплекс-методом.

## 2. Описание алгоритмов и результатов численных экспериментов

Для приближенного решения задачи (1)–(6) разработано программное обеспечение на языке C#. Оно позволяет представлять все необходимые входные данные: константы, коэффициенты, параметры сеток, а также функции температуры, начальные и краевые условия в виде скриптов. Для представления результатов разработаны графические модули.

**Вычислительный эксперимент 1.** Найти оптимальную плотность распределения источников на параллелепипеде. В качестве расчётной области используется куб  $(0 \leq x, y, z \leq 1)$  с функцией теплопроводности  $\chi(x, y, z, t) = e^{x-y-z-t}$  м<sup>2</sup>/с. Начальное и граничные условия определяются функциями:  $u_0(x, y, z) = 3 + x^2 + y^2 + z^2$  м/с,  $\mu_1(y, z, t) = 3 + y^2 + z^2 + t^2$  м/с,  $\mu_2(y, z, t) = 4 + y^2 + z^2 + t^2$  м/с,  $\mu_3(x, z, t) = 3 + x^2 + z^2 + t^2$  м/с,  $\mu_4(x, z, t) = 4 + x^2 + z^2 + t^2$  м/с,  $\mu_5(x, y, t) = 3 + x^2 + y^2 + t^2$  м/с,  $\mu_6(x, y, t) = 4 + x^2 + y^2 + t^2$  м/с. Ограничивающие температурные кривые задаются функциями  $m(x, y, z, t) = 1 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2$  К,  $M(x, y, z, t) = 5 + x^2 + y^2 + z^2 + t^2$  К, а окончание времени  $T = 1$ . Расчетная сетка с

числом источников  $(N_1 - 1) \times (N_2 - 1) \times (N_3 - 1) \times N_4 = 6 \times 6 \times 6 \times 7$ . На рис. 1 представлены результаты численного решения задачи (6).

Минимум при численном решении значение функционала равен  $J_{\min} = 30.52 \text{ К} \cdot \text{м/с}$ . Представлены результаты с минимальным, максимальным и приближенным значением температуры. Для иллюстрации эффективности разработанного метода на рис. 2 в виде гистограммы показано оптимальное распределение источников. Результаты данного вычислительного эксперимента показывают достижения функционалом минимума.

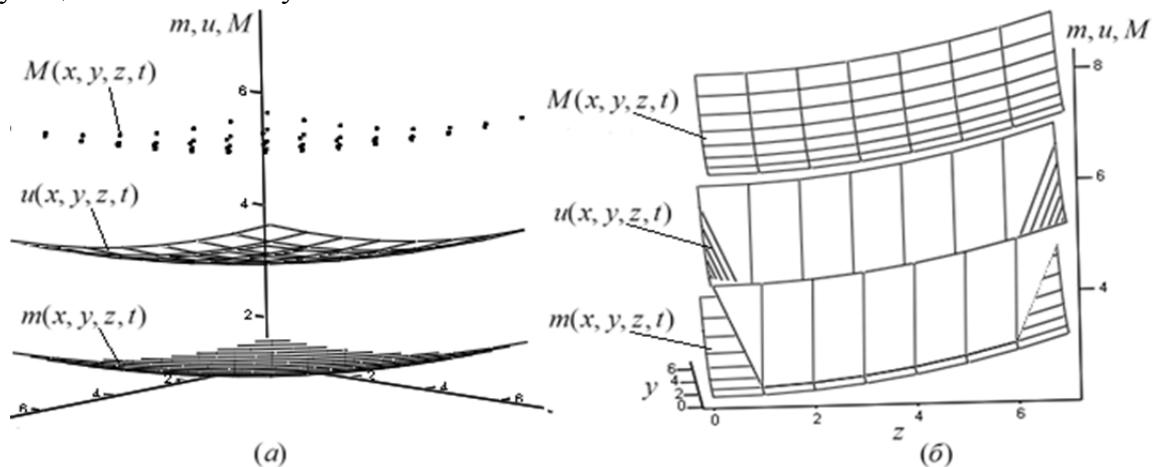


Рис. 1. График решения задачи (6) в разные моменты времени: при  $x = 0.5$ ,  $t = 0$  (a) при  $x = 0.5$ ,  $t = T$  (б)

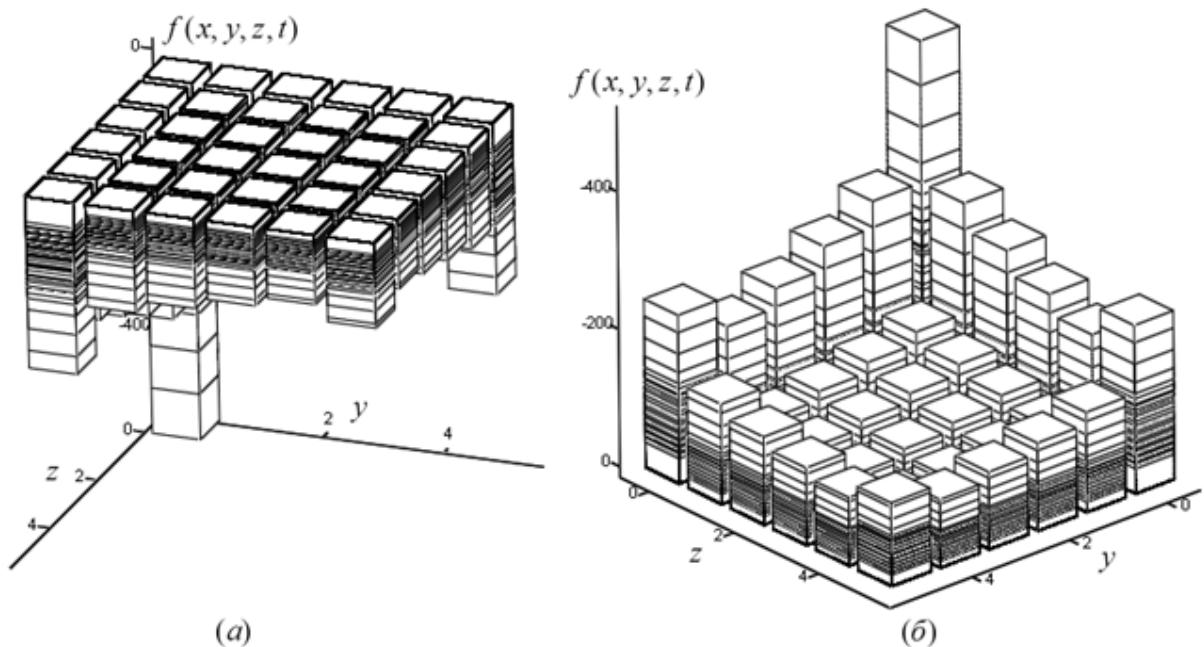


Рис. 2. Распределение оптимальной плотности источников тепла  $f(x, y, z, t)$ : в обычном (a) и перевернутом виде (б)

### Заключение

В работе исследован вопрос о принципиальной возможности численного решения задачи нахождения плотности источников тепла минимальной суммарной мощности, что обеспечивает заданный температурный режим в области, заполненной неоднородной неподвижной средой. Разработаны алгоритмы численного решения этой задачи посредством сведения к решению консервативной задачи линейного программирования (6). В результате проведенных вычислительных экспериментов для неподвижной неоднородной среды подтверждена эффективность разработанных алгоритмов и всей методики в целом.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Узбекского фонда фундаментальных исследований, № OT-Ф4-33.*

### Литература

1. Ахметзянов А.В., Кулибанов В.Н. Оптимальное размещение источников для стационарных скалярных полей // Автоматика и телемеханика. – 1999. – № 6. – С. 50–58.
2. Мирская С.Ю., Сидельников В.И. Экономичный обогрев помещения как задача оптимального управления // Технико-технологические проблемы сервиса. – 2014. – № 4 (30). – С. 75–78.
3. Сабденов К.О., Байтасов Т.М. Оптимальное (энергоэффективное) теплоснабжение здания в системе центрального отопления // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. – 2015. – Т. 326, № 8. – С. 53–60.
4. Хайиткулов Б.Х. Численное решение нестационарной задачи об оптимальном выборе источников тепла в стержне // Проблемы вычислительной и прикладной математики. – 2020. – № 5 (29). – С. 141–146.
5. Хайиткулов Б.Х. Консервативные разностные схемы по оптимальному выбору местоположения источников тепла в стержне // Математическое моделирование и численные методы. – 2020. – № 3. – С. 85–98.
6. Khaikulov B.Kh. Homogeneous different schemes of the problem for optimum selection of the location of heat sources in a rectangular body // Solid State Technology. – 2020. – Vol. 63, iss. 4. – Pp. 583–592.
7. Моисеенко Б.Д., Фрязинов И.В. Консервативные разностные схемы для уравнений несжимаемой вязкой жидкости в переменных Эйлера // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1981. – Т. 21, № 5. – С. 1180–1191.
8. Аристов В.В., Черемисин Ф.Г. Консервативный метод расщепления для решения уравнения Больцмана // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1980. – Т. 20, № 1. – С. 191–207.
9. Тухтасинов М.Т., Абдуолимова Г.М., Хайиткулов Б.Х. Граничное управление распространением тепла в ограниченном теле // Бюллетень Института математики. – 2019. – № 1. – С. 1–10.
10. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – 7-е изд. – М.: Наука, 2004. – 800 с.

*Поступила в редакцию 22 марта 2021 г.*

## **Conservative Schemes for the Non-Stationary Problem of Choosing the Optimal Placement of Heat Sources in a Parallelepiped**

***B.Kh. Khayitkulov***

*National University of Uzbekistan; Uzbekistan, 700174, Tashkent, VUZ Gorodok, Universitetskaya st., 4; b.hayitkulov@mail.ru*

In the process of mathematical modeling of systems associated with resource-saving engineering technologies, the problem of optimal allocation of resources in heated rooms arises. The variety of optimization criteria allows the formulation of a number of problems. In fact, there are a number of problems here, which differ in the formulation of the problem and the methods of solution. The problem of optimal placement of heat sources in heated rooms has always been relevant in construction, metallurgy, greenhouse design and various other areas of technology and technology. The problem of optimal placement of heat sources in heated rooms is also included in the general problem of this kind of applied problems. In the paper the problem of ensuring the temperature inside the region within the specified limits is considered due to the optimal placement of heat sources of minimum power.

One of the distinctive features of the research is that a non-stationary problem is considered, i. e. the change in temperature depends not only on spatial variables, but also on time.

As it is known the construction of the Green's function for problems in partial derivatives, in fact, means finding a solution in an explicit form. When applying numerical methods, the values of the Green's function are represented in the form of a matrix, which is inverse to the matrix composed of the coefficients of a system of linear algebraic equations. Thus, it is possible to indicate the values of the required function at the nodal points of the partition. After substituting these values on the conditions-limitations of the body temperature, taking into account the finding of the extremum of the functional, a linear programming problem is obtained, for the solution of which the standard M-method algorithm is used.

**Keywords:** *optimal selection, heat sources, balance equation, integro-interpolation method, conservative schemes, simplex method.*

*Received 22 March 2021*